Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektroniske systemer

Faglærer:
Trude Støren

LØSNINGSFORSLAG TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

30. mai 2018

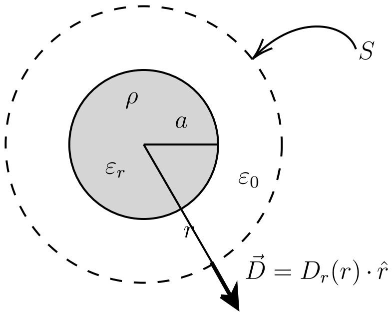
Oppgave 1

a) *i)* Romlig ladningstetthet, altså ladning per volum, for kula er ρ. Denne er konstant i hele kula. Volumet til kula er $4/3\pi a^3$. Totalladning er volum $\cdot$ ladningstetthet, altså

$$Q_{\text{tot}} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho. \tag{1}$$

Dersom ρ hadde variert over volumet av kula måtte vi ha integrert ρ over kulas volum.

ii) Av symmetrigrunner må feltet både innenfor og utenfor kula være radielt rettet og uavhengig av alle vinkler:



Vi kan dermed velge en kuleflate med radius r og senter midt i kula som Gauss flaten S. Gauss lov gir da

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S} \tag{2}$$

$$\Downarrow$$

$$4\pi r^2 D_r = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, & r < a \\ \frac{4}{3}\pi a^3 \rho = Q_{\text{tot}}, & r > a \end{cases} \tag{3}$$

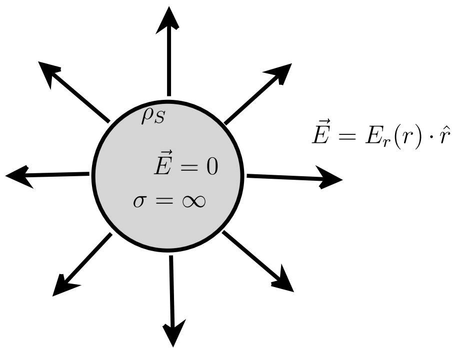
Vi finner D_r båden inni og utenfor kula fra (3) og videre $\mathbf{E}$ fra sammenhengen $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$ hvor ε_r utenfor kula:

$$D_r = \begin{cases} \frac{\rho}{3} r, & r < a \\ \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi}\frac{1}{r^2}, & r > a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} r \cdot \hat{r}, & r < a \\ \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cdot\hat{r}, & r > a \end{cases} \tag{4}$$

b) *i)* Siden kula er en ideell leder vil all ladning fordele seg på overflaten av kula:

$$\begin{aligned} \text{Inni kula :} \quad \rho &= \quad 0 \\ \text{På overflaten :} \quad \rho_S &= \frac{Q_{\text{tot}}}{\text{Areal}} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho}{4\pi a^2} = \frac{\rho a}{3} \end{aligned} \tag{5}$$

ii) E-feltet vil være radielt utenfor kula og 0 inni kula:



iii) Utenfor kula vil **E**-feltet være det samme som for kula i deloppgave a) siden det er samme totalladning inni kula og feltene fortsatt er radielle:

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}(r) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \cdot \hat{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^2} \cdot \hat{r} \tag{6}$$

iv) Grensebetingelsene for **D**- og **E**-feltet sier at

$$\mathbf{E}_{1\text{t}} = \mathbf{E}_{2\text{t}} \tag{7}$$

$$\mathbf{D}_{1\text{n}} - \mathbf{D}_{2\text{n}} = \rho_{\text{s}} \tag{8}$$

Siden $\mathbf{E} = 0$ inne i kula og **E**-feltet utenfor er radielt og dermed har tangentialkompoent $E_t = 0$ er grensebetingelsen for **E** gitt i ligning (7) oppfylt.

