Løysingsforslag Kontinuasjonseksamen TFE4120 Elektromagnetisme 13. august 2004

Oppgåve 1

a)

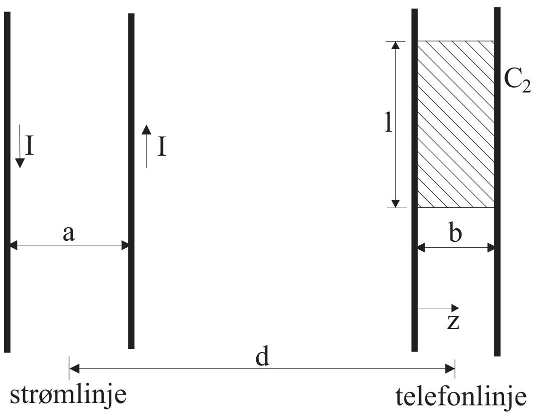

Figure 1: Ei telefonlinje som går parallelt med ei straumlinje. Det skraverte området er definert av kurva C_2.

Innbyrdes induktans er definert ved

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1, \tag{1}$$

der Φ_{12} er den magnetiske fluksen gjennom ei sløyfe C_2 som skuldast straumen I_1 gjennom ei sløyfe C_1. Vi ser på dei to linjene som to lukka sløyfer (last og generator i kvar sin ende). Ved å bruke Ampères lov, har vi at magnetfeltet i ein avstand r frå ein lang, tynn leiar som fører straumen I er gitt ved

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r H = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}, \tag{2}$$

som gjev at

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{3}$$

Magnetfeltet innanfor C_2 som skuldast straumlinja vil innehalde eit bidrag B_1 frå leiaren i posisjon $z_1 = -d - \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ og eit bidrag B_2 frå leiaren i posisjon

$z_2 = -d + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. Retninga på magnetfeltet er normalt på flata omkransa av C_2. Feltet i innanfor C_2 kan då uttrykkjast som

$$B(z) = B_1(z) + B_2(z) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right] \tag{4}$$

Den magnetiske fluksen indusert i C_2 av straumlinjene blir då

$$\Phi_{12} = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = l \int_0^b B(z)\mathrm{d}z = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \int_0^b \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right) \tag{5}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{b - z_1}{-z_1}\right) - \ln\left(\frac{b - z_2}{-z_2}\right)\right], \tag{6}$$

som gjev

$$\underline{\underline{L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{b - z_1}{-z_1}\right) - \ln\left(\frac{b - z_2}{-z_2}\right)\right]}} \tag{7}$$

b)

Faradays lov gir

$$\mathrm{emf} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}, \tag{8}$$

der emf er den induserte elektromotoriske spenninga som vert indusert i telefonleidninga på grunn av straumen i kraftleidninga. Straumen i kraftleidinga kan skrivast $I(t) = I_m \cos(2\pi f t)$ og ved hjelp av uttrykka ovanfor får vi såleis

$$\mathrm{emf} = \mu_0 I_m f \sin(2\pi f t) l \left[\ln\left(\frac{b - z_1}{-z_1}\right) - \ln\left(\frac{b - z_2}{-z_2}\right)\right] \tag{9}$$

Amplituden vert då

$$\underline{\underline{e = \left|\mu_0 I_m f l \left[\ln\left(\frac{b - z_1}{-z_1}\right) - \ln\left(\frac{b - z_2}{-z_2}\right)\right]\right|}}. \tag{10}$$

Ved å setje inn oppgitte verdiar [$f = 50\mathrm{Hz}$, $I_m = 150\mathrm{A}$, $l = 500\mathrm{m}$, $d = 10\mathrm{m}$, $a = 100\mathrm{cm}$, og $b = 10\mathrm{cm}$] får ein

$$\underline{\underline{e = \left|4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 150 \cdot 50 \cdot 500 \left[\ln\frac{10.55}{10.45} - \ln\frac{9.55}{9.45}\right]\right| = 4.72\mathrm{mV}}} \tag{11}$$

c)

Dersom ein tvinnar kabelen vil ein få mange "sløyfer" som motverkar kvarandre. Dette er fordi flatenormalen til ei sløyfe står i motsett retning av flatenormalen til nabosløyfa og gjer at den induserte spenninga i ei sløyfe har motsett forteikn i forhold til nabosløyfa.

