Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektroniske systemer

Faglærer: Trude Støren

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

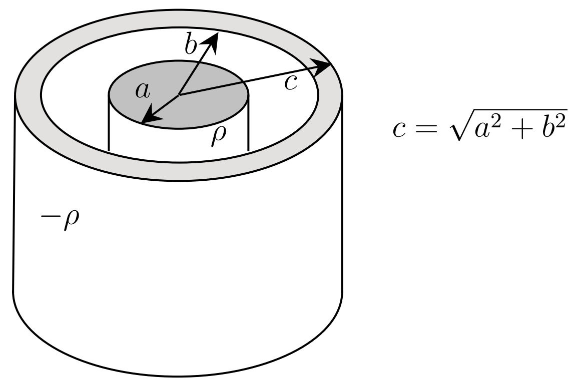
Torsdag 9. august 2018

I oppgave 1 og 2 teller hver deloppgave 3 poeng. Egne poengregler gjelder for oppgave 3 som er en flervalgsoppgave.

Totalt antall poeng : 45.

Oppgave 1

Vi skal i denne oppgaven se på en uendelig lang sylinder med et konsentrisk uendelig langt ytterskall som vist i Fig. 1. Radien til den indre sylinderen er a, indre radius til ytterskallet er b og ytre radius til ytterskallet er c. Begge sylinderene har homogen romlig ladningstetthet som angitt på figuren. Vi antar først at elektrisk permitivitet overalt er lik permitiviteten i vakum, ε_0.



Figur 1: *To uendelig lange konsentriske sylindre.*

a) 1 Skriv opp Coulombs lov og tegn en figur som viser hvordan Coulombs lov skal brukes for å finne kreftene som virker mellom to punktladninger.

2 Forklar hvorfor **D**-feltet i denne oppgaven må være på formen

$$\mathbf{D} = D_r(r)\hat{r}, \tag{1}$$

hvor $\hat{r}$ er enhetsvektor i radiell retning i sylinderkoordinater.

b) Vis at **D**-feltet i området mellom de to sylinderene er

$$\mathbf{D} = \frac{\rho a^2}{2r}\hat{r}. \tag{2}$$

c) 1 Finn uttrykk for **D**-feltet i hele rommet ($0 \leq r \leq \infty$).

2 Tegn en graf som viser $D(r)$ som funksjon av r ($0 \leq r \leq \infty$).

d) Vi antar videre i oppgaven at rommet mellom indre og ytre sylinder er fylt med et homogent, lineært og isotropt dielektrisk materiale med relativ elektrisk permittivitet ε_r.

1 Beskriv hva et dielektrisk materiale er og forklar hvordan det påvirker det elektriske feltet (**E**-feltet).

2 Tegn en graf som viser $E(r)$ som funksjon av r ($0 \leq r \leq \infty$).

e) Poissons ligning,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{3}$$

gjelder for et isotropt, lineært og homogent dielektrikum med romlig ladningstetthet ρ. Laplace' ligning er spesialtilfelle av Poissons ligning.

1 Skriv opp Laplace' ligning og forklar når den kan brukes i stedet for Poissons ligning.

2 Finn et uttrykk for elektrisk potensialforskjell, V_{ab}, over det dielektriske materialet.

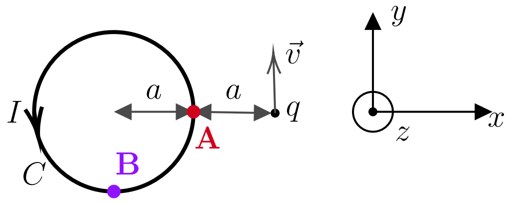
f) Finn et uttrykk for den elektriske energien i det dielektriske materialet pr lengdeenhet i sylinderens retning.

Oppgave 2

a) Skriv opp uttrykket for Biot-Savarts lov for en lukket strømsløyfe. Forklar hvordan en kan bruke denne for å beregne **B**-felt fra en vilkårlig strømsløyfe på et vilkårlig sted i rommet. Definer/navngi alle leddene i uttrykket. Bruk gjerne en figur/skisse.

b) Fig. 2 viser en sirkulær strømførende sløyfe, C, med radius a som fører en konstant strøm I. I en avstand a fra ene kanten av sløyfa finner vi en partikkel med positiv ladning q som beveger seg med hastighet v i retning som vist på figuren.

