

Faglærer:
Trude Støren

LØSNINGSFORSLAG TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

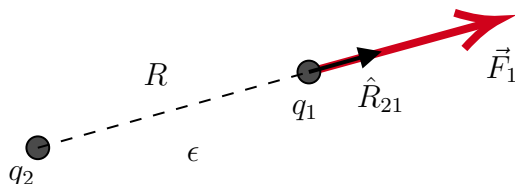
9. august 2018

Oppgave 1

a) ① Coulomb's lov:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon R^2} \hat{\mathbf{R}}_{21} \quad (1)$$

gir kraften som virker på punktladning 1 fra punktladning 2 i figuren. På ladning 2 virker det en kraft som er like stor men motsatt rettet.

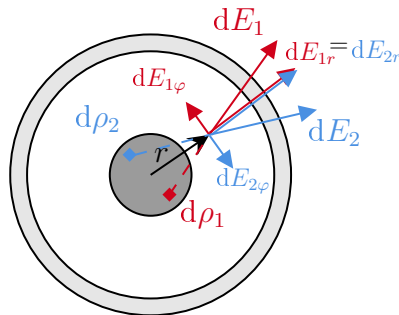


De to har ladning hhv q_1 og q_2 . R er avstanden mellom de to ladningene og ϵ er den elektriske permitiviteten til mediet mellom punktladningene. $\hat{\mathbf{R}}_{21}$ er en enhetsvektor som har retning langs retningsvektoren fra partikkel 2 til partikkel 1. Hvis de to ladningene har samme fortegn peker kraften i samme retning som enhetsvektoren slik det er tegnet på figuren og de to frastøter hverandre. Hvis de har motsatt ladning peker kraften i motsatt retning av enhetsvektoren og de to tiltrekker hverandre.

② Alle ladningsfordelinger er i dette tilfellet sylindersymmetriske og konstante når vi beveger oss langs aksene til sylindrene. \mathbf{D} -feltet kan derfor ikke være avhengig av hverken z eller φ , siden en slik avhengighet vil bryte med symmetrien. Feltet er avhengig av r , noe som er i overensstemmelse med Coulomb's lov som sier at kraft på en elektrisk partikkel fra et ladd legeme, og dermed feltet rundt dette legemet, er avhengig av avstanden fra det ladede legemet.

Retningen på feltet, parallelt med enhetsvektoren i radiell retning, er også forenelig med symmetrien i problemet og Coulombs lov. Feltet kan ikke ha

en z -komponent siden sylindrene er uendelig lange og det ikke er noen romlig variasjon i ladningstetthet i z -retning. Feltet i et punkt i avstand r vil ha bidrag fra alle delvolumer med ladning $d\rho_i$ (både fra indre og ytre sylinder). Hvert av disse delbidragene, f.eks. dE_1 i Fig. 1 vil i følge Coulombs lov være rettet langs retningsvektoren som går fra $d\rho_i$ til observasjonspunktet r . Hvert av bidragene kan dermed ha både en r -komponent og en φ -komponent, men siden det alltid finnes et delvolum plassert slik at φ -komponenten fra denne vil kansellere φ -komponenten fra den første slik det er vist for $d\rho_1$ og $d\rho_2$ i figuren, vil totalfeltet i ethvert punkt peke i r -retning.



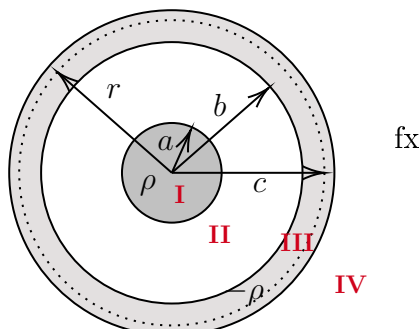
Figur 1: Retning på feltet fra en ladd sylinder med homogen ladningsfordeling.