Oppgåve 2

a)

Med $\mu_r = \infty$, kan vi gå ut i frå at fluksen følgjer toroiden. Vi går ut i frå at flukslinjene ikkje vert spreidde i luftgapet og at $\vec{B}$-feltet er tilnærma uniformt over tverrsnittet slik at fluksen blir $\Phi = B\pi b^2$.
Når vi brukar Ampères lov på ei lukka integransjonskurve langs feltlinjene (rundt den magnetiske krinsen), får vi berre bidrag frå luftgapet sidan $H = \Phi/(\mu_r \mu_0 \pi b^2) = 0$ i materialet når $\mu_r = \infty$. Vi får dermed

$$N_1 I_1 = \oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\Phi}{\mu_0 \pi b^2} g. \tag{12}$$

Dette gjev:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \pi b^2 N_1 I_1}{g}. \tag{13}$$

Sjølvinduktansen vert då:

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi b^2 N_1^2}{g}. \tag{14}$$

b)

Total magnetisk energi finn ein ved å integrere energitettleiken $w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$ overalt der $\vec{B}$ og $\vec{H}$ eksisterar, dvs i luftgapet:

$$W_m = \int_v \frac{B^2}{2\mu_0} \mathrm{d}v = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 (\pi b^2)^2} g \pi b^2 = \frac{\mu_0 \pi b^2 N_1^2 I_1^2}{2g} \tag{15}$$

Vi ser direkte at dette er lik $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$

c)

Vi har at $\textbf{emf} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt}$ og at $\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$.
Rotasjonsbevegelsen til sløyfa kan beskrivast med $\sin \omega t$. Uttrykket for fluksen kan dermed skrivast

$$\Phi_{12}(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}(t) = \pi a^2 B \sin(\omega t). \tag{16}$$

Den induserte elektromotoriske spenninga i den roterande sløyfa, vert då som funksjon av tida:

$$\textbf{emf}(t) = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\pi\omega a^2 B \cos(\omega t) = -\frac{\pi\mu_0\omega a^2}{g} N_1 I_1 \cos(\omega t) \tag{17}$$

d)

Når $R_2 < \infty$ vil det gå ein vekselstraum i sløyfa. Dette fører til at sjølvinduktansen L_2 vil setje opp ei spenning som vil påverke straumen i kretsen. Denne ekstra spenninga er gitt av uttrykket

$$\textbf{emf}_{\text{self}} = -L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} \tag{18}$$

e)

Vi set opp uttrykket vha ohms lov.

$$\sum \textbf{emf} = RI \tag{19}$$

Dette gjev oss ei førsteordens diffenrensiallikning.

$$-\frac{\pi\mu_0\omega a^2}{g} N_1 I_1 \cos(\omega t) = R \cdot I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} \tag{20}$$

For å finne løysinga kan ein gå fram på fleire måtar:

- Løyse differensiallikninga direkte (partikulærløysing).
- Løyse den med visarmetode i frekvensplanet.
- Bruke Laplace-transform for å løyse differensiallikninga.

Dersom ein nyttar visarmetode mistar ein transientleddet som oppstår når røyrsla av den plane spolen startar. Ved bruk av visarmetoden får ein følgjande uttrykk:

$$-\frac{\pi\mu_0\omega a^2}{g}N_1I_1 = R\hat{I}_2 + j\omega L_2\hat{I}_2 \tag{21}$$

$$\hat{I}_2 = -\frac{\pi\mu_0\omega a^2 N_1 I_1}{g(j\omega L_2 + R)} \tag{22}$$

$$I_2(t) = -\frac{\pi\mu_0\omega a^2 N_1 I_1}{g\sqrt{R^2 + L_2^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \arctan(\frac{L_2\omega}{R})\right) \tag{23}$$

Dersom vi løysar difflikninga direkte får vi to ledd. Eit transientledd som stammar frå homogenløysinga, og eit "steady-state"–ledd som stammar frå partikulærløysinga.

$$\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L_2}I_2 = -\frac{\pi\mu_0\omega a^2}{g}\frac{N_1I_1}{L_2}\cos(\omega t) \tag{24}$$

Løysinga på denne differensiallikniga kan ein få ved å bruke at den generelle løysinga av ei inhomogen førsteordens differensiallikning, $y' - p(t)y = r(t)$, er gitt ved

$$y(t) = e^{-h}\left[\int e^h r\mathrm{d}\tau + c\right], \quad h = \int p(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{25}$$

