

NTNU  
Norges teknisk-naturvitenskapelige  
universitet

Fakultet for informatikk,  
matematikk og elektroteknikk  
Institutt for elektronikk og  
telekommunikasjon



Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:

Navn:

Tlf.:

**KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE  
TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME**

**AUGUST 2007  
TID: KL 0900 - 1300**

Sensur: Senest/seinast 3 uker etter eksamensdato.

Hjelpemidler:

C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Hjelpemiddel:

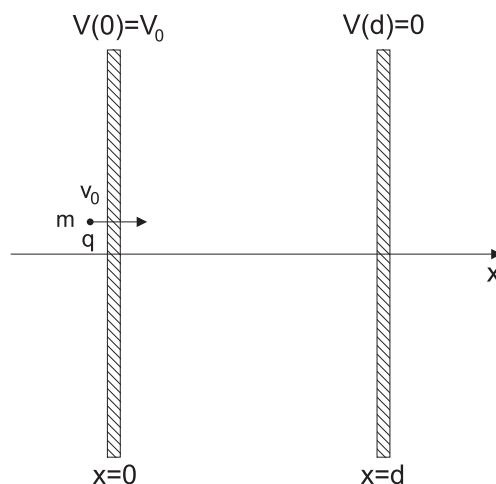
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemiddel tillate: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

Totalt 7 sider inkludert forside.

Alle *deloppgaver/deloppgåver* har omtrent lik vekt (litt variasjon avhengig av arbeidsmengde).

## Oppgave 1

To plane metallplater med avstand  $d$  har en romladningstetthet  $\rho$  mellom seg. Romladningstettheten  $\rho$  og permittiviteten  $\epsilon$  antas konstant (uavh. av  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mellom platene). Den ene platen har potensialet 0, og den andre platen har konstant potensial  $V_0$ . I motsetning til øvingsoppgaven (øving 4), spesifiserer vi nå ingen tallverdier. Dette kan innebære at svaret på enkelte deloppgaver blir kvalitativt forskjellige i forhold til øvingsoppgaven.



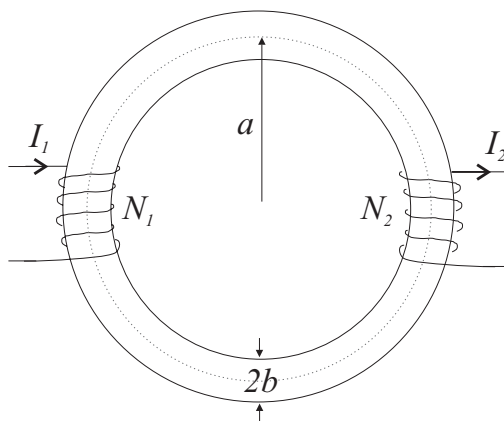
Figur 1: To plane metallplater med en avstand  $d$ .

- Finne potensialet mellom platene som funksjon av  $x$  når vi antar at platene har stor utstrekning i forhold til  $d$ .
- Bruk flest mulige metoder til å sjekke svaret ditt i a).
- For hvilken verdi av  $x$  har potensialet sitt absolutte minimum (for  $0 \leq x \leq d$ )? Finn minimumsverdien av  $V(x)$ .
- Finne den elektriske feltstyrken som funksjon av  $x$ .
- Gjennom et lite hull i den ene platen (se figur 1) skytes det ved  $t = 0$  inn et elektron med en starthastighet  $v_0$ . Elektronets ladning er  $-e$  og massen er  $m_e$ . Vi antar at hullet i platen er så lite at det ikke endrer feltfordelingen mellom platene. Hvor stor hastighet må elektronet ha for at det skal nå den andre platen?
- Anta nå at  $\rho$  og  $\epsilon$  ikke lenger er konstante som funksjon av  $x$ . (Men de er fortsatt konstante mhp.  $y$ ,  $z$  og  $t$ .) Forklar hvordan du ville regne ut potensialet (analytisk hvis mulig, ellers numerisk) dersom funksjonene  $\rho(x)$  og  $\epsilon(x)$  var kjent.

## Oppgave 2

Figuren på neste side viser en toroideformet (smultringformet) kjerne av et magnetisk materiale med relativ permeabilitet  $\mu_r \gg 1$  (men  $\mu_r$  er ikke uendelig). Rundt kjernen er viklet to spoler med henholdsvis  $N_1$  og  $N_2$  viklinger. Anta at toroidens tykkelse  $2b$  er mye mindre enn radiusen  $a$ , slik at den magnetiske flukstettheten kan antas å være konstant over det sirkulære tverrsnittet.