- b) For å finne \mathbf{D} -feltet mellom sylindrene brukes Gauss' lov med en Gaussflate, S , som er en sylinder som er konsentrisk med de to andre, har radius r og lengde ΔL :

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D}(r) \cdot d\mathbf{S} &= Q_{\text{innenfor } S} \\ &\Downarrow \\ D(r)2\pi r\Delta L &= \rho \cdot V_{\text{innerste sylinder}} = \rho \cdot \pi a^2 \Delta L \\ \Rightarrow D(r) &= \frac{\rho a^2}{2r} \end{aligned}$$

Fordi \mathbf{D} -feltet er radielt får flateintegralet ikke noe bidrag fra endeflatene av S siden feltet der er ortogonalt til flatenormalen $d\mathbf{S}$.

- c) ① For å finne \mathbf{D} -feltet i hele rommet kan Gauss' lov brukes på hver av de tre områdene **I** - **IV**. I hvert tilfelle brukes en sylindrisk Gaussflate med radius r . Figuren indikerer Gaussflaten for område **III**.



I : $r < a$

Her ligger Gaussflaten inni den innerste sylindere. Siden den har homogen ladningstetthet ρ blir totalladningen innenfor Gaussflaten ρ ganger volumet som omsluttet av Gaussflaten, V_{SI} :

$$\begin{aligned} \oint_{SI} \mathbf{D}(r) \cdot d\mathbf{S} &= Q_{\text{innenfor } SI} \\ &\Downarrow \\ D(r)2\pi r\Delta L &= \rho \cdot V_{SI} = \rho \cdot \pi r^2 \Delta L \\ \Rightarrow D(r) &= \frac{\rho}{2}r. \end{aligned}$$

I område **I** øker altså **D**-feltet lineært med avstanden fra sentrum i sylindere.

II : $a < r < b$

Utregning gitt i b) Merk at **D**-feltet her avtar med $1/r$ på samme måte som feltet fra en punktladning.

III : $b < r < c$

I dette området blir totalladningen innenfor Gaussflaten totalladningen på den innerste sylindere + ladning fra den delen av den ytterste sylindere som ligger innenfor Gaussflaten. Denne har romlig ladningstetthet $-\rho$ og totalladning blir dermed:

$$\begin{aligned} Q(r)_{\text{innenfor } S_{III}} &= Q_{\text{Inneste syllinder}} + Q_{\text{Bidrag fra ytterste sylinder innenfor } S_{III}} \quad (2) \\ &= \rho \cdot V_{\text{Inneste syllinder}} - \rho \cdot V_{\text{Bidrag fra ytterste sylinder innenfor } S_{III}} \\ &= \rho \cdot \pi a^2 \Delta L - \rho \cdot \pi (r^2 - b^2) \Delta L \\ &= \rho \cdot \pi (a^2 + b^2 - r^2) \Delta L \\ &= \rho \cdot \pi (c^2 - r^2) \Delta L \end{aligned}$$

Dermed får vi

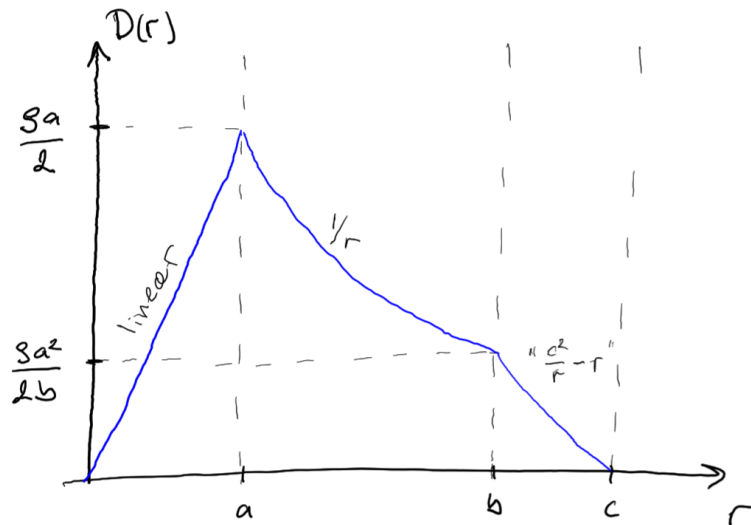
$$\begin{aligned} \oint_{S_{III}} \mathbf{D}(r) \cdot d\mathbf{S} &= Q_{\text{innenfor } S_{III}} \\ &\Downarrow \\ D(r)2\pi r\Delta L &= \rho \cdot \pi (c^2 - r^2) \Delta L \\ \Rightarrow D(r) &= \frac{\rho}{2} \frac{c^2 - r^2}{r} \end{aligned}$$

