

12

Løsningsmetoder i elastisitetsteori

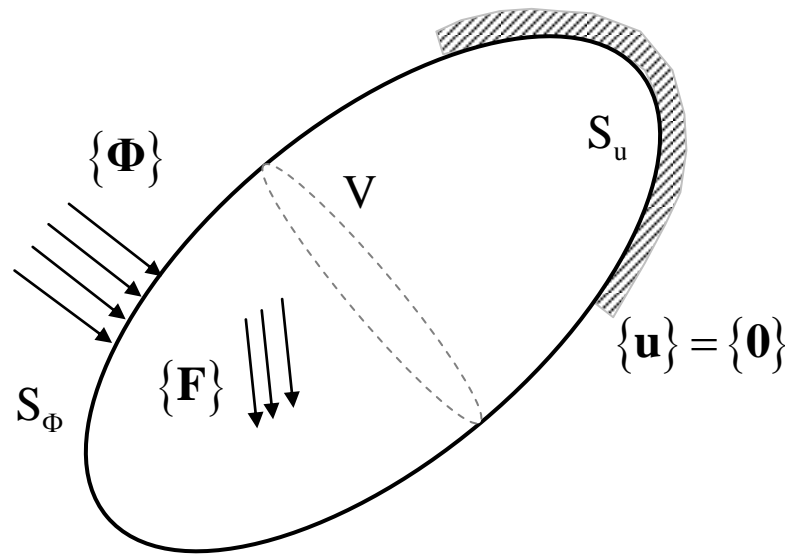
Innhold:

- Eksakt løsning
- Tilnærmede løsninger
- Prinsippet om virtuelt arbeid i 3D
- Prinsippet om stasjonær potensiell energi i 3D
- Rayleigh-Ritz' metode i 2D og 3D
- Skiver kontra plater
- Eksakte skiveløsninger kontra bjelketeori

Litteratur:

- Cook & Young, "Advanced Mechanics of Materials", kap. 7.3 – 7.6 (ikke Airy's spenningsfunksjon)
- Larsen: "Konstruksjonsteknikk – Laster og bæresystemer", kap. 4.6

Elastisitetsteoriens grunnligninger



Gitt: Elastisk legeme med volum V omsluttet av en rand (overflate) S . På randen S_u er det foreskrevet randbetingelser i form av spesifiserte forskyvninger $\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_c\}$, typisk $\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$. På randen S_Φ er det foreskrevet randbetingelser i form av spesifiserte flatekrefter $\{\Phi\} = \{\Phi_c\}$. Dessuten er legemet påkjent av volumkrefter $\{\mathbf{F}\}$.

Differensialligninger som uttrykker likevekt (se side 9-22):

$$[\partial]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Differensialligninger som uttrykker kompatibilitet (se side 10-8):

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\partial]\{\mathbf{u}\}$$

Lineær elastisk spennings-tøyningsrelasjon (se side 11-6):

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}](\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\})$$

$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$ er initialtøyninger, f.eks pga temperatur.

Elastisitetsteoriens grunnligninger (forts)

Randbetingelser:

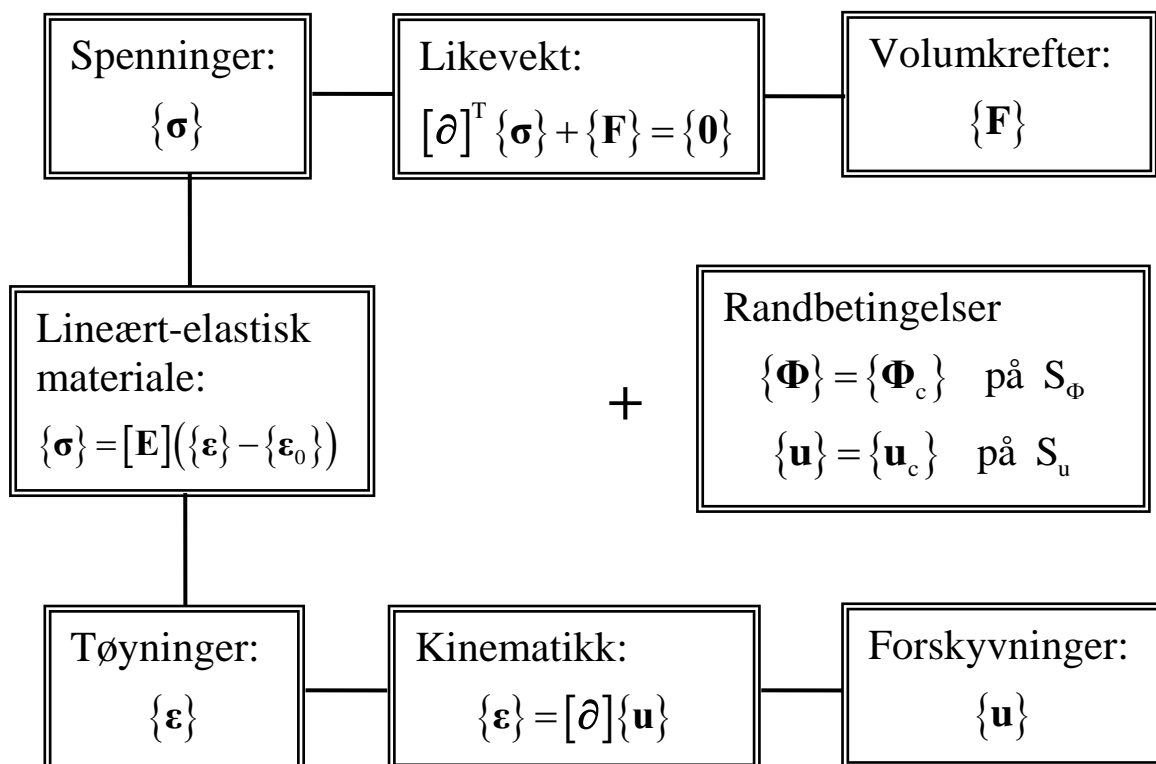
- Traksjoner:

$$\{\Phi\} = \{\Phi_c\} \quad \text{på } S_\Phi$$

- Forskyvninger:

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_c\} \quad \text{på } S_u$$

Oversikt:



Ligninger og ukjente

Type ligning	Antall ligninger		
	3D	2D	1D
Likevekt $[\partial]^T \{\sigma\} + \{F\} = \{0\}$	3	2	1
Materiallov $\{\sigma\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})$	6	3	1
Kinematikk $\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}$	6	3	1
Totalt	15	8	3

Type ukjent	Antall ukjente		
	3D	2D	1D
Spenninger $\{\sigma\}$	6	3	1
Tøyninger $\{\varepsilon\}$	6	3	1
Forskyvninger $\{u\}$	3	2	1
Totalt	15	8	3

Disse ligningsystemene, inkludert relevante randbetingelser, gir en eksakt løsning på et vilkårlig elastisitetsteoretisk problem.

Praktisk problem: Særlig i 2D og 3D er kun et fåtall problemer analytisk løsbare.

Praktisk håndtering: Numeriske løsning (elementmetoden)

Eksakte løsninger

En eksakt løsning må tilfredsstillte følgende ligninger i ethvert punkt i legemets volum V :

- Likevektsligningene
- Kinematikklikningene
- Konstitutive ligninger

Dessuten må følgende krav være tilfredsstillt på ethvert punkt på randen S :

- Randbetingelser på traksjoner
- Randbetingelser på forskyvninger

Eksakte løsninger kan kun etableres for enkle kombinasjoner av:

- Geometri
- Belastning
- Randbetingelser

VIKTIG:

Eksakte løsninger (både elastisitetsteori og plastisitetsteori) er mye benyttet som “benchmark”-tilfeller (referansetilfeller) i elementmetoden:

- Uttesting av nye elementer
- Sjekk av materialmodeller
- Evaluering av løsningsalgoritmer

Tilnærmede løsninger

En tilnærmet løsning kan etableres analytisk eller numerisk.

En analytisk, tilnærmet løsning er vanligvis basert på Rayleigh-Ritz' metode: Man benytter prinsippet om stasjonær potensiell energi eller prinsippet om virtuelt arbeid, og velger (antar) et forskyvningsfelt bestående av formfunksjoner multiplisert med generaliserte frihetsgrader. Ved å kreve stasjonær potensiell energi, evt. at summen av alle virtuelle arbeidsbidrag skal være lik null, kan verdien av de generaliserte frihetsgradene bestemmes. Når forskyvningsfeltet er kjent, kan tøyninger, spenninger osv. bestemmes ved derivasjon, materiallov osv.

En numerisk, tilnærmet løsning er for de aller fleste faststoffmekaniske problemer basert på elementmetoden:

Konstruksjonen/legemet deles inn i elementer. Hvert element er beskrevet med et antall frihetsgrader og formfunksjoner, se side 7-11 og 7-12 for bjelkeelement. Elementene er forbundet med hverandre via felles frihetsgrader, og i sum bygger de opp en modell av hele systemet. Også her benyttes prinsippet om virtuelt arbeid eller stasjonær potensiell energi til å regne ut de ukjente (dvs. løse et ligningssystem mhp. frihetsgradene)

Egenskaper ved en tilnærmet løsning basert på antatte/valgte forskyvningsfelt (Rayleigh-Ritz, elementmetoden):

- Tilfredsstiller ikke likevektslikningene i ethvert materialpunkt – verken i volumet eller på randene
- Tilfredsstiller i gjennomsnitt (integrert) likevektslikningene og randbetingelsene på traksjoner
- Tilfredsstiller de kinematiske relasjonene siden tøyningene er direkte beregnet fra de antatte forskyvningene
- Tilfredsstiller randbetingelser på forskyvninger (essensielle randkrav) forutsatt gyldig valg av formfunksjoner
- Tilfredsstiller konstitutive ligninger

