Laboratorieøving 1 i TFE4120 - Kapasitans

15. februar 2018

Sammendrag

Vi skal benytte en *parallelplatekondensator* med justerbart gap til å studere kapasitans. Oppgavene i forarbeidet beskrevet nedenfor må løses i forkant av oppmøte til lab, og svar fremvises før laboratorieoppgavene kan påbegynnes. For å få godkjent laboratorieøving må journal fremvises med svar på laboppgavene i siste del av dette skrivet til stud. ass. før laboratoriet forlates. Lykke til!

1 Forarbeid

1.1 Kapasitansen til en parallellplatekondensator

Fig. 1 viser kretsskjema for oppsettet som skal brukes i denne laboratorieøvingen. Parallellplatekondensatoren er sammensatt av to sirkulære flate ledere med radius a separert med en avstand d.

- ☐ Utled det kjente kapasitansuttrykket nedenfor ved å anta at lederne er ideelle:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}, \quad \text{der } A = \pi a^2 \text{ og } \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}. \tag{1}$$

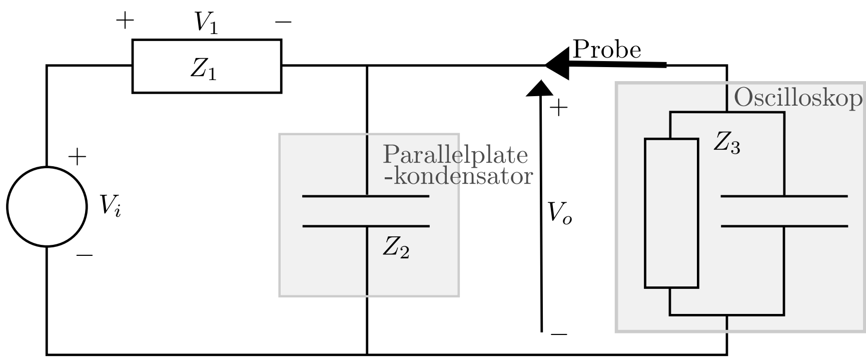
Her er kapasitansen gitt som funksjon av relativ permitivitet ϵ_r til materialet mellom platene og avstanden d.

1.2 Oppsettet -kretsanalyse

Den generelle definisjonen av kapasitans mellom to legemer er:

$$C \overset{\text{def}}{=} \frac{Q}{V} \tag{2}$$

hvor Q er ladningen på det ene legemet og V er spenningen mellom de to legemene. Det er derfor interessant at uttrykket (1) relaterer kun geometriske størrelser til C og ikke ladning eller spenning. Vi skal følgelig teste om vi gjenfinner den lineære avhengigheten av C med ϵ_r og d^{-1} uttrykt i (1) gjennom et enkelt labobsett beskrevet av kretsskjemaet vist i fig. 1. Vi skal nå gjennomgå hvordan denne kretsen skal brukes til å måle C.



Figur 1: Kretsskjema

Impedansformalisme

Vi er vant til å analysere enkle DC-kretser ved hjelp av Ohm's lov $V = I \cdot R$ til å relatere spenning, strøm og resistans. For AC-kretser bruker vi imidlertid en endret versjon av Ohm's lov:

$$V = I \cdot Z, \tag{3}$$

der resistansen R generaliseres til en størrelse kjent som *impedans* Z. Dersom dette er nytt for deg bør du lese appendiks A hvor dette er beskrevet nærmere. Impedansens amplitude $|Z|$ angir hvor stor motstanden er, og impedansens komplekse fase $\angle Z$ angir hvordan komponenten forårsaker en forskyvning i fase av AC-signalet generert av signalgeneratoren. Motstander får impedansen $Z_R = R$, spoler får impedasen $Z_L = j\omega L$ og kondensatorer får impedansen $Z_C = 1/j\omega C$. Den samlede impedansen til impedanser som ligger i serie (rett etter hverandre) er

$$Z_{\text{tot}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots, \tag{4}$$

og den samlede impedansen til impedanser som ligger i parallell er

$$\frac{1}{Z_{\text{tot}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \cdots. \tag{5}$$

Spenningsdeling

Fra kretsskjemaet i fig. 1 ser vi at spenningsfallet gjennom kretsen kan oppdeles

$$V_i = V_1 + V_o. \tag{6}$$

I henhold til definisjonen (2) forstår vi at man trenger spenningen V_o for å finne C. Vi vet at strømmen som forlater signalgeneratoren må være lik summen av strømmene som forgrener seg gjennom parallellplatekondensatoren og oscilloskopet i kretsen, altså $I_{Z1} = I_{Z2} + I_{Z3}$. Ved å bruke (3) har vi derfor:

$$\frac{V_i}{Z_1 + Z_2 \| Z_3} = \frac{V_o}{Z_2 \| Z_3}$$

hvor $Z_2 \| Z_3$ er parallellkoblingen av elementene Z_2 og Z_3 og kan finnes ved hjelp av (5). I kretsen representerer Z_3 en parallellkobling av oscilloskopets *indre motstand* ($\sim 1\mathrm{M}\Omega$) og oscilloskopets *indre kapasitans* ($\sim 150\mathrm{pF}$, inkludert kabler[1]), og brukes for å beskrive oppførselen til oscilloskopet "sett utenfra". For at C ikke skal være neglisjerbar i forhold til C_{osc} må vi unngå store verdier for d, hvor $C_{\mathrm{osc}} \gg C$.