Feltet i område **III** avtar nesten lineært med r , men med en liten $1/r$ korreksjon.

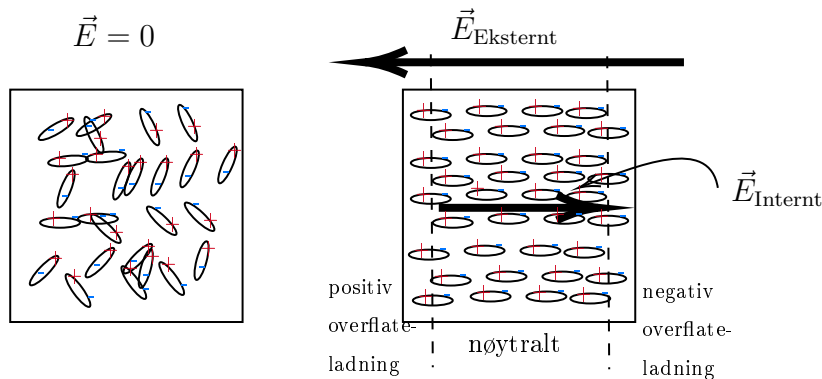
IV : $r > c$

I området utenfor sylindere blir feltet 0 siden totalladning innenfor Gaussflata er 0. Vi kan se dette fra ligning (2) når vi ser på $r = c$.

2 Graf som viser $D(r)$:



d) 1 Et dielektrisk materiale er et isolerende materiale (ingen frie ladninger) der ladningene er bundet opp i dipoler som kan polariseres når en påtrykker et ytre elektrisk felt, \mathbf{E} , eventuelt rette seg inn etter det elektriske feltet.



Siden materialet er nøytralt (like mange positive som negative ladninger) vil det inne i materialet ikke være noe netto internt elektrisk felt som kommer fra dipolene i materialet. På overflaten av materialet vil det derimot kunne være netto negativ ladning på den ene siden og netto positiv på den andre siden. Dette vil sette opp et internt elektrisk felt i motsatt retning av det påtrykte feltet. Totalfeltet inne i materialet vil derfor være det eksterne feltet minus det interne. Det dielektriske materialet vil altså føre til at elektrisk felt reduseres.

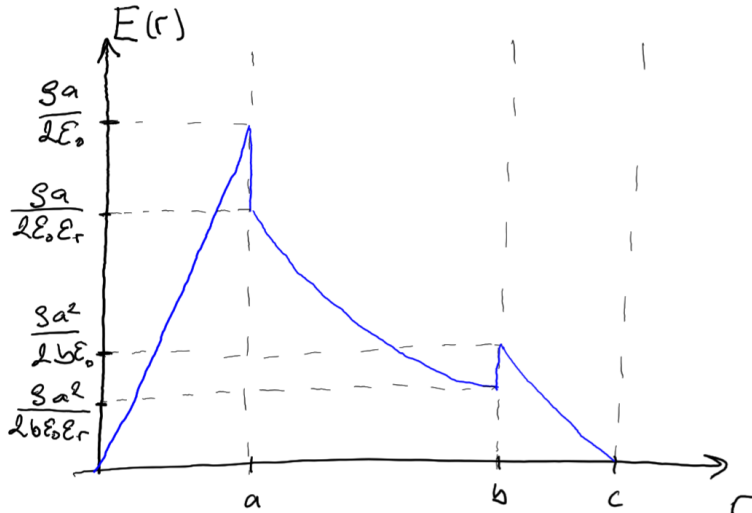
2 I et homogent, lineært og isotropt dielektrisk materiale er sammenhengen mellom \mathbf{D} -feltet og \mathbf{E} -feltet gitt av

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{3}$$

hvor ϵ er elektrisk permitivitet for materialet. For vakum er $\epsilon = \epsilon_0$ mens for et dielektrisk materiale er $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ hvor ϵ_r er relativ permitivitet og er større enn 1.