Også $\mathbf{D} = 0$ inne i kula slik at (8) sier at normalkomponenten til **D**-feltet rett utenfor kula må være lik overflateladningstettheten til kula. Fra (6) har vi at D_n på overflaten er

$$D_n = \varepsilon_0 E_r(a) = \frac{\rho a}{3}, \tag{9}$$

altså lik overflateladningstettheten som fra (5). Altså er også grensebetingelsen for **D** gitt i ligning (8) oppfylt.

c) *i)* Gauss lov på differensalform er : $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Sammenhengen mellom skalarpotensialet V og **E**-feltet er $\mathbf{E} = -\nabla V$. For lineære og isotrope dielektrika gjelder $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. Dermed får vi:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \nabla V \tag{10}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (-\varepsilon \nabla V) = -\varepsilon \nabla^2 V = \rho \tag{11}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{12}$$

I andre overgang i (11) bruker vi antagelsen om homogent medium (konstant ε) til å flytte denne utenfor derivasjonsoperatoren. Siste overgang i (11) er gitt av Gauss lov.

ii) For området utenfor kula er romladningstettheten $\rho = 0$, og Poisson's ligning reduseres til Laplace' ligning:

$$\nabla^2 V = 0. \tag{13}$$

Siden ladningsfordelinger og felter har sfærsisk symmetri vil også potensialet V ha sfærisk symmetri og avhenge bare av den radielle avstanden fra sentrum av kula: $V = V(r)$. Vi bruker derfor Laplaceoperatoren i kulekoordinater og kan videre utelate alle ledd som avhenger av deriverte av V mhp ϕ eller θ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) &= 0 \qquad (14)\\
&\Downarrow \\
r^2\frac{\partial V}{\partial r} &= K \qquad (15)\\
&\Downarrow \\
\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{K}{r^2} \qquad (16)\\
&\Downarrow \\
V &= -\frac{K}{r} + K', \qquad (17)
\end{aligned}$$

hvor K og K' er integrasjonskonstanter som kan finnes fra grensebetingelsene:

$$V(r = \infty) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; K' = 0 \tag{18}$$

$$V(r = a) = V_0 \;\;\Rightarrow\;\; K = -V_0 a \tag{19}$$

slik at vi får

$$\Rightarrow \quad V(r) = V_0\frac{a}{r}, \quad r > a \tag{20}$$

iii) Siden potensialet er konstant overalt på og inni ideelle ledere, er potensialet inni den ledende kula konstant og lik V_0.

iv) Siden vi tidligere i oppgaven har funnet et uttrykk for **E**-feltet utenfor kula som funksjon av totalladningen Q_{tot} kan vi bruke dette til å finne hvor stor ladning en slik kule må ha for å ha et gitt potensial. Hvis **E**-feltet finnes fra potensialet V, finner vi

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V_0\frac{a}{r}\right)\cdot\hat{r} = V_0\frac{a}{r^2}\cdot\hat{r} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cdot\hat{r}, \tag{21}$$

hvor siste overgangen kommer fra ligning (6). Vi finner dermed at

$$Q_{\text{tot}} = 4\pi a\varepsilon_0 V_0. \tag{22}$$

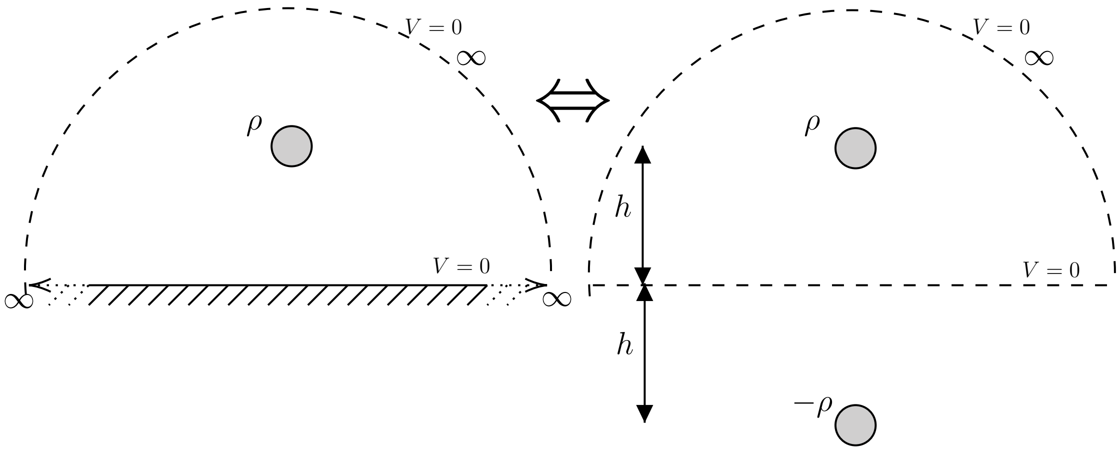
Hvis potensialet på kula er $V_0 = 1000\text{V}$, og radien er $a = 10\text{cm}$, finner vi at totalladningen må være