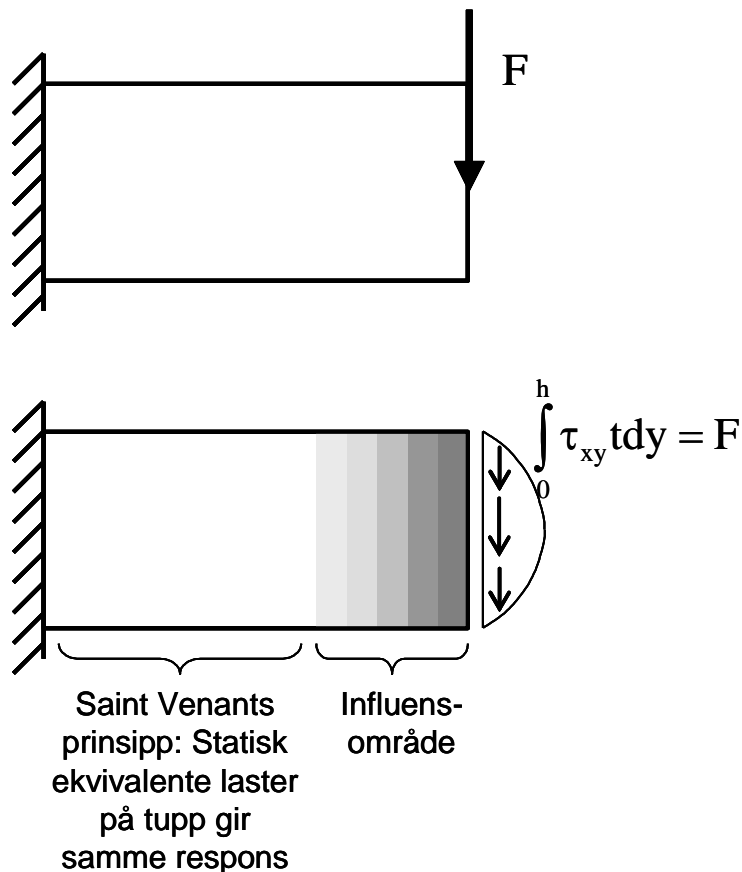
Saint Venants prinsipp

Definisjon: Statiske ekvivalente laster =
Laster med samme resultant

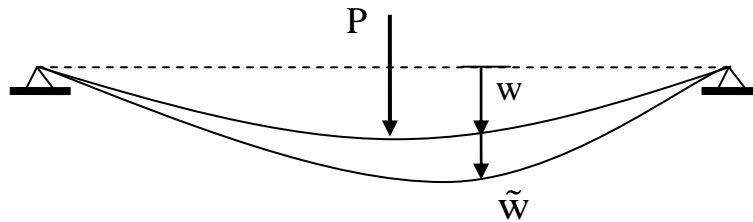
Hypotese (Saint Venants prinsipp):

Virkningene av to statiske ekvivalente laster som virker over et begrenset område, er signifikant forskjellige kun i nærheten av det belastede området. Spennings- og deformasjonstilstand er essensielt den samme i de delene av legemet som er lenger unna enn et influensområde beskrevet av utstrekningen til det belastede området.

Illustrasjon:



Virtuelle forskyvninger



Så langt har virtuelle forskyvningsfelt kun vært benyttet til å bestemme krefter eller momenter i stive (ikke-deformerbare) systemer. Vi skal nå generalisere de virtuelle forskyvningers prinsipp til bruk i deformerbare legemer.

Stadig: En virtuell forskyvning er en tenkt (hypotetisk) og meget liten endring i konfigurasjonen (tilstanden) til et system.

Den virtuelle forskyvningen forutsettes å skje relativt til likevektskonfigurasjonen. All belastning er dermed satt på systemet før det virtuelle forskyvningsfeltet påføres. Videre må de virtuelle forskyvningene tilfredsstillere kravene på side 7-3 og 7-4:

- Tilstrekkelig glatte (kontinuerlige og deriverbare) funksjoner som tilfredsstillere den kinematiske sammenhengen mellom forskyvning og tøyning
- Essensielle randbetingelser må være tilfredsstillt

Det forutsettes at verken belastning (krefter) eller spenninger endres av den virtuelle forskyvningen. Dette er OK siden det er antatt infinitesimale virtuelle forskyvninger.

Dette kapittelet ender opp med etableringen av Rayleigh-Ritz' metode for 3D. Rayleigh-Ritz kan være basert på:

- ◆ Alt.1: Virtuelle forskyvningers prinsipp (VFP).
Se lysarkene 12-9 til 12-14 og lysark 12-20
- ◆ Alt.2: Prinsippet om stasjonær potensiell energi.
Se lysarkene 12-15 til 12-17 og lysark 12-19

Prinsippet om virtuelt arbeid

Prinsippet om virtuelt arbeid:

Et mekanisk system er i statisk likevekt hvis og bare hvis det virtuelle arbeidet utført av ytre krefter er lik det virtuelle arbeidet utført av indre krefter for en vilkårlig tillatt virtuell forskyvning.

Virtuell forskyvningsvektor: $\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix}$

Virtuell tøyningsvektor: $\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\partial]\{\tilde{\mathbf{u}}\}$

Fullt utskrevet:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_x \\ \tilde{\varepsilon}_y \\ \tilde{\varepsilon}_z \\ \tilde{\gamma}_{xy} \\ \tilde{\gamma}_{yz} \\ \tilde{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix}$$

Prinsippet om virtuelt arbeid (forts.)

