

# Løsningsforslag

## SIE4010 Elektromagnetisme 5. mai 2003

### Oppgave 1

- a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være radielt rettet og uavhengig av  $\phi$ ,  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ . Vi lar  $S$  være overflaten til en sylinder med radius  $r$  og lengde  $l$ . Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi  $Q'$ . Gauss' lov gir:

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r l \epsilon E(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \quad (1)$$

dvs

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (2)$$

Vi finner  $Q'$  ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r) dr = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}. \quad (3)$$

Altså får vi

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (4)$$

Innsatt i (2) gir dette

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \begin{cases} \frac{V_0}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{u}_r, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (5)$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform,  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ , eller Poissons likning  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$  til å finne  $\vec{E}$ . Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at  $\rho = 0$  i det dielektriske mediet mellom lederne.

- b) Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (6)$$

- c) Den lagrede elektrostatiske energien per lengdeenhet,  $W_e$ , av kabelen er gitt ved

$$W_e = \frac{1}{2} C' V^2. \quad (7)$$

Ved å sette inn uttrykket for  $C'$  som ble funnet i b) og bruke at  $V = V_0$ , får vi

$$W_e = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} V_0^2. \quad (8)$$

Dette resultatet kan også finnes ved å integrere energitettheten  $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$  over tverrsnittet av kabelen, i rommet mellom lederne.

- d) Av symmetrigrunner må  $\vec{H}$  og  $\vec{B}$  kun ha en  $\phi$ -komponent og kun være avhengig av  $r$ , dvs.  $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\phi$ . ( $\vec{B}$  kan ikke ha en radiell komponent fordi fluksen ut av en lukket flate (f.eks. en sylinderflate) er alltid null.) Ampères lov anvendt på en sirkulær integrasjonssløyfe med sentrum i midten av koaksialkabelen gir:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H2\pi r = \begin{cases} I, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (9)$$

Husk at strømmen skulle antas å gå på overflaten av innerlederen og på den indre overflaten av ytterlederen. Vi får:

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\phi = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi r}\vec{u}_\phi, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (10)$$

- e) Selvinduktansen er definert ved

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (11)$$

Dersom det går en konstant strøm i kabelen, må den være lukket i begge ender (kilde og last), og  $\Phi$  er fluksen som går igjennom denne lukkede sløyfa. Hvis vi antar at kabelens lengde er  $l$ , får vi

$$\Phi = l \int_a^b B dr = \frac{\mu l I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu l I \ln \frac{b}{a}}{2\pi}, \quad (12)$$

og dermed en induktans per lengdeenhet

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{lI} = \frac{\mu \ln \frac{b}{a}}{2\pi} \quad (13)$$

- f) Siden lederne antas å være ideelle, må det elektriske feltet være null inne i lederne. Potensialet på den ytre flaten av ytterlederen er null (slik det også er i uendeligheten), og følgelig må potensialet overalt utenfor også være null.

Evt. kan dette vises matematisk på følgende måte: La  $c$  være den ytre radius til koaksialkabelen. Vi må løse det elektrostatiske problemet (finne  $V$ ) for  $r > c$ . Laplace' likning i sylinderkoordinater gir:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad (14)$$

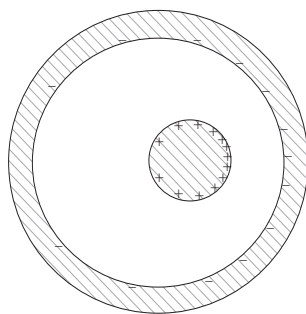
siden potensialet må være uavhengig av  $z$  og  $\phi$ . Vi får altså

$$\frac{dV}{dr} = \frac{k}{r}, \quad \text{og dermed } V = k \ln r + k' \quad (15)$$

der  $k$  og  $k'$  er en konstanter. Potensialet skal være null både for  $r = \infty$  og for  $r = c$ , så  $k' = k = 0$ . Vi får altså  $V = 0$  for  $r > c$ . Dette kunne vi forsåvidt sagt med en gang, for så lenge vi bare er interessert i potensialet utenfor kabelen, blir dette samme problem å løse som om det hadde vært ladningsfritt vakuum overalt.

Altså: I områdene I, III og IV er det elektriske feltet null.

Ladningene blir fordelt slik at det elektriske feltet blir null i lederne. Viktige moment: All ladning på overflaten. Mest ladning "til høyre". Se figur (skissen gjelder dersom  $V_0 > 0$ ).



## Oppgave 2

- a) Siden  $\mu_r \gg 1$ , kan vi anta at fluksen følger toroiden. Videre antar vi at flukslinjene ikke spres i luftgapet siden  $g \ll b$ . Siden toroiden er tynn antar vi at  $\vec{B}$ -feltet er tilnærmet uniformt over tverrsnittet slik at fluksen blir  $\Phi = B\pi b^2$ .

Amperes lov anvendt på den stiplede integrasjonskurven i sentrum av toroiden gir:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\Phi}{\mu_r \mu_0 \pi b^2} (2\pi a - g) + \frac{\Phi}{\mu_0 \pi b^2} g = N_1 I_1, \quad (16)$$

dvs.

$$\Phi = \frac{\mu_0 \pi b^2 N_1 I_1}{(2\pi a - g)/\mu_r + g} \approx \frac{\mu_0 \pi b^2 N_1 I_1}{2\pi a/\mu_r + g}. \quad (17)$$

Tilnærmelsen gjelder siden luftgapet er lite ( $g \ll b$ ).