$$\begin{aligned}
Q_{\text{tot}} &= 4\pi\cdot 10^{-1}\text{m}\cdot 10^{3}\text{V}\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\text{F/m}\\
&= 1,11\cdot 10^{-8}\text{C}\\
&= 6,95\cdot 10^{10}e. \qquad (23)
\end{aligned}$$

d) *i)* Entydighetsteorement sier at dersom to områder i rommet har samme ladningsfordeling, ρ, og samme (konstante) permitivitet, ε, slik at det elektrostatiske potensialet oppfyller (samme) Poisson's ligning (12) i de to områdene *og* grenseverdien til skalarpotensialet på overflaten som omslutter de to områdene er like, så vil potensialene innenfor de to områdene være like.

Dette utnyttes i speilladningsmetoden hvor en bruker (speil)ladninger utenfor det området der man er interessert i til å lage en situasjon som er ekvivalent med den man skal er interessert i ihht entydighetsteoremet. En kan finne både potensialer og felter ved å regne på den ekvivalente situasjonen. Dette gir bare mening hvis den ekvivalente situasjonen er enklere å regne på enn den opprinnelige situasjonen :)

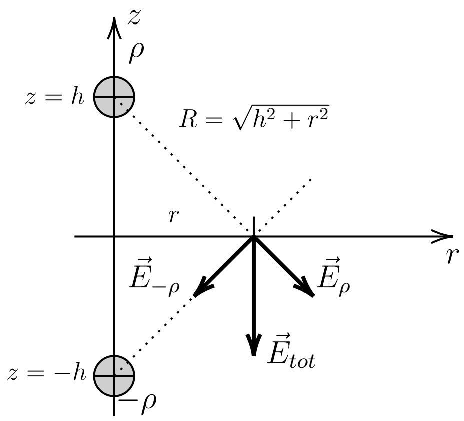
ii) I denne oppgaven skal en finne det elektriske feltet overalt over det ledende planet i figuren til venstre.



Vi kan lage en situasjon som ihht entydighetsteoremet er helt ekvivalent ved å fjerne det ledende planet og legge til en kule som er identisk med den til venstre men med motsat ladning i samme avstand på andre siden av planet. Dette er vist til høre i figuren. Innenfor de stiplede linjene avgrenset av planets posisjon (enten det er der eller ikke) og en halvkule plassert uendelig langt unna er entydighetsteoremets krav oppfylt, da vi har samme ladningsfordeling og materialparametere innenfor området avgrenset av de stiplede linjene *og* vi har samme grenseverdi for V ($V=0$) langs grensen av den stiplede linjen i begge tilfellene.

E-feltet overalt i rommet over det ledende planet kan nå finnes ved å summere feltene fra de to ladede kulene.

iii) Feltet på overflaten av lederen, $\mathbf{E}_{tot}$, vil på grunn av symmetri være rettet normalt på overflaten og være rettet ned mot det ledende planet:

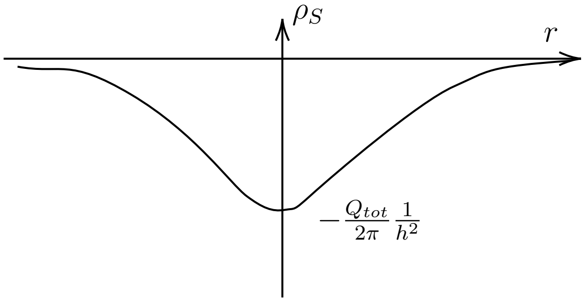


Siden absoluttverdien til feltbidragene fra de to kulene er like i punktet $(0, r)$, og komponentene langs planet er like store og motsatt rettet vil totalfeltet bli

$$\begin{aligned} \mathbf{E_{tot}} = E_z \cdot \hat{z} &= -2\frac{h}{R}\left|\mathbf{E}_{\boldsymbol{\rho}}\right| \cdot \hat{z} \\ &= -2\frac{h}{R}\frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2} \cdot \hat{z} \\ &= -2\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}\frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h^2+r^2} \cdot \hat{z} \\ &= -\frac{Q_{\text{tot}}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{h}{\left[h^2+r^2\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \hat{z} \end{aligned} \tag{24}$$

iv) Siden overflateladningstettheten til en leder er lik normalkompnenten av **D** feltet rett utenfor overflaten vet vi at

$$\rho_S = D_n = \varepsilon_0 E_n = -\frac{Q_{\text{tot}}}{2\pi}\frac{h}{\left[h^2+r^2\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \hat{z}. \tag{25}$$



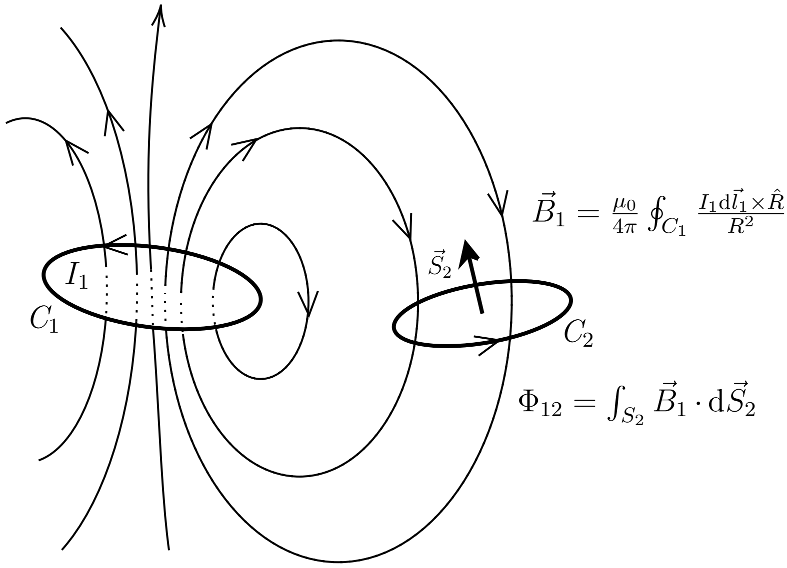
Totalladningen på den uendelig store ledende overflaten må være $-Q_{\text{tot}}$.

Hvis vi legger en Gaussflate som en stor halvkule med den flate delen rett under overflaten til lederen og den krumme delen i $R \to \infty$ vet vi totalladningen inni denne må være lik fluksen av elektrisk felt ut av flata. Fluksen av elektrisk felt ut av den flate delen som ligger inni lederen må være 0 siden feltet $= 0$ inne i lederen. På den krumme delen av Gaussflata vil det elektriske feltet være lik feltet fra en elektrisk dipol som går som $\frac{1}{R^3}$ og fluksen vil dermed være 0 når $R \to \infty$. Siden fluksen ut av Gaussflata må være 0, må totalladningen omsluttet av flata også være 0. Altså må den induserte ladningen på det ledende planet være like stor som ladningen på kula, men med motsatt fortegn.

Oppgave 2

a) *i)* Φ_{12} er magnetisk fluk gjennom arealet avgrenset av sløyfe 2 på grunn av $\mathbf{B}_1$-feltet som genereres av strømmen, I_1, som går i sløyfe 1.

ii) Den gjensidige induktasen sier noe om hvordan de to sløyfene er koblet sammen magnetisk og hvordan de påvirker hverandre. F.eks. vil en endring av **B**-feltet fra den ene sløyfa føre til en fluksendring gjennom den andre sløyfa som vil indusere en elektromotorisk spenning som setter i gang en strøm hvis det er mulig.