Finn uttrykk for bidragene $\mathrm{d}\mathbf{B_A}$ og $\mathrm{d}\mathbf{B_B}$ til **B**-feltet ved partikkelen q fra infinitesimale lengdeelement $\mathrm{d}\mathbf{l}$ i hhv punktene A og B på strømsløyfa. Bruk et kartesisk koordinatsystem som vist i figuren.



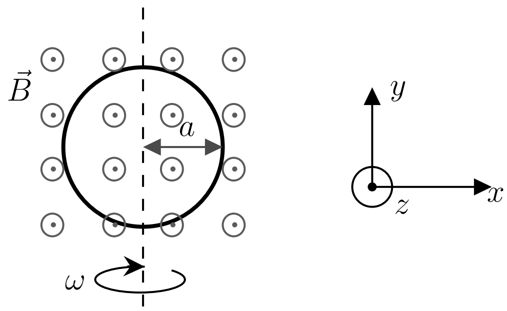
Figur 2: *Strømførende sløyfe, C, og ladning, q, i bevegelse med hastighet $\mathbf{v}$.*

c) 1 Hvordan kan man beregne kraften på en ladd partikkel som beveger seg i et magnetfelt?

2 Tegn en figur som viser retningen på kraftbidragene som virker på partikkelen q fra hhv $\mathrm{d}\mathbf{B_A}$ og $\mathrm{d}\mathbf{B_B}$.

3 Forklar hvorfor totalkraften på partikkelen q fra hele strømsløyfa vil virke mot venstre i figuren. Detaljerte utregninger er ikke nødvendig. Tegn gjerne en skisse.

d) Anta nå at den siruklære sløyfen plasseres i et homogent magnetfelt, $\mathbf{B} = B\hat{z}$ som vist i Fig. 3. Sløyfen fører nå ikke lenger en konstant strøm I, men den roterer rundt den stiplede aksen med vinkelfrekvens ω, noe som vil indusere en strøm i sløyfa. Finn et uttrykk for den induserte strømmen, $I(t)$, i sløyfa. Anta at sløyfa har resistans R og at den roterer sakte nok til at vi kan se bort fra selvinduktansen til sløyfa.

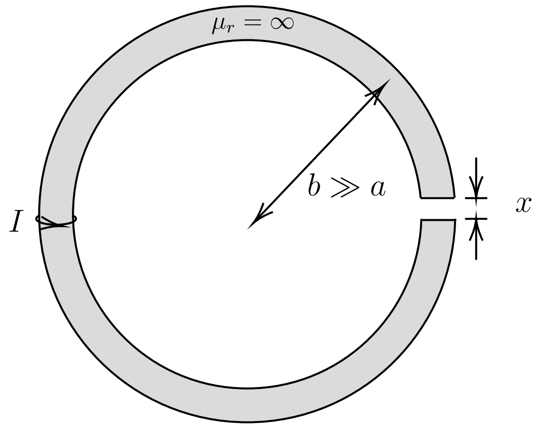


Figur 3: *Roterende sirkulær sløyfe i konstant magnetfelt.*

e) Den samme siruklære sløyfen har nå blitt viklet rundt en smultringformet toroide med et lite luftgap som vist i Fig. 4. En strømkilde opprettholder nå igjen en strøm I i sløyfa. Materialet i toroiden er ferromagnetisk med uendelig relativ magnetisk permeabilitet. Finn et uttrykk for kraften som virker over luftgapet i toroiden. Hvilken retning har kraften.

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som



Figur 4: *Ferromagnetisk torroide med luftgap.*

del av besvarelsen.
Det gis 2 poeng for hvert riktig svar, $-\frac{1}{2}$ poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng. Total poengsum for hele oppgaven kan ikke bli negativ.

a) Hva er alltid sant for et konservativt vektorfelt i elektrostatikken?

i) Det er aldri curl-fritt

ii) Det har ingen kilder

iii) Det kan uttrykkes som gradienten til et skalarfelt

iv) Linjeintegralet av vektorfeltet fra et punkt A til et punkt B er avhengig av integrasjonsveien mellom A og B.

b) Hva er sant om gjensidig induktans mellom to strømsløfer, 1 og 2. Anta et lineært medium overalt.

i) $L_{12} = -L_{21}$

ii) $L_{12} = L_{21}$

iii) $L_{12} = \sqrt{L_{21}}\frac{\mu_0}{\mu_r}$

iv) Det er ikke mulig å si noe om sammenhengen mellom de to uten å kjenne strømmene som går i begge sløyfene.