For å finne \mathbf{E} -feltet fra \mathbf{D} -feltet alle steder i cylinderen må en dele \mathbf{D} -feltet med elektrisk permittivitet for materialet over alt. I overgangen mellom materialer med forskjellig dielektrisk konstant vil dermed \mathbf{E} -feltet endre verdi over grenseflata selv om \mathbf{D} -feltet er det samme på begge sida av grenseflata.

$\mathbf{E}(r)$ blir dermed seende slik ut:



e) (1) Laplace' ligning:

$$\nabla^2 V = 0$$

er et spesialtilfelle av Poissons ligning som gjelder for deler av rommet hvor det ikke er noen frie ladninger ($\rho = 0$).

(2) Elektrisk potensialforskjell, V_{ab} , over det dielektriske materialet kan enten finnes ved å bruke Laplace' ligning i området mellom cylinderene eller ved å regne ut direkte fra det elektriske feltet:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b E(r) dr = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_a^b D(r) dr \\ &= \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_a^b \frac{\rho a^2}{2r} dr \\ &= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Hvis en vil bruke Laplace' ligning må denne integreres opp i det området en er interessert i. Siden potensialet i dette problemet har radiell symmetri i sylinderkoordinater er det hensiktsmessig å uttrykke ∇^2 i sylinderkoordinater:

TODO: renskriv kladden på neste side :)

Alt 2: Laplace ligning: sylindriske koordinat:

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{\partial V}{\partial r} = K$$

$$\Rightarrow V(r) = K \ln(r) + K'$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = K \ln(a) + K' - K \ln(b) - K'$$

$$= K \ln \frac{a}{b} \quad \text{TRANGERE DEKKE}$$

$$E = -\nabla V \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial}{\partial r} (K \ln(r) + K') = -\frac{K}{r}$$

$$E(a) = -\frac{K}{a} = \frac{\rho a^2}{\epsilon_0 \epsilon_r a} \Rightarrow K = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon}$$

$$\Rightarrow V_{ab} = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon} \ln \frac{a}{b} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

f) Energitetthet i elektriske feltet i området mellom sylindrene er gitt ved

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{\rho a^2}{2} \right)^2 \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

For å finne den elektriske energien i området mellom sylindrene må energitettheten integreres over volumet mellom sylindrene:

$$\begin{aligned} W_e &= \int_{V \text{ mellom syl.}} w_e dv = \int_V w_e(r) r dr d\phi dz \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{\rho a^2}{2} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^{\Delta L} dz \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{\rho a^2}{2} \right)^2 2\pi \ln \frac{b}{a} \Delta L \\ &= \frac{\pi}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{\rho a^2}{2} \right)^2 \ln \frac{b}{a} \Delta L \end{aligned}$$

Energi pr lengdeenhet er dermed

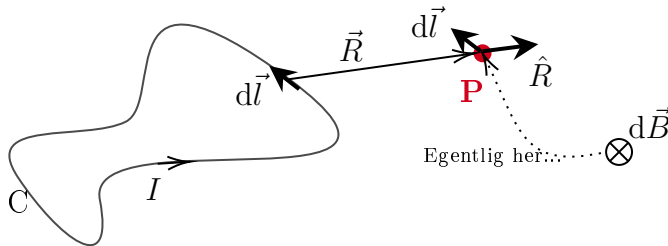
$$W'_e = \frac{W_e}{\Delta L} = \frac{\pi}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{\rho a^2}{2} \right)^2 \ln \frac{b}{a}$$

Oppgave 2

a) Biot-Savarts lov for en lukket strømsløyfe, C , er

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (4)$$

og brukes for å beregne magnetfeltet \mathbf{B} et vilkårlig sted i rommet, f.eks. i \mathbf{P} .