Hvis vi kjenner geometrien til C_1 kan magnetfeltet, $\mathbf{B_1}$, som generers av strømmen i C_1 beregnes overalt ved bruk av Biot-Savart's lov

$$\mathbf{B_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1} \frac{I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{26}$$

Fluksen gjennom flaten omsluttet av C_2 kan da beregnes direkte fra

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B_1} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S_2}. \tag{27}$$

Gjensidig induktans kan så finnes fra $L_{12} = \Phi_{12}/I_1$. Med kompliserte geometrier på sløyfene kan ikke dette nødvendigvis gjøres analytisk, men man kan alltids gjøre integrasjonene numerisk.

iii) Endring av fluks i en sløyfe vil føre til indusert elektromotorsk spenning. Inudsert emf i C_2 på grunn av strømmen i C_1 vil være gitt av

$$e_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_{12}I_1\right) = \begin{cases} -L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}, & \text{hvis sløyfene ligger i ro} \\ -I_1\frac{\mathrm{d}L_{12}}{\mathrm{d}t}, & \text{hvis strømmen er konstant} \end{cases} \tag{28}$$

Så lenge sløyfene ligger i ro må strømmen i C_1 endre seg for å indusere en elektromotorisk spenning i sløyfe 2. Hvis sløyfene beveger seg i forhold til hverandre vil det induseres en emf uten at strømmen i sløyfe 1 endres siden den gjensidige induktansen vil endres når sløyfenes plassering og/eller orientering relativt til hverandre endres.

b)

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{1}{I_1}\int_{S_2} \mathbf{B_1} \cdot d\mathbf{S_2} \tag{29}$$

$$= \frac{1}{I_1}\int_{S_2} \nabla \times \mathbf{A_1} \cdot d\mathbf{S_2} \tag{30}$$

$$= \frac{1}{I_1}\oint_{C_2} \mathbf{A_1} \cdot d\mathbf{l_2} \tag{31}$$

I overgangen mellom (29) og (30) bruker vi relasjonen mellom magnetisk flukstetthet og vektorpotensialet : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ og i overgangen til (31) brukes Stokes teorem.

Uttrykket for vektorpotensialet fra en strømsløyfe settes inn for $\mathbf{A_1}$ i (31) og vi får

$$L_{12} = \frac{1}{I_1}\oint_{C_2} \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l_1}}{r}\right] \cdot d\mathbf{l_2} \tag{32}$$

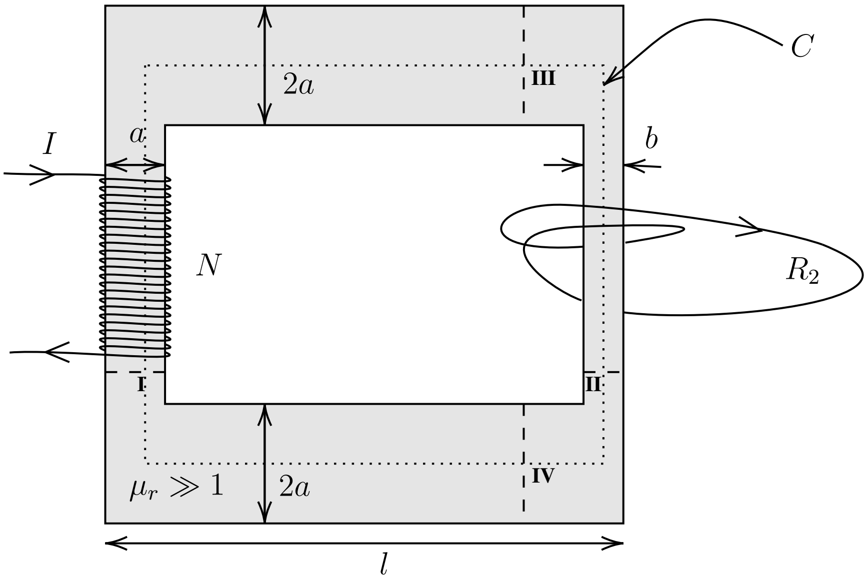
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l_2} \cdot d\mathbf{l_2}}{r} \tag{33}$$

