

8

Kontinuumsmekanikk og elastisitetsteori

Innhold:

- Kontinuumsmekanikk
- Elastisitetsteori kontra klassisk fasthetslære

Litteratur:

- Cook & Young, "Advanced Mechanics of Materials", kap. 1.1 og 7.3
- Irgens, "Statikk", kap. 1
- Bell, "Konstruksjonsmekanikk – Del I Likevektslære", kap. 1
- Bell, "Konstruksjonsmekanikk – Del I Fasthetslære", kap. 1

Fasthetslære

Hittil i kurset (og i Mekanikk 1 + Mekanikk 2):

Alle utledninger og resultater er basert på elementær fasthetslære (engelsk: mechanics of materials)

I fasthetslæren idealiseres den virkelige oppførselen til systemet ved at det gjøres en del forenklinger og antagelser vedrørende spenningssituasjonen og/eller tøyingsfordeling.

Eksempler:

- Teknisk (lineær) bjelketeori
Naviers hypotese, dvs at tøyningene er lineære over høyden til tverrsnittet. OK for lange og slanke bjelker.
- St Venants torsjonsteori
Antar at det kun er skjærdeformasjoner, dvs ingen hvelving. OK for sirkulære tverrsnitt.
- Beholderteori
Antar at spenningene i tykkelsesretningen kan neglisjeres. OK for tynnveggede beholdere.

Typiske trinn i en fasthetslærebasert analyse:

1. Vurder geometrien i den deformerte komponenten
2. Hvilke tøyninger er relevante for aktuell deformert tilstand?
3. Bestem tilhørende spenninger (antar som regel Hookes lov)
4. Spenninger relateres til last (krefter, momenter, trykk etc)
5. Og dermed foreligger det en løsning som via trinnene forskyvning \Rightarrow tøyning \Rightarrow spenning \Rightarrow belastning gir en relasjon mellom last og deformasjon

Kontinuumsmekanikk

Kontinuumsmekanikken gir en formell og matematisk korrekt beskrivelse av materialoppførsel og -respons. Beskrivelsen er gyldig for faste stoffer (legemer), væsker og gasser.

Utgangspunktet er kontinuumshypotesen:

Stoffmengden forutsettes å være kontinuerlig fordelt i det rommet den opptar

Hypotesen resulterer dermed i at vi fokuserer på de makroskopiske egenskapene til stoffmengden. Vi går ikke ned på atom- og molekylnivå. Eventuelle bruddflater eller glideflater behandles som diskontinuiteter i materialet.

Et annet viktig utgangspunkt er at de kontinuumsmekaniske relasjonene skal være uavhengige av koordinatsystem. Matematisk håndteres dette med tensorer. Tensoralgebra er ikke pensum i TKT4124; vi velger oss et kartesisk koordinatsystem.

Det matematiske formelverket i kontinuumsmekanikk etableres ved å anvende fysiske lover på infinitesimale utsnitt av et stoff. I dette utsnittet skal det være:

- Likevekt
- Kompatibilitet (sammenheng mellom tøyninger og ytre deformasjon)
- Konservering av masse, energi, bevegelsesmengde og spinn (bevaringslovene skal mao. være tilfredsstillt)

Kontinuumsmekanikken tar utgangspunkt i en full tredimensjonal tilstand, og etablerer generelle uttrykk for spenning og tøyning. Så langt er betraktningen materialuavhengig. De spesifikke materialeegenskapene (faste stoffer av ulike slag, væsker, gasser) beskrives ved hjelp av en materiallov, også kalt konstitutiv ligning, for det aktuelle materialet.

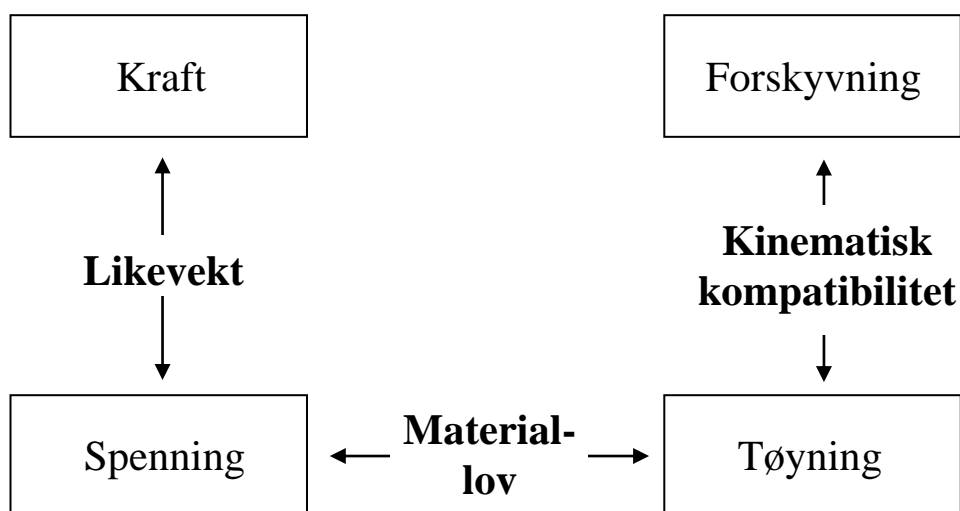
Kontinuumsmekanikk (forts.)