- Anta at  $I_1 \neq 0$  og  $I_2 = 0$ . Finn det magnetiske feltet i toroiden.



- b) Finn selvinduktansen til de to spolene, samt den gjensidige induktansen.
- c) Dersom strømmene  $I_1$  og  $I_2$  er kjent, finn et uttrykk for den lagrede magnetiske energien. Hva er mulige verdier for energien dersom  $N_1 = N_2 = N$ , og geometrien samt  $|I_1| = |I_2| = I$  er fast?

### Oppgave 3

- a) Anta et lineært, isotropt medium overalt. Vis at

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{J} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \epsilon \vec{H}^2 \right). \quad (1)$$

(Hint: Bruk en vektorformel fra vedlegget til å omforme  $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$ .)

- b) Ut fra likn. (1), tolk vektoren  $\vec{E} \times \vec{H}$ .

### Oppgave 4

Til hvert av de 5 spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.

Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, -1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (2 eller 3 kryss) gir 0 poeng.

- a) Hvilke(n) av Maxwells likninger er automatisk oppfylt dersom vi uttrykker  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  og  $\vec{E} = -\nabla V - \partial \vec{A} / \partial t$ , der  $V$  er et skalarpotensial og  $\vec{A}$  er et vektorpotensial?
- kun  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ,
  - $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  og  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ,
  - $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  og  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ,
  - ingen.
- b) Hva kan sies om følgende påstand? Gauss' lov  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{fri, i S}}$  er gyldig både i elektrostatikk og elektrodynamikk. For en tidsavhengig punktladning  $Q(t)$  i origo, fås dermed feltet  $\vec{D}(t) = \frac{Q(t)}{4\pi r^2} \vec{u}_r$ .

- i) Påstanden er rett,
  - ii) Påstanden er gal (Gauss' lov er kun gyldig i elektrostatikken),
  - iii) Påstanden er gal (en enkelt, tidsavhengig punktladning er ikke konsistent med ladningsbevarelse),
  - iv) Påstanden er gal (mediet er ikke nødvendigvis lineært i elektrodynamikken).
- c) Når gjelder følgende likning  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ ?
- i) aldri,
  - ii) alltid, dersom  $\vec{J}$  inkluderer Ampere-strømmer,
  - iii) kun i vakuum,
  - iv) kun for ferromagnetiske materialer.
- d) Hva er enheten for permeabilitet ( $\mu$ ) uttrykt ved grunnenhetene i SI-systemet?
- i)  $\text{m}^{-1}\text{A}$ ,
  - ii)  $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}\text{A}$ ,
  - iii) Ingen av alternativene ovenfor,
  - iv) Alle alternativene ovenfor.
- e) Feltene i en komponent viser seg å være  $\vec{E} = 0$  overalt og  $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t)$ , der  $\omega > 0$ ,  $\vec{B}_0 \neq 0$  og  $\vec{B}_0$  er uavhengig av tiden. Hva kan du si om komponenten?
- i) Den består av lineære medier,
  - ii) Den inneholder spoler og ingen (ladde) kondensatorer,
  - iii) Den kan ikke tilhøre dette universet da Maxwells likninger ikke er tilfredsstilt,
  - iv) Den er meget nyttig i mobiltelefoner.

## Oppgitte formler og konstanter

Formler i elektromagnetisme (spesifisering av gyldighetsområdet og forklaring av symboler er utelatt):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2} \vec{u}_r, & \vec{E} &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, & V_P &= \int_P^R \vec{E} \cdot d\vec{l}, & V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, & \vec{E} &= -\nabla V, \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_{\text{fri i } S}, & \nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \vec{D} &\stackrel{\text{def}}{=}} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, & \vec{P} &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, & \vec{D} &= \epsilon \vec{E}, & \epsilon &= \epsilon_0(1 + \chi_e), \\ C &\stackrel{\text{def}}{=} Q/V, & C &= \epsilon S/d, \\ W_e &= \frac{1}{2} CV^2, & w_e &= \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}, & \vec{p} &= Q\vec{d}, \\ \vec{J} &= NQ\vec{v}, & \vec{J} &= \sigma \vec{E}, & \vec{J} &= \vec{E}/\rho, & \sigma &= 1/\rho, & P_J &= \int_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv, \\ d\vec{F}_{12} &= I_2 d\vec{l}_2 \times \left( \frac{\mu_0 I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{u}_r}{4\pi r^2} \right), & d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2}, & d\vec{F} &= I d\vec{l} \times \vec{B}, \\ \vec{H} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, & \vec{M} &= \chi_m \vec{H}, & \vec{B} &= \mu \vec{H}, & \mu &= \mu_0(1 + \chi_m), & \vec{m} &= I\vec{S}, \\ \vec{M}_F &= \vec{m} \times \vec{B}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, & w_m &= \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}, \\ L_{12} &= \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, & L &= \frac{\Phi}{I}, & W_m &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} I_j I_k, \\ \vec{F} &= -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, & \vec{F} &= +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, & \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, & \vec{F} &= Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

