

Faglærer:
Johannes Skaar

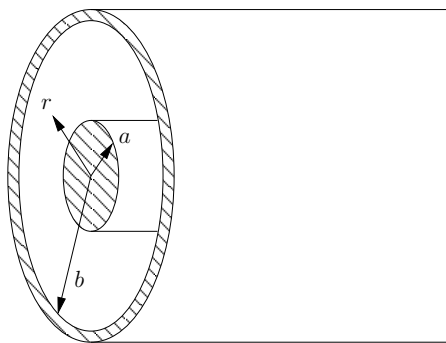
EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Fredag 27. mai 2016

Oppgave 1

En koaksialkabel består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b , se fig. 1. Anta at lederne er ideelle og at kabelen er netto uladet. Kabelens lengde er mye større enn b , og vi ser bort fra effekter nær endene.

- Potensialet på innerlederen holdes konstant lik V_0 , mens potensialet på ytterlederen er $V = 0$. Mellom lederne befinner det seg luft med permittivitet ϵ_0 . Finn det elektriske feltet \mathbf{E} overalt.
- Finn potensialet overalt.
- Finn kapasitansen per lengdeenhet.
- Sett opp uttrykket for lagret elektrostatisk energi per volumenhet, og bruk det til å finne den lagrede elektrostatiske energien per lengdeenhet av kabelen. Kan du kontrollere svaret ved å regne det ut på en annen måte?



Figur 1: Koaksialkabel.

- e) Vi kobler nå kabelen fra spenningskilden, så det ikke kan gå noen strøm til eller fra inner- og ytterlederen. Mellom lederne settes det inn et rent dielektrisk medium der permittiviteten ϵ er en funksjon av r , dvs. $\epsilon = \epsilon(r)$. Hva blir det elektriske feltet nå, uttrykt med denne funksjonen?
- f) Vi kobler kabelen til spenningskilden igjen, slik at innerlederens potensial er V_0 og ytterlederens er $V = 0$. Vi lar

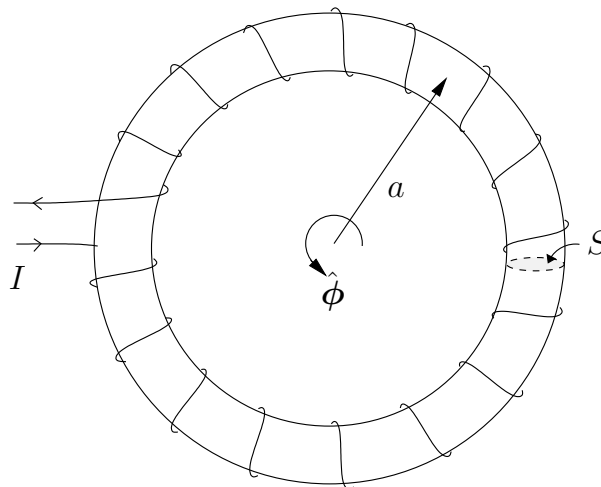
$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_0, & \text{for } a < r \leq a + d \\ 10\epsilon_0, & \text{for } a + d < r < b \end{cases}$$

Vis at det elektriske feltet mellom lederne blir

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{10V_0}{r(10 \ln \frac{a+d}{a} + \ln \frac{b}{a+d})} \hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r \leq a + d \\ \frac{V_0}{r(10 \ln \frac{a+d}{a} + \ln \frac{b}{a+d})} \hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a + d < r < b. \end{cases}$$

Hva kan skje dersom det er et lite luftgap i isolatoren til en kabel som er tilkoblet høy spenning? Grunngi svaret.

Oppgave 2



Figur 2: En tettviklet toroide med N jevnt fordelte viklinger. Toroiden er tynn og har tverrsnittsareal S .