Kontinuumsmekanikken i et nøtteskall:

LIKEVEKT gir sammenheng mellom kraft (belastning) og spenninger. Behandles i kapittel 9.

KINEMATISK KOMPATIBILITET gir sammenheng mellom forskyvning (deformasjon) og tøyninger. Behandles i kapittel 10.

MATERIALLOV gir sammenheng mellom spenning og tøyning. Behandles i kapittel 11 (for elastiske materialer).



VIKTIG:

Likevekt og kinematisk kompatibilitet er fysisk, funderte ligninger med allmenn gyldighet.

Materialloven er en empirisk sammenheng som er basert på observasjoner. En materiallov kan gi en presis eller mindre nøyaktig beskrivelse av observert oppførsel.

Ulike materiallover

Hovedklasser av stoffer (aggregattilstander):

- **Faste stoffer**
Bestemt volum og bestemt form
- **Væsker**
Bestemt volum, men ingen bestemt form
- **Gasser**
Verken volum eller form er bestemt

En fellesbetegnelse for væsker og gasser er fluider. En karakteristisk egenskap for fluider er at de kun kan overføre normal-spenninger når de er i ro. I en skjærspenningstilstand vil et fluid få en kontinuerlig deformasjon. En eventuell motstand mot denne skjærdeformasjonen kalles viskositet.

De ulike egenskapene til faste stoffer, væsker og gasser leder til forskjellige materiallover for de tre aggregattilstandene.

For faste stoffer gir fysiske observasjoner grunnlag for en ytterligere inndeling, eksempelvis

- **Elastisitet**
Legemet gjenvinner sin opprinnelige geometri etter avlastning. De aller fleste materialer er elastiske ved små deformasjoner, og ofte er elastisiteten lineær.
- **Plastisitet**
Legemet får permanente deformasjoner etter avlastning.
- **Viskoelastisitet**
Tidsavhengig elastisitet, dvs at deformasjonen kommer gradvis etter pålastning. Typisk for polymerer.
- **Trykkavhengighet**
Mange materialer har forskjellige egenskaper i trykk og strekk, f.eks betong, jord, tegl og stein.

Kontinuumsmekanikk i TKT4124: Kun elastisitetsteori
Mer om de øvrige i TKT4135 Materialmekanikk

Elastisitetsteori

I klassisk elastisitetsteori forutsettes det at sammenhengen mellom spenning og tøyning er lineær og reversibel. Hvis materialet i tillegg er isotropt (samme egenskaper i alle retninger), vil den klassiske Hookes lov gi sammenhengen mellom spenning og tøyning. Her er det kun to uavhengige materialparametre, eksempelvis E og ν . For de fleste metaller kan den elastiske oppførselen med god nøyaktighet antas å være isotrop.

I anisotrope materialer kreves det mer enn to elastiske parametre. I tre er det eksempelvis ulik E -modul i fiberretningen og på tvers av fiberretningen.

Elastisitetsteorien kan i prinsippet gi en eksakt løsning for et vilkårlig problem i én, to eller tre dimensjoner. Likevekt og kinematisk kompatibilitet gir generelle sammenhenger (likninger) som knytter sammen hhv. krefter og spenning, og forskyvning og tøyning. Hookes lov (forutsatt isotropt materiale) gir den siste relasjonen mellom spenning og tøyning. Men det er mange ukjente størrelser inne i bildet, og komplisert geometri/randbetingelser umuliggjør ofte en analytisk løsning. Likevel kan mange tilfeller løses analytisk. Dessuten kan Rayleigh-Ritz' metode benyttes til å finne tilnærmede løsninger.

I dag brukes elementmetoden for de aller fleste praktiske problemer. Denne er basert på en kontinuumsmekanisk beskrivelse av oppførselen til legemet. I tillegg deles legemet opp i et antall elementer (diskretisering), som alle har egenskaper definert med kontinuumsmekanikk.