Maxwells likninger:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, & \left( e = -\frac{d\Phi}{dt} \right), \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}, \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho, & \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_{\text{fri i } S}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0. \end{aligned}$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}, & \vec{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, & \nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon}, & \nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu \vec{J}, \\ V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c) dv'}{R}, & \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - R/c) dv'}{R}. \end{aligned}$$

Grensebetingelser:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1 \text{ tang}} &= \vec{E}_{2 \text{ tang}}, & \vec{D}_{1 \text{ norm}} - \vec{D}_{2 \text{ norm}} &= \sigma \vec{n}, \\ \vec{H}_{1 \text{ tang}} - \vec{H}_{2 \text{ tang}} &= \vec{J}_s \times \vec{n}, & \vec{B}_{1 \text{ norm}} &= \vec{B}_{2 \text{ norm}}. \end{aligned}$$

Noen konstanter:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\text{Lyshastighet i vakuum: } c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299792458 \text{ m/s} \approx 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Lyshastighet i et medium: } c = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\text{Elementærladningen: } e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Elektronets hvilemasse: } m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{Nøytronets hvilemasse: } m_n = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Protonets hvilemasse: } m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Standard tyngdeakselerasjon: } g = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Gravitasjonskonstant: } \gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Matematiske formler:

#### DIFFERENTIAL IDENTITIES

15.  $\mathbf{u}_x \cdot \nabla V = \partial V / \partial x$  ( $x$ : arbitrary axis)
16.  $\nabla(V + W) = \nabla V + \nabla W$
17.  $\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$
18.  $\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$
19.  $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
20.  $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
21.  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
22.  $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
23.  $\nabla \times (V\mathbf{A}) = (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A}$
24.  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
25.  $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V = \text{Laplacian of } V$
26.  $\nabla \cdot [\nabla(VW)] = V\nabla \cdot (\nabla W) + 2\nabla V \cdot \nabla W + W\nabla \cdot (\nabla V)$
27.  $\nabla \times (\nabla V) = 0$
28.  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

#### INTEGRAL IDENTITIES

##### Basic integral identities

29.  $\int_v \nabla f \, dv = \oint_S f \, d\mathbf{S}$
30.  $\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  (the divergence theorem)
31.  $\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}$
32.  $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  (Stokes's theorem)

#### GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, AND LAPLACIAN IN ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

##### Rectangular coordinate system

Notation:  $f = f(x, y, z)$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ ,  $F_x = F_x(x, y, z)$ ,  $F_y = F_y(x, y, z)$ ,  $F_z = F_z(x, y, z)$

40.  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z$
41.  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
42.  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_x \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{u}_y \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{u}_z \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$
43.  $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
44.  $\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x) \mathbf{u}_x + (\nabla^2 F_y) \mathbf{u}_y + (\nabla^2 F_z) \mathbf{u}_z$

##### Cylindrical coordinate system

Notation:  $f = f(r, \phi, z)$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \phi, z)$ ,  $F_r = F_r(r, \phi, z)$ ,  $F_\phi = F_\phi(r, \phi, z)$ ,  $F_z = F_z(r, \phi, z)$

45.  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z$
46.  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
47.  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{u}_\phi \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \mathbf{u}_z \left[ \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right]$
48.  $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
49.  $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

##### Spherical coordinate system

Notation:  $f = f(r, \theta, \phi)$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta, \phi)$ ,  $F_r = F_r(r, \theta, \phi)$ ,  $F_\theta = F_\theta(r, \theta, \phi)$ ,  $F_\phi = F_\phi(r, \theta, \phi)$

50.  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi$
51.  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$
52.  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \right] + \mathbf{u}_\theta \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} \right) \right] + \mathbf{u}_\phi \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \right]$
53.  $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
54.  $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

## EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: .....

**Svarkupong**

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				