Siden verdien til dobbeltintegralet er uforandret hvis integrasjonrekkefølgen byttes om er det klart at

$$L_{12} = L_{21}. \tag{34}$$

c) *i)* For materialer med høy relativ magnetisk permeabilitet, $\mu_r \gg 1$, vil materialet oppføre seg som en leder for magnetiske flukslinjer. Dette kan en se ved å sammenligne ligninger fra elektrostatikken med ligninger fra magnetostatikken hvor en ser at magnetisk fluks, Φ, har samme rolle i ligningene for magnetiske størrelser som strømmen har for elektriske størrelser. Siden Maxwell #4 sier at divergensen til **B**-feltet alltid er 0 vet vi at flukslinjene alltid vil "bite seg selv i halen". Magnetisk fluks som genereres i del **I** av den magnetiske kretsen på grunn av strømmen i spolen som er viklet rundt denne delen vil derfor være den samme gjennom alle tverssnitt rundt hele kretsen på samme måte som strøm i en elektrisk krets.

ii) For å beregne tverrsnittsfluksen i kretsen bruker vi Ampere's lov på en lukket sløyfe som følger den magnetiske kretsen hele veien rundt. Siden a og b begge er $\ll l$, kan vi anta at **H**-feltet er konstant over tverrsnittet i hver av delene av kretsen. Ampere's lov brukt på integrasjonssløyfa C



gir dermed

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = l\left[\mathbf{H}_{\mathrm{I}} + \mathbf{H}_{\mathrm{II}} + 2\mathbf{H}_{\mathrm{III}}\right] = NI. \tag{35}$$

Siden

$$\mathbf{H}_{\mathrm{i}} = \frac{\mathbf{B}_{\mathrm{i}}}{\mu} \quad \text{og} \quad \Phi_t = B_i \cdot S_i, \tag{36}$$

hvor S_i er tverrsnittsarealet i del i av kretsen, kan vi uttrykke $\mathbf{H_i}$ i ligning (35) ved hjelp av Φ_t og S_i og får

$$NI = \frac{l\Phi_t}{\mu}\left[\frac{1}{S_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{S_{\mathrm{II}}} + \frac{2}{S_{\mathrm{III}}}\right] \tag{37}$$

$$= \frac{l\Phi_t}{\mu}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{2}{2a^2}\right] \tag{38}$$

$$= \frac{l\Phi_t}{\mu a}\left[\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right]. \tag{39}$$

Som gir

$$\Phi_t = \frac{IN\mu_0\mu_r a}{l\left[\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right]}. \tag{40}$$

iii)

$$L_{12} = \frac{\text{Totalfluks i spole 2}}{\text{Strøm i spole 1}} = \frac{2\Phi_t}{I} = \frac{2N\mu_0\mu_r a}{l\left[\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right]}. \tag{41}$$

iv) Hvis strømmen i spole 1 endres vil indusert elektromotorisk spenning i spole 2 være lik