- ☐ Regn ut hvor stor d kan være før $C_{\mathrm{osc}} \gg C$ ved å bruke likn. (1). Parallellplatenes radius er ca. $a = 0.08\mathrm{m}$, og for luft mellom platene har vi $\epsilon_r \approx 1$. *Tips*: Finn først hva d må være for at $C = C_{\mathrm{osc}}$.

Ved å stokke om på uttrykket får vi:

$$V_o = V_i \cdot \frac{Z_2 \| Z_3}{Z_1 + Z_2 \| Z_3}. \tag{7}$$

Dette er kjent som *spenningsdeling*. I henhold til fig. 1 har vi impedansene:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 && (8)\\ Z_2 &= \frac{1}{j\omega C} && (9)\\ Z_3 &= \left\{ \frac{1}{R_{\mathrm{osc}}} + j\omega C_{\mathrm{osc}} \right\}^{-1} && (10) \end{aligned}$$

I den videre regningen er det hensiktsmessig å samle de to kapasitansene i impedansen Z_2, og dermed heller bruke følgende definisjoner:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 && (11)\\ Z_2 &= \frac{1}{j\omega(C + C_{\mathrm{osc}})} = \frac{1}{j\omega C_{\mathrm{tot}}} && (12)\\ Z_3 &= R_{\mathrm{osc}}. && (13) \end{aligned}$$

- ☐ Finn $Z_2 \| Z_3$ uttrykt ved R_{osc}, $C_{\mathrm{tot}} = C + C_{\mathrm{osc}}$, og $\omega = 2\pi f$ ved hjelp av likn. (5). Bruk dette til å finne et uttrykk for V_o/V_i. Finn deretter amplituden $|V_o/V_i|$.

Vi har altså funnet en likning som relaterer de målbare størrelsene $|V_i|$, $|V_o|$ og $\omega = 2\pi f$ til C. Før vi kan sette i gang med målinger må vi imidlertid først bestemme hvilken frekvens f og størrelse R_1 som skal brukes i kretsen.

[1]Kablene som kobler oscilloskopet til parallelplatekondensatoren vil også ha en kapasitans mellom seg. Vi inkluderer denne kapasitansen i C_{osc}, siden den er en del av måleoppsettet.

Frekvensavhengig impedans

Vi skal bruke oscilloskopet til å måle $|V_o|$ slik vist i fig. 1. Ettersom det er kapasitansen vi ønsker å måle må vi sørge for at strømmen i hovedsak går gjennom kondensatoren, og ikke gjennom oscilloskopets motstand. Dersom $|Z_2| \gg |Z_3|$ vil vi ikke kunne se effekten av at gapavstanden eller at materialet mellom platene på parallellplatekondensatoren endres. Siden Z_2 avhenger av $\omega = 2\pi f$ må vi derfor finne en frekvens f_c hvor $|Z_2| = |Z_3|$ slik at vi kan sørge for å bruke vekselspenning med frekvens $f > f_c$ i kretsen vår.

- ☐ Finn et analytisk uttrykk for frekvensen f_c som funksjon av C_{tot} og R_{osc}, gitt at $|Z_2| = |Z_3|$. Vi har at $R_{\text{osc}} \sim 1\text{M}\Omega$ og $C_{\text{osc}} \sim 150\text{pF}$. Regn ut et estimat for f_c når $d = 5\text{mm}$.

For de verdiene som er blitt oppgitt bør vi operere med frekvenser en del høyere enn ca. 1 kHz. Det eneste som nå mangler er verdien for R_1. Siden vi skal måle $|V_o/V_i|$ for å finne C trenger vi å operere kretsen i et regime der forholdet $|V_o/V_i|$ endrer seg mye når vi varierer d eller ϵ_{r}. Dette får vi for eksempel til ved å kreve at $|V_o/V_i| = 1/2$. Vi kan regne ut R_1 fra dette, og finner:

$$R_1 = \frac{R_{\text{osc}}}{\omega^2 C_{\text{tot}}^2 R_{\text{osc}}^2 + 1}\left[\sqrt{4 + 3\omega^2 C_{\text{tot}}^2 R_{\text{osc}}^2} - 1\right] \tag{14}$$

Siden impedansen $Z_2 = 1/j\omega C_{\text{tot}}$ varierer med frekvens, vil følgelig den nødvendige verdien av R_1 for at $|V_o/V_i| = 1/2$ også variere. Siden Z_2 avtar med økt frekvens, vil også den nødvendige verdien av R_1 avta med økt frekvens.