Indre virtuelt arbeid er definert som arbeidet utført av spenningene over de virtuelle tøyningene:

$$\tilde{W}_i = \int \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV$$

Ytre virtuelt arbeid er definert som arbeidet utført av volumkreftene og overflatekreftene over det virtuelle forskyvningsfeltet:

$$\tilde{W}_y = \int \{\tilde{\mathbf{u}}\}^T \{\mathbf{F}\} dV + \int \{\tilde{\mathbf{u}}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS$$

Prinsippet om virtuelt arbeid for et kontinuerlig legeme: $\tilde{W}_i = \tilde{W}_y$

$$\int \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = \int \{\tilde{\mathbf{u}}\}^T \{\mathbf{F}\} dV + \int \{\tilde{\mathbf{u}}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS$$

Merk:

De virtuelle forskyvningene $\{\tilde{\mathbf{u}}\}$ skal tilfredsstillere essensielle randkrav, og må derfor være lik null på S_u , dvs den delen av randen hvor det er definert randbetingelser på forskyvning

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{på } S_u$$

Denne versjonen av prinsippet om virtuelt arbeid er også kjent som virtuelle forskyvningers prinsipp (VFP).

For et stivt legeme er $\tilde{W}_i = 0$, og vi er tilbake til prinsippet om virtuelt arbeid slik det ble formulert på lysark 1-4.

VFP – Utledning

Likevektsligningene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

Randbetingelser på traksjoner (Cauchys ligninger):

$$\Phi_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n$$

$$\Phi_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n$$

$$\Phi_z = \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

Med disse ligningene er spenningene i legemet relatert til belastningen definert ved volumkrefter $\{\mathbf{F}\}$ og flatekrefter $\{\Phi\}$.

Første trinn i utledningen er at likevektsligningen i x-retning multipliseres med en virtuell forskyvning \tilde{u} (i x-retning) og integreres over legemets volum V :

$$\int_V \tilde{u} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dV + \int_V \tilde{u} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dV + \int_V \tilde{u} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dV + \int_V \tilde{u} F_x dV = 0$$

VFP – Utledning (forts.)

Ligningen omskrives ved bruk av delvis integrasjon

$$\int \alpha d\beta = \alpha\beta - \int \beta d\alpha:$$

$$\int_{S_\Phi} \tilde{u} \sigma_x l dS - \int_V \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \sigma_x dV + \int_{S_\Phi} \tilde{u} \tau_{xy} m dS - \int_V \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \tau_{xy} dV +$$

$$\int_{S_\Phi} \tilde{u} \tau_{xz} n dS - \int_V \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \tau_{xz} dV + \int_V \tilde{u} F_x dV = 0$$

Her har divergensteoremet $\int_V \text{div}\{\mathbf{H}\} dV = \int_S \{\mathbf{H}\}^T \{\mathbf{n}\} dS$ blitt

benyttet i følgende form:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} \sigma_x) dV = \int_S (\tilde{u} \sigma_x) l dS$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{u} \tau_{xy}) dV = \int_S (\tilde{u} \tau_{xy}) m dS$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{u} \tau_{xz}) dV = \int_S (\tilde{u} \tau_{xz}) n dS$$

Innføring av randbetingelsene i x-retning gir nå:

$$\int_{S_\Phi} \tilde{u} \Phi_x dS - \int_V \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \tau_{xz} \right) dV + \int_V \tilde{u} F_x dV = 0$$

VFP – Utledning (forts.)

Ved å starte med likevektsligningene i y- og z-retning fås tilsvarende uttrykk:

$$\int_{S_\Phi} \tilde{v} \Phi_y dS - \int_V \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \tau_{yz} \right) dV + \int_V \tilde{v} F_y dV = 0$$

$$\int_{S_\Phi} \tilde{w} \Phi_z dS - \int_V \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \tau_{zx} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \tau_{zy} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \sigma_z \right) dV + \int_V \tilde{w} F_z dV = 0$$

De tre integrerte likevektsligningene summeres:

$$\int_{S_\Phi} (\tilde{u} \Phi_x + \tilde{v} \Phi_y + \tilde{w} \Phi_z) dS + \int_V (\tilde{u} F_x + \tilde{v} F_y + \tilde{w} F_z) dV$$

$$- \int_V \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \sigma_z \\ \tilde{\varepsilon}_x \quad \tilde{\varepsilon}_y \quad \tilde{\varepsilon}_z \end{array} \right] dV$$

$$- \int_V \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right)}_{\tilde{\gamma}_{xy}} \tau_{xy} + \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right)}_{\tilde{\gamma}_{yz}} \tau_{yz} + \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right)}_{\tilde{\gamma}_{zx}} \tau_{zx} \right] dV = 0$$

Kinematikk-ligningene, se side 10-5 og 10-7, må også være gyldige for virtuelle forskyvninger og tøyninger. Årsak: Ett av kravene til det virtuelle forskyvningsfeltet er at det ikke skal bryte kontinuiteten i legemet.

VFP – Utledning (forts.)