Hvert infitesimale lengdeelement vil gi opphav til et bidrag $d\mathbf{B}$ som har retning gitt av kryssproduktet mellom $d\mathbf{l}$ og $\hat{\mathbf{R}}$, hvor $d\mathbf{l}$ har retning langs det lille segmentet av sløyfen og peker i samme retning som strømmen, I , som går i sløyfa. Enhetsvektoren $\hat{\mathbf{R}}$ peker i samme retning som avstandsvektoren \mathbf{R} fra det infinitesimale lengdeelementet og til punktet \mathbf{P} .

I ligning (4) er μ magnetisk permeabilitet til det materialet sløyfa befinner seg i og $R = |\mathbf{R}|$. Totalfeltet \mathbf{B} fås ved å integrere over alle $d\mathbf{l}$ rundt hele sløyfa, C .

b) Bidraget fra punkt \mathbf{A} på sløyfa:

$d\vec{l} \times \hat{R} = dl \cdot (-\hat{z})$

$$d\vec{B}_A = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{I dl}{a^2} \hat{z}$$

Peker i negativ z-retning

Bidraget fra punkt \mathbf{B} på sløyfa:

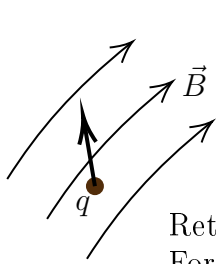
$d\vec{l} \times \hat{R} = dl \sin(\alpha) \cdot \hat{z}$

$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$d\vec{B}_B = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I dl}{5a^2} \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{z}$$

Peker i positiv z-retning

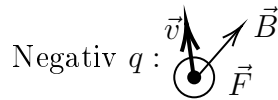
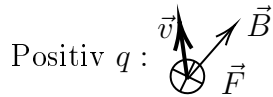
c) ① Kraft på ladning, q , som beveger seg i magnetfelt, \mathbf{B} , med hastighet \mathbf{v} :



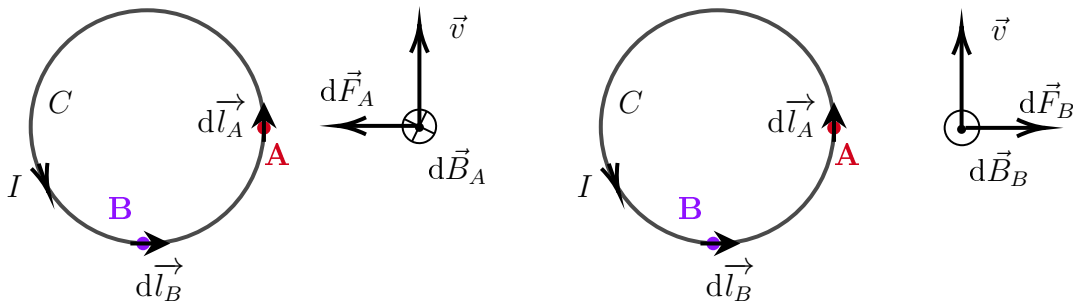
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

\Rightarrow Får en kraft på partikkelen som er proporsjonal med ladning, hastighet og B-felt

Retning på kraften er normalt på bevegelsesretning og B-felt. Fortegnet på retningen gitt av fortegnet på ladningen:

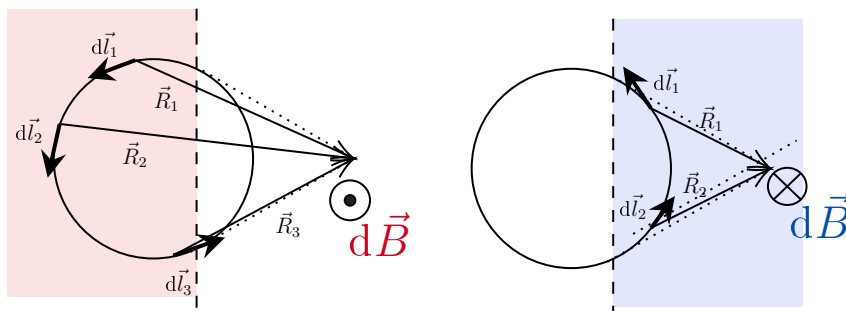


2) Kraftbidragene på den positive partikkelen q fra $d\vec{B}_A$ og $d\vec{B}_B$:



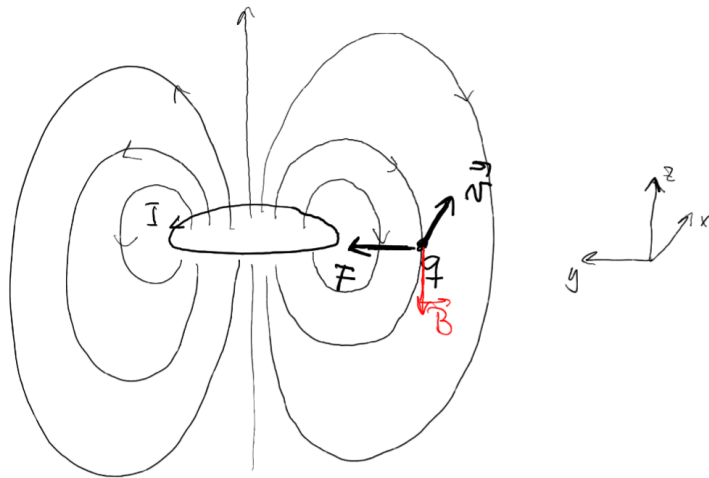
3) Alle bidrag til \mathbf{B} -feltet i partikkelens posisjon er enten i positiv z -retning eller negativ z -retning. Det betyr at alle kraftbidrag virker enten rett mot venstre eller rett mot høyre. Vi vet derfor at totalkraften på partikkelen vil virke enten rett mot venstre eller mot høyre.

Hvis vi analyserer retningene på $d\vec{l}$ og $\hat{\mathbf{R}}$ vektorene fra forskjellige steder på sløyfa ser vi at alle bidrag fra den delen av sløyfa som ligger til venstre for punktene der retningsvektoren fra et segment $d\vec{l}$ til q er tangent til sløyfa (den rosa delen i figuren) vil gi \mathbf{B} -felt bidrag som kommer ut av papirplanet på figuren. Disse vil gi bidrag til en kraft som virker mot høyre. Bidragene fra den lyseblå delen i figuren vil gi \mathbf{B} -felt bidrag som peker ned i papirplanet og vil gi opphav til kraftbidrag mot venstre. Det er en større del av sløyfa som gir bidrag mot høyre enn mot venstre, men siden styrken på \mathbf{B} -feltet går som $1/R^2$ og kryssproduktet mellom $d\vec{l}$ og $\hat{\mathbf{R}}$ sørger for at bidragene som kommer fra delene øverst og nederst på sløyfa (slik den ser ut på figuren) blir veldig små er det plausibelt at kraften fra den blå delen på figuren dominerer over kraften fra den rosa delen, og at totalkraften dermed virker mot venstre.



Alternativt (og en god del enklere) kan vi se på hvordan flukslinjene fra en

slik strømsløyfe ser ut:



I dette bildet er det tydelig at i posisjonen til partikkelen q peker flukslinjene nedover slik at kryssproduktet mellom \mathbf{v} og \mathbf{B} får retning inn mot strømsløyfa.

- d) Fluksen gjennom sløyfa vil variere med tiden ettersom den roterer i det statiske magnetfeltet. Fluksen er gitt ved

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BA \cos(\omega t)$$

hvor $\mathbf{S} = A \cdot \hat{\mathbf{n}}$, A er arealet til sløyfa og $\hat{\mathbf{n}}$ er enhetsnormal til sløyfa. Vinkelen mellom \mathbf{B} -feltet og \mathbf{S} er ωt .