$$e_2 = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{42}$$

For spole 2 vil vi ha

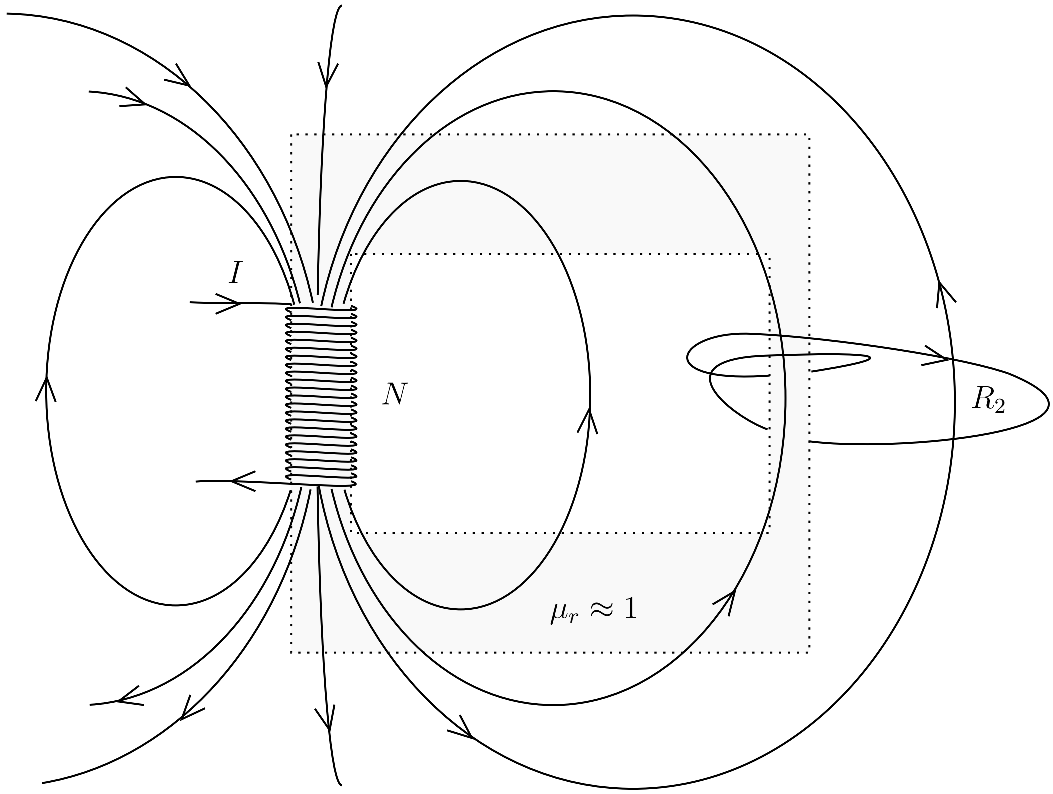
$$e_2 = R_2 \cdot I_2, \tag{43}$$

slik at strømmen i spole 2 vil bli

$$I_2 = -\frac{e_2}{R_2} = -\frac{L_{12}}{R_2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{44}$$

Vi får en negativ strøm som betyr at den induserte strømmen i spole 2 vil være motsatt av det som er markert som positiv retning. Dette stemmer med Lentz' lov som sier at strømsløyfer er konservativer og ønsker å motvirke fluksendring. Med retning på I som markert på figuren, vil en økning i strømen føre til økt **B**-felt som peker nedover i del **I** av kretsen. Det betyr at **B**-feltet, som peker oppover i del **II** av kretsen, også vil øke og gi en fluksøkning gjennom sløyfe 2 når positiv retning på kretsen er som definert på figuren. Sløyfe 2 vil ønske å motvirke denne og vil dermed sette opp en strøm i negativ retning.

d) *i)* Siden materialet i kretsen har magnetisk permeabilitet som er veldig nær permeabiliteten til tomt rom (eller luft) vil materialet i kretsen nå i svært liten grad påvirke flukslinjene. Figuren viser derfor **B**-felt som fra en solenoide i tomt rom.



ii) Som sagt i *i)* - svært lite....

iii) Parametere som kan tenkes å inngå i et uttrykk for gjensidig induktans mellom de to spolene når kjernen fjernes helt:

- Antall viklinger i spolen 1, N, forventes å inngå lineært. Når N øker, vil **B**-feltet fra spole 1 bli kraftigere og fluksen gjennom spole 2 øker.

- Avstanden mellom spolene bør inngå på en slik måte at når avstanden øker vil L_{12} bli mindre siden feltene avtar med avstand

- Arealene til begge spolene. Hvis disse øker, øker fluksen og L_{12} vil øke

- Relativ orientering av spolene i forhold til hverandre. Hvis spole 2 roteres slik at flaten som omsluttes av spolen blir mer paralell med flukslinjene vil L_{12} reduseres siden det blir mindre fluks gjennom spolen.

- materialparameteren $\mu = \mu_0\mu_r$

Oppgave 3

Spørsmål	Alt. i)	Alt. *ii)*	Alt. *iii)*	Alt. iv)
a)			x	
b)			x	
c)			x	
d)				x
e)				x
f)	x			
g)			x	
h)			x	
i)				x