- ☐ Vi er interessert i å bruke kretsen for frekvenser $f > f_c$. Bruk likningen over til å finne en passende verdi av R_1 for frekvenser rundt $f = 10 f_c$.

Kapasitansmåling

For en valgt frekvens $f > f_c$ kan vi altså finne en passende verdi av R_1.

Med R_1 og f valgt er dere nå klare for å måle C. Ved å stokke om på uttrykket vi fant for $|V_o/V_i|$, finner vi et uttrykk som lar oss måle kapasitansen C_{tot} ved hjelp av de målbare størrelsene $|V_i|$ og V_o, samt de kjente parametrene R_1, R_{osc} og $\omega = 2\pi f$:

$$C_{\text{tot}} = \frac{1}{\omega R_1}\sqrt{\left|\frac{V_i}{V_o}\right|^2 - \left(1 + \frac{R_1}{R_{\text{osc}}}\right)^2}. \tag{15}$$

- ☐ Hvordan forventes C_{tot} i likning (15) å avhenge av d?

2 På laboratoriet

2.1 Forberedelse

- ☐ Før dere tar fatt på laboppgaven må dere først fremvise svarene på forarbeidet til en studass.

Nå skal dere sette opp kretsen vist i fig. 1: Dere skal bruke en motstand, en AC-signalgenerator med justerbar frekvens, en parallellplatekondensator og et oscilloskop.

- ☐ Sett opp kretsen i henhold til kretsskjemaet og de verdiene dere fant på forarbeidet (la oscilloskopet og signalgeneratoren forbli plassert i hylla over labplassen slik at det blir mindre å rydde opp). Sett signalgeneratoren til et AC-signal med en frekvens $f > f_c$ dere finner passelig. Juster tidsaksen og spenningsskalaen på oscilloskopet slik at dere ser 2-4 perioder av signalet på oscilloskopskjermen. **NB! Husk å stille probene dere bruker på 1X.**

- ☐ Med en avstand på ca. $d = 5$ mm mellom kondensatorplatene, sjekk om dere får $|V_o/V_i| \approx 1/2$ slik dere designet kretsen. Juster frekvensen litt for å få dette til. Tilplass amplituden på spenningssignalet slik at dere får tilstrekkelig måleamplitude for å måle $|V_o|$ uten støy.

2.2 Målinger

Se at C varier lineært med d^{-1}

- ☐ Bruk oscilloskopet til å måle $|V_o|$ i fig. 1. Det kan være lurt å måle $|V_i|$ med oscilloskopet også: Dette gjøres ved å koble proben til spenningskilden. Ved å trykke på oscilloskopets *MEAS*-knapp kan man velge å måle amplituden til signalene (*Peak Peak*). Man bør også måle frekvensen f (denne målingen er muligens mer nøyaktig enn den oppgitt på signalgeneratoren).

- ☐ Sett kondensatorplatene ca. 5 mm fra hverandre. Prøv og se at hvis du gjør frekvensen f liten går $|V_o/V_i| \to 1$, og at hvis du gjør f stor går $|V_o/V_i| \to 0$. Hvorfor skjer dette? Velg deretter en frekvens større enn f_c slik at $|V_o/V_i|$ er rundt 1/2.

- ☐ Sett kondensatorplatene så langt fra hverandre som mulig. Lag en tabell som vist nedenfor der dere flytter kondensatorplatene nærmere hverandre med en halv millimeter av gangen. Dere vil se at amplituden $|V_o|$ endrer seg mens $|V_i|$ forblir uendret. Regn ut kapasitansen ved hjelp av likn. (15). Tabellen og utregningene kan for eksempel gjøres i Matlab eller Excel, men skriv ned verdiene i journalen slik at de kan vises til stud. ass.

d [m]	$\lvert V_o \rvert$ [V]	$\lvert V_i \rvert$ [V]	C [F]
0.0085	4.95	5.00	...
0.0080	4.80	5.00	...
...	...	...	...

- ☐ Bruk dataen til å plotte C_{tot} vs. d^{-1}. Blir grafen lineær?

- ☐ Bruk lineær regresjon til å finne stigningstallet til kurven. Bruk dette stigningstallet til å regne ut arealet til kondensatorplatene etter likn. (1). Stemmer dette sånn noenlunde?

- ☐ Hva beskriver konstantleddet til kurven (verdien når $d^{-1} \to 0$)?

