Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Faglærer:
Johannes Skaar

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Lørdag 25. mai 2013

Oppgave 1

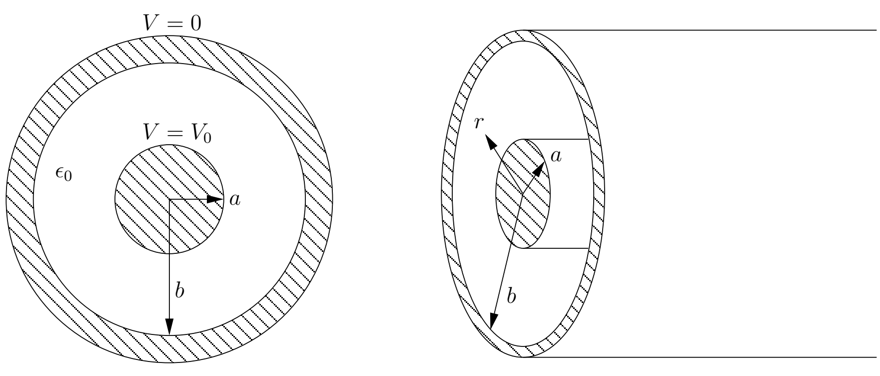
En koaksialkabel består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b, se fig. 1. Anta at lederne er ideelle og at kabelen er netto uladet. I hele oppgaven holdes potensialet på innerlederen konstant lik V_0, mens potensialet på ytterlederen er $V = 0$. Kabelens lengde er mye større enn b.

a) Mellom lederne befinner det seg luft, med permittivitet $\epsilon = \epsilon_0$. Finn det elektriske feltet **E** overalt.

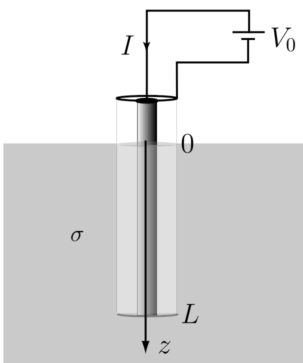
b) Finn potensialet overalt.

c) Finn kapasitansen per lengdeenhet.

d) Koaksialkabelen brukes nå til å måle konduktiviteten σ til en væske, se fig. 2. Kabelen senkes ned i væsken slik at området $0 < z < L$ mellom innerlederen og ytterlederen blir fyllt av væsken. Det er fortsatt en spenning V_0 mellom inner- og ytterlederen, og strømmen måles med et amperemeter. Koaksialkabelen er åpen i begge endene og området ovenfor væsken er fyllt med luft. Se bort fra randeffektene. Bestem strømmen I, uttrykt ved σ og andre størrelser som er oppgitt i oppgaven.



Figur 1: Koaksialkabel.



Figur 2: Måle konduktiviteten til en væske.

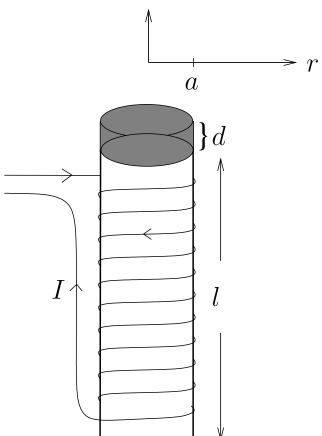
e) Anta at man ikke kan se bort fra randeffektene. Beskriv hvordan man kan gjøre målinger slik at man kan få en nøyaktig verdi på σ.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi se nærmere på prinsippene for en induksjonsovn.

a) Gitt en tettviklet solenoide med N viklinger, lengde l og radius a. Permeabiliteten er overalt μ_0. Vi antar for enkelhets skyld at $l \gg a$, slik at du kan se bort fra magnetfeltet utenfor solenoiden. Finn den magnetiske flukstettheten $\mathbf{B}$ i solenoiden.

b) Vi lar nå strømmen I variere harmonisk, med frekvens f. Fra resultatet ditt i a) følger det at $\mathbf{B}$-feltet også varierer harmonisk, med samme frekvens f og en amplitude B_0. En tynn metallplate med radius a, tykkelse d og konduktivitet σ, plasseres på solenoiden, se fig. 3. Denne platen representerer kasserollebunnen. Vi ser bort fra selvinduktansen til platen. Vi ser også bort



Figur 3: En metallplate med tykkelse d er plassert på toppen av en solenoide. Denne platen representerer selve bunnen i kasserollen.

fra spredning av flukslinjer. Dermed antar vi at **B**-feltet i platen er uniformt og i z-retning, med amplitude B_0 og frekvens f. Vis at ϕ-komponenten til det induserte elektriske feltet i platen er

$$E_\phi = \pi f B_0 r \sin(2\pi f t + \alpha), \tag{1}$$

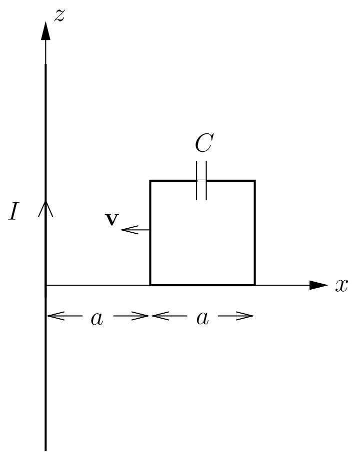
der α er en fase.

c) Vi antar at det ikke er andre kilder til elektriske felter, slik at $\mathbf{E} = E_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$. Finn effekten (pga. virvelstrømmene $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) som varmer opp platen.

d) Anta at platen er laget av et ferromagnetisk materiale. Finnes det et annet prinsipp enn virvelstrømmene ovenfor, som vil føre til en oppvarming av platen?