Indusert elektromotorisk spenning i sløyfa finnes fra

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = BA\omega \sin(\omega t)$$

Strømmen som går i sløyfa er dermed:

$$I = \frac{e}{R} = \frac{BA\omega}{R} \sin(\omega t) = \frac{B\pi a^2 \omega}{R} \sin(\omega t)$$

- e) I denne oppgaven skal vi finne kraften som virker over luftgapet i toroiden på grunn av strømmen som går i den lille strømsløyfa. Siden det er oppgitt at en strømkilde opprettholder strømmen I er dette et system med tap og vi kan finne kraften assosiert med en endring av avstanden x over luftgapet fra uttrykket

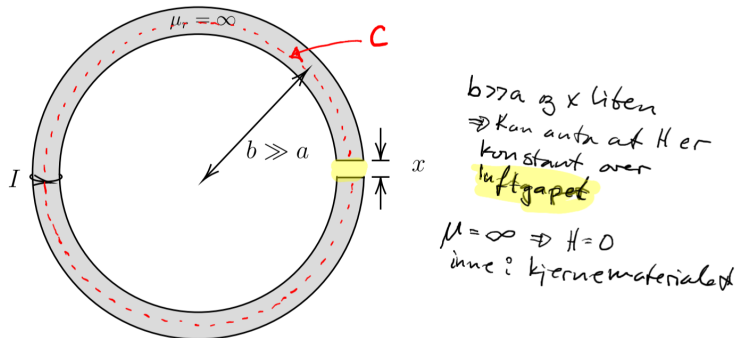
$$F = \frac{\partial W_m}{\partial x}$$

Vi må altså finne et uttrykk for magnetisk energi i systemet og derivere dette mhp avstanden i luftgapet.

Energitettheten i et magnetisk felt er gitt av

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

Den lille strømsløyfa setter opp et \mathbf{B} -felt, som siden kjernen har høy magnetisk permeabilitet, vil ledes rundt i torroiden. Tverrsnittsfluksen vil være den samme over alt i kjernen, også over luftgapet, siden vi antar at det er lite og vi dermed kan se bort fra spredning av flukslinjer rundt luftgapet. Vi trenger imidlertid ikke beregne fluksen for å løse oppgaven, men kan bruke Amperes lov direkte på integrasjonssløyfa C som vist i figuren:



Amperes lov,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

sier at linjeintegralet av \mathbf{H} rundt en lukket sløyfe C er lik total fri strøm som passerer gjennom sløyfa C . I dette tilfellet er $\mathbf{H} = 0$ i kjernematerialet siden $\mu = \infty$ (Endelig fluks i kjernen \Rightarrow endelig \mathbf{B} -felt $\Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu = 0$), og det eneste bidraget vi får til integralet er fra luftgapet hvor vi kan anta at \mathbf{H} er konstant. Vi får dermed

$$\begin{aligned} H_{\text{gap}} \cdot x &= I \\ \Downarrow \\ H_{\text{gap}} &= \frac{I}{x} \end{aligned}$$

Total magnetisk energi til systemet finnes ved å integrere magnetisk energitetthet over hele volumet hvor den er forskjellig fra 0, altså kun i luftgapet. Siden vi kan anta konstant \mathbf{H} -felt blir total energi:

$$\begin{aligned} W_m &= w_m \cdot V_{\text{gap}} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 H_{\text{gap}}^2 \cdot V_{\text{gap}} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{x^2} \cdot x \pi a^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 I^2 \pi a^2 \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Kraften som virker over luftgapet blir dermed

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{1}{2} \mu_0 I^2 \pi a^2 \frac{1}{x^2}$$

Fortegnet på kraften viser at den er negativ i den retningen x øker, altså er retningen slik at endene av gapet tiltrekker hverandre.

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)			x	
b)		x		
c)		x		
d)				x
e)	x			
f)		x		