Dermed kan ligningen skrives som:

$$\int_{S_\Phi} (\tilde{u} \Phi_x + \tilde{v} \Phi_y + \tilde{w} \Phi_z) dS + \int_V (\tilde{u} F_x + \tilde{v} F_y + \tilde{w} F_z) dV - \int_V [\tilde{\epsilon}_x \sigma_x + \tilde{\epsilon}_y \sigma_y + \tilde{\epsilon}_z \sigma_z + \tilde{\gamma}_{xy} \tau_{xy} + \tilde{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \tilde{\gamma}_{zx} \tau_{zx}] dV = 0$$

På matriseform, jfr. side 12-10:

$$\int \{\tilde{\mathbf{u}}\}^T \{\mathbf{F}\} dV + \int \{\tilde{\mathbf{u}}\}^T \{\Phi\} dS - \int \{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = 0$$

Oppsummering:

- Utledningen viser at prinsippet om virtuelt arbeid inneholder likevektsligningene og randbetingelsene på traksjoner.
- Forutsatt at det virtuelle forskyvnings- og tøyningfeltet tilfredsstiller kravene på side 12-8, er også kinematikklikningene og randbetingelser på forskyvninger inkludert i prinsippet.
- Prinsippet er derimot uavhengig av materiallov. Det er ikke begrenset til elastisk materialoppførsel.
- Alle trinnene i utledningen er reversible.
- Et 1D spesialtilfelle av VFP, som også uttrykker $\tilde{W}_y = \tilde{W}_i$, er gitt på side 4-8:

$$F\tilde{r} = \int_V \sigma \tilde{\epsilon} dV$$

Her er det ikke gjort noe skille mellom volum- og overflatekrefter. Forøvrig er versjonene ekvivalente.

Potensiell energi i 3D

Tøyningsenergitetthet for et lineært-elastisk materiale

$$U_0 = \frac{1}{2} (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\})^T [\mathbf{E}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\})$$

hvor $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$ er initialtøyning, se side 11-6.

Tøyningsenergi for legeme med volum V

$$U = \int_V U_0 dV = \int_V \frac{1}{2} (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\})^T [\mathbf{E}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) dV$$

Lastpotensiale relatert til volumkrefter $\{\mathbf{F}\}$ og overflate-traksjoner $\{\boldsymbol{\Phi}\}$ – forutsatt at disse kreftene er konservative:

$$\Omega = - \int_V \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV - \int_{S_\Phi} \{\mathbf{u}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS$$

Den potensielle energien er gitt som $\Pi = U + \Omega$:

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_V \frac{1}{2} (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\})^T [\mathbf{E}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) dV \\ & - \int_V \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV - \int_{S_\Phi} \{\mathbf{u}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS \end{aligned}$$

Potensiell energi i 3D (forts)

Den potensielle energien kan alternativt uttrykkes som:

$$\begin{aligned}\Pi = \int_V \left(\frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} \right) dV \\ - \int_V \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV - \int_{S_\Phi} \{\mathbf{u}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS\end{aligned}$$

Leddene $\frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$ i tøyningsenergien er utelatt siden dette er en konstant og uansett forsvinner når Π skal deriveres.

La $\{d\mathbf{u}\}$ representere en *infinitesimal tillatt endring* av forskyvningsfeltet $\{\mathbf{u}\}$ i likevektskonfigurasjonen C_D . Den nye konfigurasjonen, som er definert av forskyvningsfeltet $\{\mathbf{u} + d\mathbf{u}\}$, betegnes C_D^* .

Den potensielle energien i C_D^* er

$$\begin{aligned}\Pi^* = \int_V \left(\frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon} + d\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon} + d\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon} + d\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} \right) dV \\ - \int_V \{\mathbf{u} + d\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV - \int_{S_\Phi} \{\mathbf{u} + d\mathbf{u}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS\end{aligned}$$

Indre kinematisk kompatibilitet krever:

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\partial}] \{d\mathbf{u}\}$$

Stasjonær potensiell energi i 3D

La Π , se ligningen øverst på forrige side, være den potensielle energien i likevektskonfigurasjonen C_D . Endringen i potensiell energi i konfigurasjonen C_D^* relativt til C_D er $d\Pi = \Pi^* - \Pi$.

Utregnet:

$$d\Pi = \int_V \left(\{d\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{d\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} \right) dV \\ - \int_V \{d\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV - \int_{S_\Phi} \{d\mathbf{u}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS$$

Siden endringen i forskyvningsfeltet og dermed endringen i tøyingsfeltet er infinitesimal, er høyere ordens ledd av typen $\{d\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{d\boldsymbol{\varepsilon}\}$ neglisjert.

Stasjonær potensiell energi i likevektskonfigurasjonen C_D krever:

$$d\Pi = 0$$

Innføres elastisk materiallov $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\})$ fås:

$$\int \{d\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = \int \{d\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV + \int \{d\mathbf{u}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS$$

Settes $\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \{d\mathbf{u}\}$ og $\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \{d\boldsymbol{\varepsilon}\}$, er dette identisk med uttrykket på side 12-9.

$d\Pi = 0$ er en versjon av *prinsippet om virtuelt arbeid*

Merk: I motsetning til prinsippet om virtuelt arbeid, forutsetter prinsippet om minimum potensiell energi elastisk materialoppførsel.

