NTNU

Institutt for elektroniske systemer,
IE-Fakultetet,
NTNU

TFE4120 Elektromagnetisme

Øving 13

Oppgave 1

Vi har i løpet av semesteret sett en mengde elektromagnetiske lover. Vi startet med Coulombs lov og den tilsvarende loven for den magnetiske kraften mellom to strømelementer. Ut fra disse lovene ble de elektriske og magnetiske feltene definert, og vi fant lover som feltene må tilfredsstille. Til slutt endte vi opp med 4 likninger, Maxwells likninger, som er elektromagnetisme i et nøtteskall. Hensikten med denne øvingen er å gjøre seg kjent med disse likningene, og se sammenhengen mellom disse likningene og de fysiske lovene vi har sett tidligere.

Klassisk elektromagnetisme kan oppsummeres ved hjelp av Maxwells likninger:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{4}$$

Her er ρ og $\mathbf{J}$ henholdsvis den frie ladningstettheten og den frie strømtettheten. I tillegg til disse likningene har vi de generelle sammenhengene mellom flukstetthetene og feltene:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{5}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \tag{6}$$

Her er $\mathbf{P}$ polarisasjonstettheten og $\mathbf{M}$ magnetiseringstettheten i mediet. Dessuten trenger vi Lorentz' kraftlikning,

$$\mathbf{F} = Q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right), \tag{7}$$

som beskriver kraften på en ladning Q som beveger seg med fart $\mathbf{v}$ i et elektrisk og magnetisk felt.

For et lineært og isotropt medium har vi at polarisasjonstettheten er proporsjonal med det elektriske feltet,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_{\mathrm{e}} \mathbf{E}, \tag{8}$$

og at magnetiseringstettheten er proporsjonal med $\mathbf{H}$-feltet,

$$\mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}} \mathbf{H}. \tag{9}$$

Når (8) og (9) settes henholdsvis inn i (5) og (6), får vi at

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \tag{10}$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{11}$$

der $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_\mathrm{r} = \epsilon_0(1 + \chi_\mathrm{e})$ og $\mu = \mu_0 \mu_\mathrm{r} = \mu_0(1 + \chi_\mathrm{m})$.

Ved hjelp av likningene slik de er formulert ovenfor, skal du nå løse oppgavene nedenfor.

a) Bruk (3) til å vise Gauss' lov på integralform, dvs.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\mathrm{fri\ i}\ S}. \tag{12}$$

Finn også feltet fra en punktladning Q plassert i origo. Vis at kraften på en liten ladning q i en avstand r er gitt av Coloumbs lov:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{13}$$

der $\hat{\mathbf{r}}$ er en enhetsvektor i $\mathbf{r}$-retning.

b) Hvilken av Maxwells likninger er det som sier at **B**-feltlinjene "biter seg selv i halen"?

c) Gitt en sirkulær ledningssløyfe C med én vikling, der C holdes konstant. Vis Faradays lov

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{14}$$

der e er den induserte elektromotoriske spenningen i sløyfen, og Φ er den totale magnetiske fluksen gjennom sløyfen, gitt ved

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{15}$$

e er definert som

$$e \equiv \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \tag{16}$$

og flaten S er den sirkelflaten som er omsluttet av sløyfen C. Til å begynne med antar vi at resistansen R i sløyfen er meget stor slik at strømmen blir neglisjerbar (se figur 1 på neste side). Vi beveger nå en permanent stavmagnet frem og tilbake mot sløyfen slik at den magnetiske fluksen i sløyfen endres i takt med bevegelsen. Anta at den magnetiske flukstettheten pga. magneten blir tilnærmet homogen i sløyfen, og kan skrives

$$\mathbf{B} = [B_0 + B_1 \cos(2\pi f t)]\hat{\mathbf{z}}, \tag{17}$$

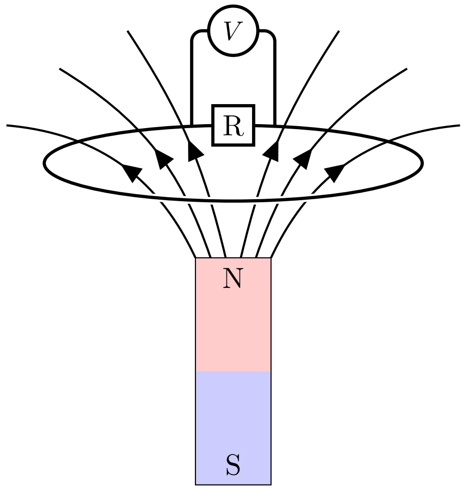
der $\hat{\mathbf{z}}$ er flatenormalen til sløyfen. B_0 og B_1 er konstanter, og arealet av sløyfen er S. Finn spenningen over motstanden R som funksjon av tiden t. Hvis vi reduserer R men fortsetter bevegelsen som før, hva skjer da med den totale magnetiske fluksen i sløyfen (jfr. Lenz' lov)?

d) Finn det magnetiske feltet utenfor en uendelig lang, rett leder som fører en konstant strøm I. Anta at lederen er sirkulær med radius a.

e) Vis at vi har at

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{18}$$

og at dette innebærer ladningsbevarelse i et testvolum v. Du kan anta at v ikke endrer seg med tiden.



Figur 1: Illustrasjon til oppgave **c)**.

f) Vis at tangentialkomponenten av **E**-feltet er kontinuerlig på en grenseflate mellom to vilkårlige materialer.

g) Vi vil nå beskrive elektromagnetisme ved hjelp av potensialene V og $\mathbf{A}$. Som vanlig definerer vi potensialene slik at

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{19}$$

og

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{20}$$

Er disse potensialene entydig bestemt fra **E** og **B**? Begrunn svaret. Argumentér for at Maxwell-likningene $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ og $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ nå blir automatisk oppfyllt. Hva vil de to siste Maxwell-likningene $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ og $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ bety for potensialene? Anta et lineært, isotropt, og homogent medium.

h) Anta stasjonære forhold. Vis at skalarpotensialet V i et lineært, isotropt, og homogent medium tilfredsstiller Poissons likning

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}. \tag{21}$$