Når vi set inn dei ovanståande faktorane får vi

$$I_2(t) = -e^{-\frac{R}{L_2}t}\left[\frac{C_0}{L_2}\int e^{\frac{R}{L_2}\tau}\cos(\omega\tau)\mathrm{d}\tau + c\right], \quad C_0 = \frac{\pi\mu_0\omega N_1 I_1}{g} \tag{26}$$

Integrasjon gjev

$$I_2(t) = -ce^{-\frac{R}{L_2}t} - \frac{\pi\mu_0\omega a^2 N_1 I_1}{g\sqrt{R^2 + \omega^2 L_2^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\frac{\omega L_2}{R}\right). \tag{27}$$

"Lenge" vil i dette tilfellet vere så lang tid som krevast for at transientleddet er lite i forhold til stasjonærleddet. Dette er gitt ved tidskonstanten $\tau_0 = L_2/R$. Altså må $t \gg \tau_0$

f)

Brukar frå formelarket:

$$\vec{m} = I\vec{S} \tag{28}$$

$$\vec{M}_F = \vec{m} \times \vec{B} \tag{29}$$

På grunn av at sløyfa roterer får vi at

$$\vec{m} = \pi a^2 I_2(\sin(\omega t)\vec{u_x} + \cos(\omega t)\vec{u_y}), \tag{30}$$

og at B-feltet er gitt av

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{g}\vec{u_x} \tag{31}$$

Dette gir

$$\vec{M_F} = \vec{m}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \pi a^2 I_2 \sin(\omega t) & \pi a^2 I_2 \cos(\omega t) & 0 \\ \frac{\mu_0 N_1 I_1}{g} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\pi\mu_0 a^2}{g} I_1 I_2 N_1 \cos(\omega t)\vec{u}_z \tag{32}$$

der I_2 er gitt av (27), evt. (23) når røyrsla har pågått ei stund.

Oppgåve 3

a)

Coulombs lov:

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} = \vec{F}/q. \tag{33}$$

Dette gjev:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r. \tag{34}$$

For potensialet nyttar vi definisjonen og brukar eit punkt uendeleg langt borte som referanse:

$$V = \int_r^{\text{referanse}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_r^\infty \frac{1}{r'^2}dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \tag{35}$$

b)

Vi brukar Gauss lov med $\vec{D}$-feltet

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri}} \tag{36}$$

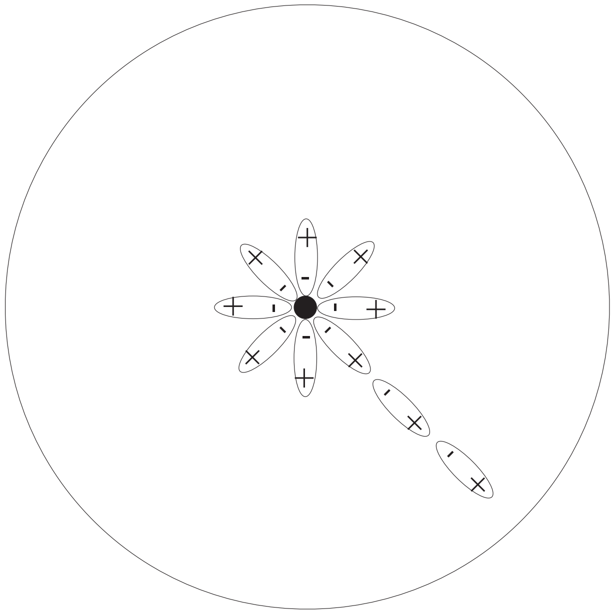

Figure 2: Dipolar i kule med ladning Q i senter og $\varepsilon = \infty$

Ettersom vi her kan nytte kulesymmetri, kan $\vec{D}$-feltet skrivast

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{u_r}, \qquad 0 < r < \infty \tag{37}$$

For å sjå på $\vec{E}$-feltet nyttar vi at $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. Dette gir då

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r & r > a \end{cases} \tag{38}$$

Dipolane skjermar ladninga inne i kula slik som i figuren. Dette gjer at $\vec{E} = 0$ inne i kula. Utanfor kula får vi eit elektrisk felt pga den bundne, positive flateladninga på kuleskalet $r = a$.

c)

- Høgre side er ikkje ein vektor.
- Dimensjonsfeil ($\vec{B} = \mu\vec{H}$), $\vec{J}$ er i Ampere/m^2.
- $\oint_C \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ gjev inga meining.

Oppgåve 4

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)		x		
b)	x			
c)		x		
d)		x		