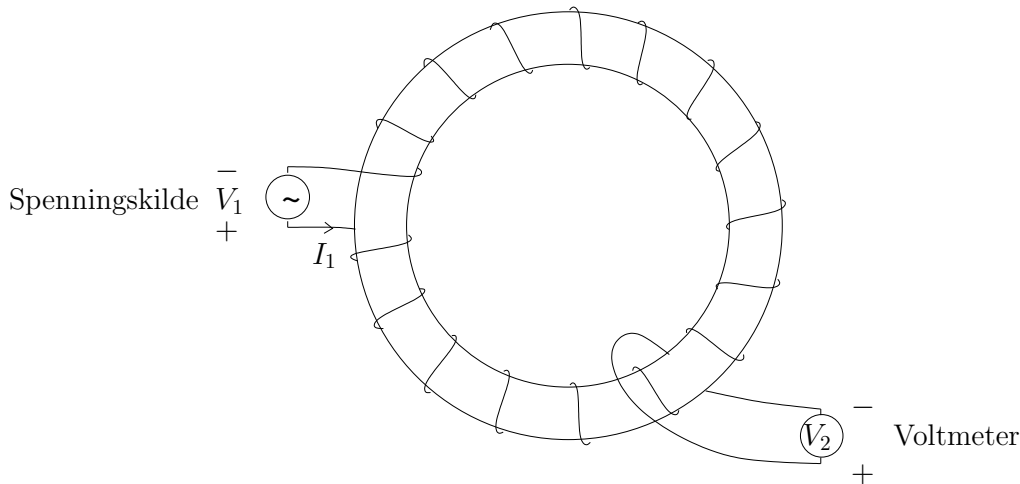
- a) Gitt en toroide med N viklinger som fører strømmen I , se fig. 2. Viklingene er tett og jevnt fordelt rundt toroiden. Toroiden kan i hele oppgaven antas å være tynn, slik at feltet er uniformt over tverrsnittsarealet S . Finn \mathbf{H} i toroiden.
- b) Dersom materialet i kjernen er lineært, isotropt og homogent, hva blir selv-induktansen? Svaret skal uttrykkes ved en parameter som karakteriserer mediet (og som kan finnes i tabeller over materialer).

- c) Dersom materialet i kjernen nå i stedet har en konstant, permanent magnetisering $\mathbf{M} = M\hat{\phi}$ (uavhengig av feltet), finn \mathbf{B} i toroiden. Finn også selvinduktansen dersom den defineres som $L = d\Phi/dI$, der Φ er den totale fluksen.
- d) Vi bytter tilbake til et lineært, isotropt og homogent medium i kjernen. Videre vikles det en spole til rundt toroiden (spole 2), men bare en vikling, se fig. 3. Spole 2 kobles til et voltmeter med uendelig resistans. Den første spolen (spole 1) kobles til en spenningskilde slik at den får strømmen

$$I_1 = I_0 \cos(\omega t).$$

Finn den induserte elektromotoriske spenningen i spole 2.

- e) I forrige deloppgave, hvis vi antar at spole 1 har null resistans, hva må spenningen til kilden være?



Figur 3: Det vikles en spole til rundt toroiden, med en enkelt vikling.

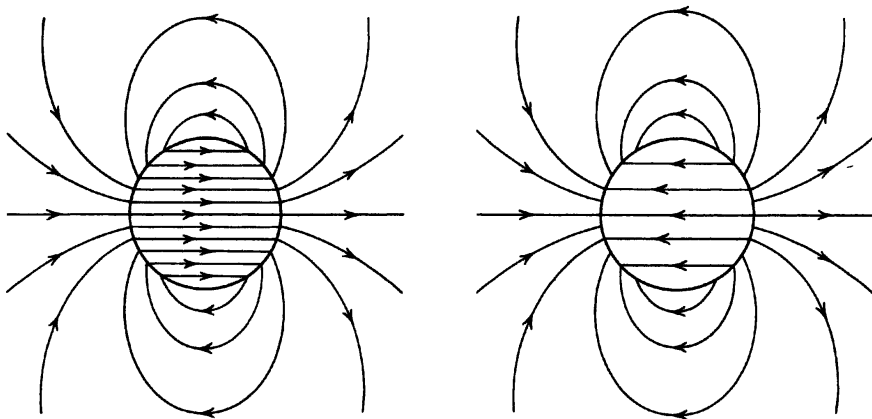
Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.

Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, -1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

- a) To like punktladninger befinner seg en avstand fra hverandre. Det finnes ingen andre kilder til elektriske felter. Vi ser på det elektriske feltet \mathbf{E} , og potensialet V med uendelig som referanse, i et observasjonspunkt som er midt mellom ladningene. Hva er da rett?
- $\mathbf{E} = 0$ og $V = 0$.
 - $\mathbf{E} \neq 0$ og $V = 0$.

- iii) $\mathbf{E} = 0$ og $V \neq 0$.
 iv) $\mathbf{E} \neq 0$ og $V \neq 0$.
- b) En av lovene i elektromagnetisme er $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Hva kan du si om denne loven?
- Den heter Ampere-Maxwells lov.
 - Den inneholder et ledd som kalles forskyvingsstrømtetthet.
 - Den kan brukes til å finne det magnetiske feltet utenfor en høyspentlinje.
 - Alle alternativene ovenfor.
- c) En kule med et ukjent materiale gir opphav til magnetiske felter, se fig. 4. De to figurene viser den samme situasjonen, bare to ulike felter. I alternativene nedenfor er \mathbf{A} vektorpotensialet. Hva er rett?
- Den venstre viser \mathbf{A} og den høyre \mathbf{B} .
 - Den venstre viser \mathbf{B} og den høyre \mathbf{A} .
 - Den venstre viser \mathbf{B} og den høyre \mathbf{H} .
 - Den venstre viser \mathbf{H} og den høyre \mathbf{B} .
- d) I forrige deloppgave, hva kan du si om kula? Anta at det er vakuum overalt rundt kula.
- Materialet har høy permeabilitet μ .
 - Materialet har lav permeabilitet μ .
 - Materialet har permanent magnetisering mot høyre.
 - Materialet har permanent magnetisering mot venstre.



Figur 4: To skisser av felter.

- e) På Internett finner du en oppgave i elektrostatikk, laget av en professor ved det nye Universitetet i Snåsa. Oppgaven lyder som følger: “En ideell lederdisk med radius a har konstant flateladningstetthet ρ_s . Finn det elektriske feltet på akse til disken.” Hva burde du fortelle professoren?
- i) En disk med konstant flateladningstetthet kan ikke ha konstant potensial, slik en leder må ha.
 - ii) Oppgaven er uløselig fordi det mangler nødvendig informasjon.
 - iii) Dette er en standard oppgave i elektrostatikk, som kan løses f.eks. ved å bruke symmetri og Coulombs lov.
 - iv) Oppgaven er grei nok, men veldig kjedelig. Stakkars studenter.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2} \hat{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \quad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e), \quad C = Q/V, \quad C = \epsilon S/d, \quad W_e = \frac{1}{2} CV^2, \quad w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \quad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad P_J = \int_v \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv,$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \quad d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \quad L = \frac{\Phi}{I}, \quad W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} I_j I_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_m)_{\text{uten kilder eller tap}}, \quad \mathbf{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c) dv'}{R}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c) dv'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}, \quad \mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n} = \rho_s \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t} = \mathbf{J}_s \times \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}.$$

Konstanter:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\text{Lyshastighet i vakuum: } c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299792458 \text{ m/s} \approx 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Lyshastighet i et medium: } c = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\text{Elementærladningen: } e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Elektronets hvilemasse: } m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{Standard tyngdeakselerasjon: } g = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Gravitasjonskonstant: } \gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Differensielle vektoridentiteter:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \quad (x \text{ vilkårlig akse}) \\ \nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W \\ \nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V \\ \nabla f(V) &= f'(V)\nabla V \\ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ &\quad + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \\ \nabla \cdot (V\mathbf{A}) &= V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \times (V\mathbf{A}) &= (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla V) &= \nabla^2 V \\ \nabla \times (\nabla V) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

Integralidentiteter:

$$\begin{aligned} \int_v \nabla V dv &= \oint_S V d\mathbf{S} \\ \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv &= \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Divergensteoremet}) \\ \int_v \nabla \times \mathbf{A} dv &= \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \\ \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Stokes' teorem}) \end{aligned}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \\ &\quad + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= (\nabla^2 A_x) \hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y) \hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\ &\quad + \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \frac{\hat{\theta}}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{\hat{\phi}}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.:

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				