Tilnærmet løsning med Rayleigh-Ritz

Problemdefinisjon:

Gitt et elastisk legeme med spesifiserte laster og randbetingelser. Bestem:

- Deformasjonene av legemet
- Spenningene i legemet
- Eventuelle andre responsstørrelser

Dette elastisitetsteoretiske problemet kan løses tilnærmet ved bruk av antatte forskyvningsfunksjoner og prinsippet om virtuelt arbeid, eventuelt prinsippet om stasjonær potensiell energi.

Tilnærmede forskyvningsfunksjoner for legemet velges som endelige rekker på formen (se også side 7-3):

$$u = \sum_{i=1}^l a_i f_i \quad , \quad v = \sum_{i=l+1}^m a_i f_i \quad , \quad w = \sum_{i=m+1}^n a_i f_i$$

hvor

- $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ og $w = w(x, y, z)$ representerer forskyvningstilstanden i legemet
- a_i er generaliserte frihetsgrader
- funksjonene i rekka, $f_i = f_i(x, y, z)$, må tilfredsstillе *kompatibilitetskrav* and *essensielle randbetingelser*. Som regel benyttes polynomer eller trigonometriske rekker

De ukjente i problemet er de n generaliserte frihetsgradene a_i , mens funksjonene f_i må velges som et ledd i løsningsprosedyren.

Rayleigh-Ritz basert på prinsippet om stasjonær potensiell energi

Beregning av de ukjente a_i ved bruk av prinsippet om stasjonær potensiell energi, se side 12-14 og 12-15:

1. Velg et tilnærmet forskyvningsfelt $\{\mathbf{u}\} = [u, v, w]^T$, hvor $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ og $w = w(x, y, z)$ diskretiseres som beskrevet på side 12-18.

2. Bestem tøyningfeltet ved bruk av kinematikklikningene: $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\partial}]\{\mathbf{u}\}$.

3. Regn ut legemets tøyningsenergi: $U = \int_V \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV$
(forutsatt at $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} = \{\mathbf{0}\}$; hvis ikke: se side 12-14)

4. Regn ut lastpotensialet:
$$\Omega = - \int_V \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV - \int_{S_\Phi} \{\mathbf{u}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS$$

5. Legemets potensielle energi: $\Pi = \Pi(a_i) = U + \Omega$

6. Prinsippet om stasjonær potensiell energi gir et system med n algebraiske ligninger som representerer likevektskonfigurasjonen:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

7. Løsning av ligningssystemet gir numerisk verdi til de n generaliserte frihetsgradene a_i og dermed er det tilnærmede forskyvningsfeltet $\{\mathbf{u}\} = [u, v, w]^T$ bestemt.

8. Derivasjon av $\{\mathbf{u}\}$ gir tøyning, og spenning beregnes ved bruk av materialloven: $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{E}][\boldsymbol{\partial}]\{\mathbf{u}\}$.

Rayleigh-Ritz basert på prinsippet om virtuelt arbeid

Beregning av de ukjente a_i ved bruk av prinsippet om virtuelt arbeid (VFP), se side 12-9:

1. Velg et tilnærmet forskyvningsfelt $\{\mathbf{u}\} = [u, v, w]^T$, hvor $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ og $w = w(x, y, z)$ diskretiseres som beskrevet på side 12-18.
2. I det virtuelle forskyvningsfeltet $\{\tilde{\mathbf{u}}\} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}]^T$ benyttes de samme formfunksjonene $f_i = f_i(x, y, z)$ som i forskyvningsfeltet $\{\mathbf{u}\}$. OBS: De virtuelle frihetsgradene betegnes \tilde{a}_i .
3. Virtuelle tøyninger bestemmes fra: $\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\partial]\{\tilde{\mathbf{u}}\}$
4. Aktuelle spenninger bestemmes fra:
$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{E}][\partial]\{\mathbf{u}\}$$
5. $\{\tilde{\mathbf{u}}\}$, $\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ og $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ settes inn i VFP:
$$\int \{\tilde{\mathbf{u}}\}^T \{\mathbf{F}\} dV + \int \{\tilde{\mathbf{u}}\}^T \{\boldsymbol{\Phi}\} dS - \int \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = 0$$
6. VFP gir en skalar ligning som er lineær i \tilde{a}_i . Omskrevet:
$$[g_1(a_i)]\tilde{a}_1 + [g_2(a_i)]\tilde{a}_2 + \dots + [g_n(a_i)]\tilde{a}_n = 0$$
7. I likevektstilstanden er det virtuelle arbeidet lik null for et vilkårlig virtuelt forskyvningsfelt, dvs. for vilkårlig \tilde{a}_i . Ergo må de n ligningene i parentesene $[\circ]$ alle være lik null:
$$g_1(a_i) = 0, \quad g_2(a_i) = 0, \quad \dots, \quad g_n(a_i) = 0$$
8. Dette ligningssystemet har n ligninger og n ukjente a_i . Etter løsning av systemet er det tilnærmede forskyvningsfeltet $\{\mathbf{u}\} = [u, v, w]^T$ bestemt. Deretter: $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ og $\{\boldsymbol{\sigma}\}$.