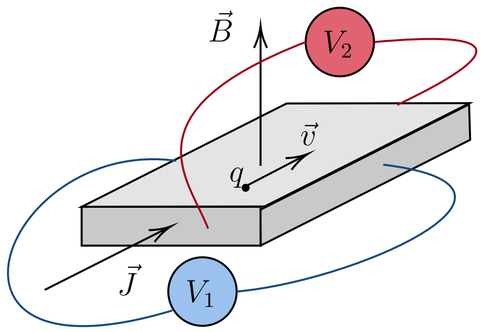
c) En litt sleivete formulering av Lentz' lov er : "En strømsløyfe er konservativ og liker ikke endring" - hva betyr denne loven i praksis ?

i) At det ikke er mulig å endre fluksen i en lukket strømsløyfe

ii) At dersom et påtrykt magnetisk felt fører til en fluksendring i den lukkede sløyfen vi sløyfen selv sette opp en strøm som forsøker å motvirke fluksendringen så godt den kan.

iii) At dersom strømsløyfen er superledende vil strømmen være konstant og uavhengig av fluksendringen.

iv) Ingen av de tre alternativene over.



Figur 5: *Oppsett for måling av Hall-effekten*

d) Hva er riktig om ferromagnetiske materialer?

i) De er ulineære.

ii) Sammenhengen mellom magnetisering og et påtrykt magnetisk felt er avhengig av historikken til det påtrykte feltet (hysterese).

iii) Dersom sammenhengen mellom **B** og **H** tilnærmes med $\mathbf{B} = \mu_r\mu_0\mathbf{H}$, vil den effektive permeabiliteten μ_r være mye større enn 1.

iv) Alle tre over er riktig.

e) Hva mener vi med den dielektriske styrken til et dielektrisk materiale?

i) Hvor kraftig elektrisk felt materialet tåler før det ioniseres og dermed kan lede strøm.

ii) Hvor stort mekanisk trykk materialet tåler før det sprekker.

iii) Hvor godt materialet isolerer.

iv) Hvor høy tetthet det har av polariserbare dipoler.

f) Et oppsett for å måle Hall-effekten er vist i Fig. 5. **B** er et påtrykt magnetfelt, **J** er strøm gjennom materialet som fører til at ladningsbærerene, q, beveger seg gjennom materialet med driftshastigheten **v**. Hva vil vi måle på voltmeterene V_1 og V_2 som en konsekvens av denne effekten?

i) V_1 vil måle en spenning som er avhengig av styrken på magnetfeltet og driftshastigheten til ladningsbærerene men ikke av fortegnet til ladningsbærerene. V_2 er ikke relevant.

ii) V_1 vil måle en spenning som er avhengig av styrken på magnetfeltet, driftshastigheten- og fortegnet til ladningsbærerene. V_2 er ikke relevant.

iii) V_2 vil måle en spenning som er avhengig av styrken på magnetfeltet og driftshastigheten til ladningsbærerene men ikke av fortegnet til ladningsbærerene. V_1 er ikke relevant.

iv) V_2 vil måle en spenning som er avhengig av styrken på magnetfeltet, driftshastigheten- og fortegnet til ladningsbærerene. V_1 er ikke relevant.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\mathrm{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}, \qquad \Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\mathrm{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\mathrm{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2\mathrm{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\mathrm{n}} - \mathbf{D}_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{H}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{J}_{\mathrm{s}}\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\mathrm{n}} = \mathbf{B}_{2\mathrm{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)}$$
$$\nabla(V+W) = \nabla V + \nabla W$$
$$\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$$
$$\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$$
$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$
$$\nabla\cdot(V\mathbf{A}) = V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(V\mathbf{A}) = (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$
$$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V$$
$$\nabla\times(\nabla V) = 0$$
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

Integralidentiteter:

$$\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S}$$
$$\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$
$$\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$
$$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. *ii)*	Alt. *iii)*	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				