Selvinduktans:

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi b^2 N_1^2}{(2\pi a - g)/\mu_r + g} \approx \frac{\mu_0 \pi b^2 N_1^2}{2\pi a/\mu_r + g}. \quad (18)$$

Merk at fluksgjennomstrømningen i spolen er  $N_1 \Phi$  siden det er  $N_1$  tørn.

- b) Generelt uttrykk for energitetthet i et magnetisk felt:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}, \quad (19)$$

evt.

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (20)$$

for et lineært medium. Total magnetisk energi:

$$W_m = \int_{\text{magnetisk materiale}} \frac{B^2}{2\mu_r \mu_0} dv + \int_{\text{luftgap}} \frac{B^2}{2\mu_0} dv. \quad (21)$$

Når vi setter  $\mu_r = \infty$  får vi fra (17) at  $B = \mu_0 N_1 I_1 / g$ . Det første leddet i (21) blir derfor null, og vi blir stående igjen med

$$W_m = \frac{\mu_0 N_1^2 I_1^2}{2g^2} g \pi b^2 = \frac{\mu_0 \pi b^2 N_1^2 I_1^2}{2g}. \quad (22)$$

Vi ser direkte at dette er lik  $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$  når vi setter  $\mu_r = \infty$  i uttrykket for  $L_1$ .

- c) Siden strømmen antas å være konstant, finnes kraften vha.  $\vec{F} = \nabla W_m$ . Kraften som virker i positiv “g”-retning er derfor gitt ved

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial g} = -\frac{\mu_0 \pi b^2 N_1^2 I_1^2}{2g^2}. \quad (23)$$

Fortegnet viser at det virker en kraft  $\mu_0 \pi b^2 N_1^2 I_1^2 / (2g^2)$  i negativ “g”-retning, dvs. den prøver å redusere luftgapet. Uttrykket viser at retningen er uavhengig av fortegnet på  $I_1$ .

- d) Det er to viklinger i spole 2, så vi får:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{2\Phi}{I_1} = \frac{2\mu_0 \pi b^2 N_1}{g}. \quad (24)$$

- e) Når  $I_1$  øker, øker også fluksen  $\Phi$  gjennom toroiden. Det induseres en spenning i sekundærspolen som prøver å motvirke denne endringen. Ut fra figuren ser vi at de to spolene er vindet samme vei rundt jernkjernen. Spenningen utlest på voltmeteret blir derfor negativ.

### Oppgave 3

- a) Siden ledningen er kuttet av, kan det ikke gå en konstant strøm i det uendelige. I et begrenset tidsrom, derimot, kan det gå en strøm; i så fall øker (minker) ladningen i høyre (venstre) endepunkt. Vi kan ikke lenger bruke Amperes lov på samme måte som før, fordi vi har to tidsavhengige ladninger. Dette gir opphav til et tidsavhengig  $\vec{D}$ -felt, som igjen betyr en forskyvingsstrøm. I oppgaven burde det ha vært angitt at observasjonspunktet er så nær lederen at vi kan se bort fra at feltene bruker en viss tid på å forplante seg dit. Når vi ikke er interessert i den transiente fasen, kan en metode for å finne  $\vec{H}$  i punktet  $P$  være som følger:

Anta en endepunktladning  $Q$  til høyre, og  $-Q$  til venstre. Disse er relatert til strømmen ved  $I = dQ/dt$ . Finn  $\vec{D}$ -feltet langs  $r$ -aksen på figuren pga. de to ende-punktladningene ved hjelp av Gauss’ lov (evt. Coulombs lov) og superposisjon. Regn ut forskyvningsstrømtettheten  $\partial \vec{D} / \partial t$  og uttrykk svaret ved  $I$ . Bruk så den generaliserte Amperes lov:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (25)$$

der  $C$  er en sirkel med ledningen som akse og som går igjennom  $P$ . Det siste leddet er forskyvningsstrømtettheten integrert over disken som er begrenset av integrasjons-sirkelen.

Ut fra figuren ser vi at  $\vec{D}$  blir rettet mot venstre. Siden forskyvningen  $|\vec{D}|$  er økende er det klart at forskyvningsstrømmen også blir rettet mot venstre, dvs. motsatt retning av  $I$ .  $H_\phi$  blir derfor mindre enn for en uendelig lang ledning.

## Oppgave 4

Noen kommentarer: c) kan løses f.eks. ved å se på relasjonene  $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  eller  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Løsningen på d) er at  $\vec{E}$ -feltet skjerms av polariseringsladningene, og at  $\vec{B}$  forsterkes av materialdipolene. På e), regn ut div og curl til  $\vec{E}$ . Siden curlen blir forskjellig fra null, må vi ha et tidsavhengig  $\vec{B}$ -felt. Divergensen blir null, dvs. vi har ladningsfritt rom (siden materialet er lineært, er  $\rho = \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E}$ ). (Oppgaven kunne vært formulert litt mer presist: Konstanten  $a$  kan ikke være konstant i et uendelig tidsintervall, for da ville  $|\vec{B}|$  blitt uendelig. Dette er altså ikke elektrostatikk). På f), bruk f.eks. uttrykket for  $C$  til en parallelplatekondensator ( $C = \epsilon S/d$ ) til å vise at  $C$  øker når  $d$  minker. Siden  $C = Q/V$ , er det derfor klart at  $V$  minker (ladningen kan ikke endres når terminalene er åpne).

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)				x
c)		x		
d)		x		
e)		x		
f)				x
g)	x			