Egenskaper ved Rayleigh-Ritz – løsningen

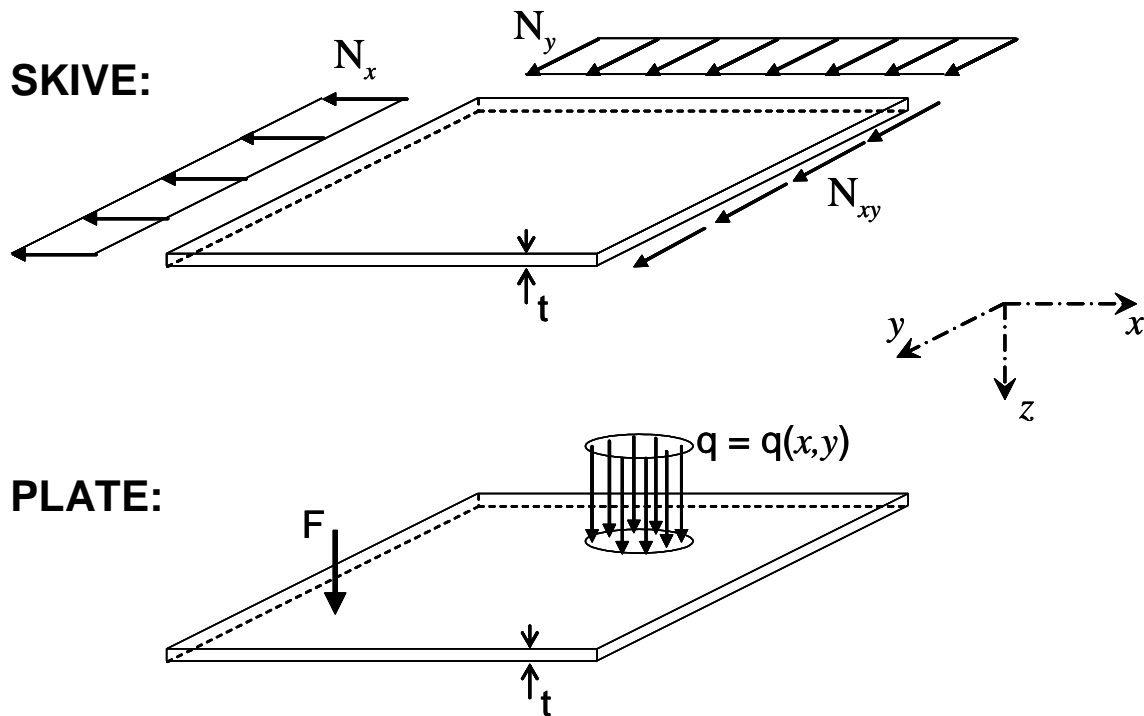
Bruk av Rayleigh-Ritz' metode for 2D- og 3D-legemer er i prinsippet som i 1D-problemer. En viktig forskjell er antallet forskyvningskomponenter (– som er lik antallet uavhengige variable):

- I 1D-problemer er det kun 1 forskyvningskomponent, eksempelvis $v(x)$ i bjelker og $u(x)$ i staver.
- I 2D-problemer kreves det generelt 2 uavhengige forskyvningskomponenter, eksempelvis $u(x,y)$ og $v(x,y)$.
- I et fullt 3D-problem må alle 3 forskyvningskomponenter tas i bruk, dvs $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ og $w(x,y,z)$.
- På tilsvarende vis øker kompleksiteten av prinsippene, dvs den potensielle energien (side 12-15) og det virtuelle arbeidet (side 12-9), som danner grunnlaget for den tilnærmede Rayleigh-Ritz – løsningen.

Egenskapene til Rayleigh-Ritz – løsningen for 2D- og 3D-problemer er som tidligere presentert på side 7-10. Viktig:

- En Rayleigh-Ritz – løsning kan baseres enten på prinsippet om stasjonær potensiell energi eller på VFP. Resultatet blir det samme.
- Funksjonene f_i må tilfredsstille essensielle randkrav.
- Forskyvningsfeltet representert ved funksjonene f_i bør være komplett for å sikre konvergens mot eksakt løsning: Alle ledd (unntatt de som faller bort pga essensielle randkrav) må være inkludert.
- Ved praktisk problemløsning (håndregning) benyttes det kun noen få, fortrinnsvis 1 eller 2, generaliserte frihetsgrader a_i .
- En Rayleigh-Ritz – løsning basert på et komplett sett av funksjoner f_i er enten eksakt eller (i middel) for stiv.

