Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektroniske systemer

Løsningsforslag
TFE4120 Elektromagnetisme 15. august 2014

Oppgave 1

a) Vi velger oss en kuleflate som Gaussflate utenfor kulen (se øving 2). Dette gir at feltet utenfor kulen er $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$. Når Gaussflaten legges i en radius $r < a$ finner man at feltet er $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\frac{r}{a}\hat{\mathbf{r}}$.

b) Som i forrige oppgave legger vi en kuleflate som Gaussflate utenfor kuleskallet. Dette gir at feltet er null utenfor kulen siden den netto, symmetriske ladningsfordelingen er lik null. Dette kan intuitivt innsees fra en superposisjon av bidraget fra kulen og kuleskallet.

c) Superposisjonen av kulen og kuleflaten kan nå umulig gi $\mathbf{E} = 0$ overalt utenfor kuleskallet. Legg også merke til at symmetrien er brutt slik at integralet i Gauss' lov ikke kan forenkles som før.

d) Her får vi et ”omvendt” Faraday-bur. Er man utenfor det ledende kuleskallet vil man ikke kunne merke hva som skjer inne i skallet. Ladningen på kuleskallet vil øyeblikket kompensere for enhver endring av feltet inne pga. av forskyvningen av kulen. Feltet utenfor vil derfor være null. Dette kan også sees fra Laplace' likning: Man finner V utenfor kuleskallet vha. grensebetingelsen $V =$ konst. på kuleskallet og $V = 0$ i uendeligheten. Disse betingelsene er ikke avhengige av posisjonen til det som måtte befinne seg inne i kuleskallet. Dvs. man får samme V og $\mathbf{E}$ som i **b)**.

e) Fra forrige punkt ser vi at tross asymmtrien inne i kuleskallet, oppfører V og $\mathbf{E}$ seg på samme måte som i **b)**, dvs. de er kulesymmetriske utenfor kuleskallet. Dermed kan vi bruke Gauss' lov, hvilket betyr at $\mathbf{E}$ utenfor kuleskallet blir som for en punktladning Q plassert i origo. Kuleskallet får en negativ flateladning på innsiden (som totalt adderes opp til $-Q$), og en positiv flateladning på yttersiden (som adderes opp til $+Q$). Den negative flateladningen på innsiden blir størst nærmest kula (den blir fordelt på akkurat samme måte som i forrige deloppgave), mens den positive flateladningen på utsiden blir jevnt fordelt.

Oppgave 2

a) Bruk Amperes lov, se f.eks. øving 9. Svar:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{l}\hat{\mathbf{z}}. \tag{1}$$

b) Strømmen er fordelt tilnærmet på samme måte som i en tettviklet solenoide. Den totale strømmen som går rundt sylinderen i tilfellet med en tettviklet solenoide er NI, mens for røret er den $J_\mathrm{s}l$. Så feltet er

$$\mathbf{B} = \mu_0 J_\mathrm{s}\hat{\mathbf{z}}. \tag{2}$$

Røret er bare en "vikling", så selvinduktansen blir

$$L = \frac{\Phi}{J_\mathrm{s}l} = \frac{\mu_0 J_\mathrm{s}\pi a^2}{J_\mathrm{s}l} = \frac{\mu_0\pi a^2}{l}. \tag{3}$$

c) Resistansen blir

$$R = \frac{V}{I}, \tag{4}$$

der $I = J_\mathrm{s}l$ og V er potensialforskjellen over lengden $2\pi a$. Vi får

$$R = \frac{E2\pi a}{Jld} = \frac{E2\pi a}{\sigma Eld} = \frac{2\pi a}{\sigma ld} \tag{5}$$

d) Her bruker vi sammenhengen at summen av emf'ene er lik RI:

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI, \tag{6}$$

så

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}I, \tag{7}$$

der

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{\mu_0\pi a^2}{l}\frac{\sigma ld}{2\pi a} = \frac{\mu_0\sigma ad}{2} \approx 3.8\cdot 10^{-4}\mathrm{s}. \tag{8}$$

Diffligningen (7) har den generelle løsningen som angitt i oppgaven.

e) Strømmen blir

$$I = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{u}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}, \tag{9}$$

der $u = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ er hastigheten til magneten. Effekttapet blir

$$P = RI^2 = \frac{u^2}{R}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\right)^2. \tag{10}$$

Denne energien må tas fra den potensielle energien til magneten, mgz, der mg er tyngen. Dvs.

$$\frac{u^2}{R}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\right)^2 = mgu, \tag{11}$$

som gir

$$u = mgR\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\right)^{-2}. \tag{12}$$

f) Vi ser at magnetens hastighet er proporsjonal med R, så vi får mest oppbremsing når R er liten, dvs. σ er stor. Det er dermed om å gjøre at lederen har høy ledningsevne. Dette virker litt rart – man skulle kanskje tro at det er om å gjøre å ha stor R for å få mye tap. Poenget er at for å få stort tap må vi også ha stor strøm, og vi får større strøm i dette tilfellet når R er mindre. Til sammen vil disse to effektene gjøre at tapet minker med økende R.

Hvis vi øker ledningsevnen ytterligere, vil τ til slutt bli så stor at $I = e/R$ ikke lenger blir gyldig under bevegelsen. Da vil selvinduktansen få en betydning. I grensen ideell leder vil røret sette opp en strøm slik at fluksen alltid blir konstant, uansett hvor magneten befinner seg. Se på situasjonen der magneten faller ned fra $z = \infty$ mot røret. Siden fluksen til å begynne med er null, må den alltid være det. Når magneten er over røret, vil det gå en strøm som angitt på figuren, og feltet fra den strømmen vil bremse magneten. Hvis magneten kommer seg igjennom røret, vil kraften snu retning, slik at den vil øke magnetens hastighet. Til slutt (i $z = -\infty$) vil hastigheten til magneten være som om røret ikke hadde vært der.

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)				x
c)			x	
d)		x		
e)	x			