Oppgave 3

En kvadratisk sløyfe beveger seg med hastighet **v** fra uendeligheten mot en lang, rett leder. Situasjonen i fig. 4 er ved et gitt tidspunkt $t = 0$. Permeabiliteten overalt er μ_0, og resistansen i sløyfa kan antas å være null.



Figur 4: En uendelig lang, rett leder, og en kvadratisk sløyfe som beveger seg med hastighet **v** mot den rette lederen.

a) I deloppgave a) og b) antar vi at $C = 0$ slik at det ikke går strøm i den kvadratiske sløyfa. Anta at den rette lederen kan regnes å være uendelig lang, ha sirkulært tverrsnitt og sylindersymmetrisk fordelt strøm. Finn den magnetiske flukstettheten **B** overalt utenfor lederen.

b) Vis at den elektromotoriske spenningen (emf'en) som induseres i den kvadratiske sløyfa, kan skrives

$$e = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi(a - vt)(2a - vt)}. \tag{2}$$

c) Anta nå at $C \neq 0$. Finn ladningen på den høyre kondensatorplaten som funksjon av tiden. Sløyfas selvinduktans kan antas å være neglisjerbar.

Oppgave 4

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Hva er riktig om loven $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$?

i) Det er en versjon av Gauss' lov.

ii) Den er på differensialform.

iii) Den kan skrives om til $\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri, i } S}$, der $Q_{\text{fri, i } S} = \int_v \rho \mathrm{d}v$. Her er v volumet som omsluttes av den lukkede flaten S.

iv) Alle alternativene ovenfor.

b) To like punktladninger befinner seg en avstand a fra hverandre. Det finnes ingen andre kilder til elektriske felter. Vi ser på det elektriske feltet $\mathbf{E}$, og potensialet V med uendelig som referanse, i et observasjonspunkt som er midt mellom ladningene. Hva er da rett?

i) $\mathbf{E} = 0$ og $V = 0$.

ii) $\mathbf{E} \neq 0$ og $V = 0$.

iii) $\mathbf{E} = 0$ og $V \neq 0$.

iv) Ingen av alternativene ovenfor er korrekte.

c) K. Ule forteller at "det elektriske feltet utenfor ei kule med radius a er $\mathbf{E} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$". Du føyer til at

i) "når kula har total ladning Q."

ii) "når kula har total ladning Q som er sylindersymmetrisk fordelt."

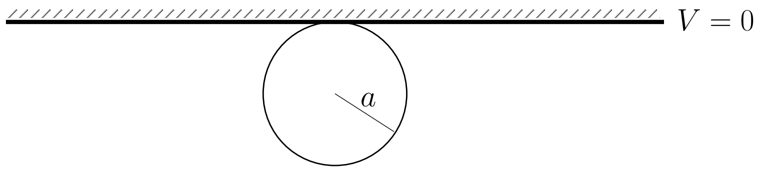
iii) "når kula har total ladning Q som er kulesymmetrisk fordelt."

iv) "Nei, dette uttrykket gjelder bare for feltet fra en punktladning."

d) En ballong har blitt oppladet ved å ha blitt gnidd mot en genser. Ballongen fester seg til taket og blir så vidt sittende, se fig. 5. Hva vet du da om dens totale ladning Q og tyngde mg? Anta at ballongen er kuleformet med radius a og at ladningen Q er jevnt fordelt utover overflaten. Anta videre at taket har potensialet null overalt og at det ikke forsvinner nevneverdig med ladning fra ballongen til taket.

i) $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \approx mg$.

ii) $\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \approx mg$.



Figur 5: En ballong med radius a og ladning Q henger i taket.

iii) $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \approx mg$.

iv) $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \approx mg$.

e) Gitt en grenseflate mellom to lineære, isotrope medier, med $\epsilon \neq 0$, $\epsilon \neq \infty$, $\mu \neq 0$ og $\mu \neq \infty$ overalt. Det er ingen fri ladningstetthet eller fri strømtetthet på grenseflaten. På den ene siden av flaten er feltene $\mathbf{E}_1 = 0$ og $\mathbf{B}_1 = 0$. Hva kan du si om feltene $\mathbf{E}_2$ og $\mathbf{B}_2$ rett på den andre siden? (I alternativene nedenfor står "t" og "n" for henholdsvis tangensialkomponent og normalkomponent.)

i) $\mathbf{E}_{2\mathrm{t}} = 0$ og $\mathbf{B}_{2n} = 0$ mens $\mathbf{E}_{2\mathrm{n}}$ og $\mathbf{B}_{2\mathrm{t}}$ kan være ulik null.

ii) $\mathbf{E}_2 = 0$ og $\mathbf{B}_2 = 0$.

iii) $\sin(\mathbf{E}_2) = \pi/0.53$.

iv) Nei.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_\mathrm{e}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_\mathrm{e}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_\mathrm{J} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_\mathrm{m}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_\mathrm{m}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_\mathrm{m})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_\mathrm{m})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2\mathrm{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\mathrm{n}} - \mathbf{D}_{2\mathrm{n}} = \rho_\mathrm{s}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{H}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{J}_s\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\mathrm{n}} = \mathbf{B}_{2\mathrm{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)}$$
$$\nabla(V+W) = \nabla V + \nabla W$$
$$\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$$
$$\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$$
$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$
$$\nabla\cdot(V\mathbf{A}) = V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(V\mathbf{A}) = (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$
$$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V$$
$$\nabla\times(\nabla V) = 0$$
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

Integralidentiteter:

$$\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S}$$
$$\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$
$$\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$
$$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				