2D – problemer i elastisitetsteori: Skiver og plater

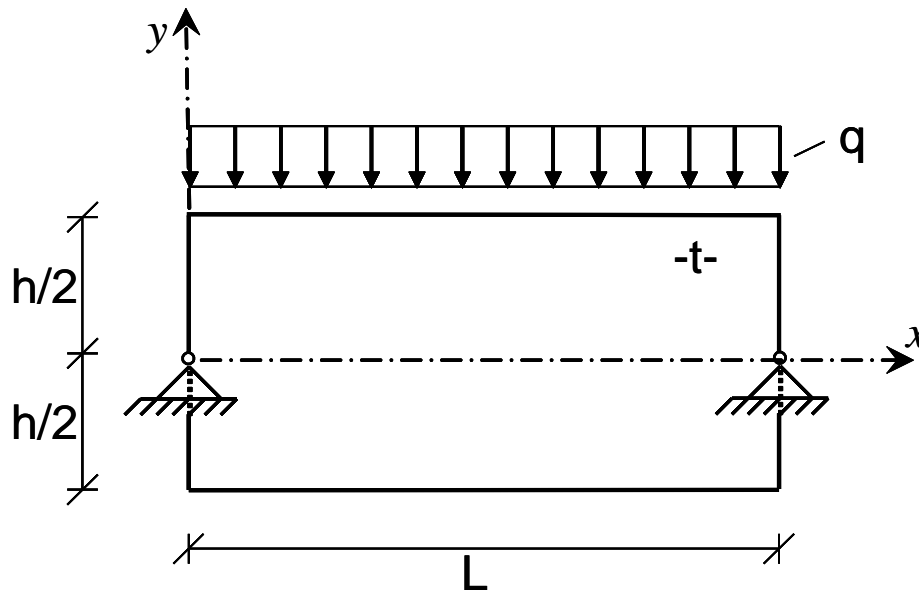


Både skiver og plater er plane 2D konstruksjonselementer som har betydelig utstrekning i to retninger, og liten dimensjon (tykkelse) i den tredje koordinatretningen.

	SKIVE	PLATE
Belastning	I skiveplanet	Normalt plateplanet
Relevante forskyvningskomponenter	$u(x, y)$ og $v(x, y)$	$w(x, y)$
Spenninger	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

Et **SKALL** er en kombinasjon av skive og plate. Et skall kan gjerne være krumt.

Eksempel 12.1: Rektangulær skive



En rektangulær skive har lengde L , høyde h og tykkelse t . Tykkelsen er liten sammenlignet med lengden og høyden, og det kan derfor forutsettes plan spenningstilstand. Skiven er fritt opplagt, se figuren, og den er belastet med en jevnt fordelt last q langs øvre rand.

Anta følgende forskyvningsfelt:

$$u = u(x, y) = a_1 \frac{y}{L} \cos \frac{\pi}{L} x$$

$$v = v(x, y) = a_2 \sin \frac{\pi}{L} x$$

Benytt Rayleigh-Ritz' metode til å bestemme a_1 og a_2 .

Skisser spenningene i skiven.

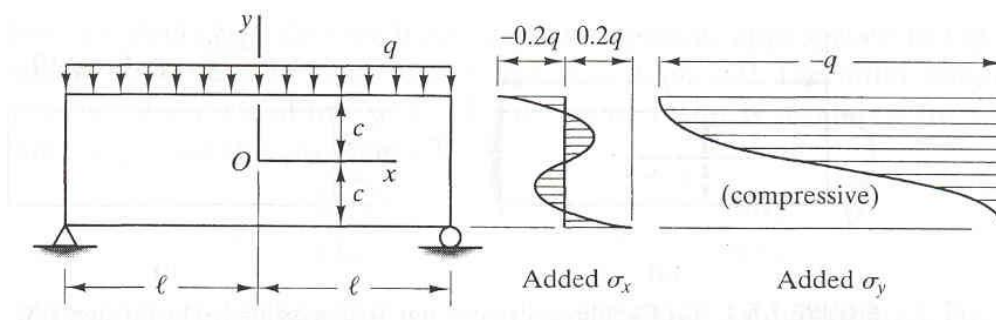
Er skiven i likevekt?

Fasit: $a_1 = \frac{4qL^4}{\pi^4 E' I'}$ og $a_2 = \frac{4qL^4}{\pi^5 E' I'} \left[1 + \frac{\pi^2 h^2}{6(1-\nu)L^2} \right]$ hvor $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ og $I' = \frac{1}{12} h^3$

Eksakt skiveløsning

Eksakte løsninger for skiveproblemer kan bestemmes hvis skiven har geometri, last og randbetingelser som enkelt lar seg beskrive matematisk. Ofte etableres løsningen ved bruk av Airys spenningsfunksjon. {Ikke pensum.}

Eksempel på eksakt løsning fra Cook & Young, side 203:



Løsning:

$$\sigma_x = \frac{3qy}{4c^3}(x^2 - \ell^2) + \left[\frac{qy}{c^3}(0.3c^2 - 0.5y^2) \right]$$

$$\sigma_y = 0 + \left[\frac{q}{4c^3}(y^3 - 3yc^2 - 2c^3) \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{3qx}{4c^3}(c^2 - y^2)$$

Leddene i hakeparentesene $[\circ]$ er den delen av løsningen som avviker fra elementær bjelketeori. Disse ekstra spenningene er skissert i høyre del av figuren ovenfor. Viktig:

- Skiveteorien har ingen forutsetning om Naviers hypotese, og σ_x er derfor ikke lineær over skivens høyde.
- Skiveteorien gir spenninger σ_y i tillegg til σ_x og τ_{xy} . Legg merke til at $\sigma_y = -q$ på øvre rand og $\sigma_y = 0$ på nedre rand.