Se at C er konstant mhp. f

- ☐ Still kondensatorplatene slik at de har en avstand på ca. 5 mm mellom seg. Sett signalgeneratoren til 1 kHz.

- ☐ Lag en tabell som vist nedenfor der dere øker frekvensen på signalgeneratorn mellom hver måling. Regn ut kapasitansen ved hjelp av likn. (15).

f [Hz]	$\lvert V_o \rvert$ [V]	$\lvert V_i \rvert$ [V]	C [F]
1k	4.78	5.00	...
2k	4.75	5.00	...
...	...	...	...

- ☐ Bruk dataen til å plotte C_{tot} vs. f. Dere vil finne at C_{tot} varierer med frekvens. Fra likn. (1) forventes ikke C å avhenge av frekvens, og frekvensavhengigheten i C_{tot} kan dermed antas å skyldes C_{osc}.

- ☐ Finn $C_{\text{osc}}(f)$ ved å koble fra parallellplatekondensatoren og gjør samme måleserie på ny. La alle ledninger ligge som de gjorde under målingene i forrige oppgave

Se at C øker med ϵ_r

- ☐ Sett en bunke papir mellom kondensatorplatene og still avstanden slik at papirene nesten klemmes fast. Velg en frekvens større enn f_c slik at $|V_o| \approx |V_i|/2$.

- ☐ Regn ut C_{papir}. Ta deretter ut papiret, og mål C_{luft}. Finn $\epsilon_{\text{papir}} = C_{\text{papir}}/C_{\text{luft}}$.

- ☐ Bruk musematta dere har på arbeidsbenken: Regn ut $C_{\text{musematte}}$, og finn $\epsilon_{\text{musematte}}$.

- ☐ Sammenlign verdiene med tabellverdier på nettet.

Parallell- og seriekobling av kondensatorer (frivillig)

- ☐ Samarbeid med et annet team slik at dere har to parallellplatekondensatorer til rådighet (evt. spør stud.ass. om det finnes noen til overs). Koble dem først i parallell og deretter i serie, og mål kapasitansen i hvert tilfelle ved hjelp av det samme oppsettet dere har brukt før. Foreslå en lov om parallell- og seriekoblede kondensatorer og sammenlikn med likn. 2.95 og 2.97 i kompendiet (s. 40-41).

Figur 2: Slik skal labplassen se ut når den forlates

Kapasitansen til en Coax-kabel (frivillig)

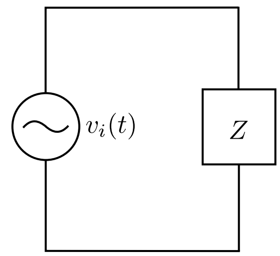
- ☐ Hvis vi bytter ut parallellplatekondensatoren i kretsskjemaet med en Coax-kabel kan vi bruke det samme oppsettet med modifiserte verdier til å måle Coax-kabelens kapasitans. Vi vet at Coax-kabler typisk har kapasitansverdier av størrelsesorden 100 pF/m. Prøv om dere klarer å måle dette!

3 Rydding av labplass og godkjenning

Se fig. 2: For å få godkjent lab må dere sørge for å forlate labplassen seende slik ut. Sett parallellplatekondensatoren tilbake i skapet dere fant den. Finn deretter en studass, vis at dere har gjort alt som står i labteksten og svart på alle spørsmålene. Etter dette gjenstår det bare å takke studassene for deres hjelp og ha en fin dag!

A Impedanser

Vi skal her finne sammenhengen mellom strøm og spenning for en **impedans**, i form av en resistans (motstand), en kapasitans (kondensator), eller en seriekobling/parallellkobling av slike. Vi kobler en ideell vekselsignalgenerator, med



Figur 3: Krets med en vekselspenningkilde koblet over en impedans.

harmonisk spenningsvariasjon

$$v(t) = \mathrm{Re}\{V \exp(j\omega t)\}, \tag{16}$$

til impedansen, se fig. 3. Her er vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$, der f er frekvensen og $j = \sqrt{-1}$. Spenningen V er en kompleks amplitude. Legg merke til at hvis V er reell, fås $v(t) = V \cos(\omega t)$. Hvis ikke, dvs. at $V = |V| \exp(j\phi)$, vil vi få en ekstra fase inne i argumentet til cosinus-funksjonen:

$$v(t) = \mathrm{Re}\{|V| \exp(j\phi) \exp(j\omega t)\} = |V| \cos(\omega t + \phi). \tag{17}$$

Den komplekse fasen ϕ (argumentet) til V innebærer altså en faseforsinking av signalet.

Vi ser først på tilfellet der impedansen er en motstand. Da har vi at strømmen igjennom motstanden er

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V}{R} \exp(j\omega t)\right\} \tag{18}$$

i henhold til Ohms lov. For en kapasitans har vi at $i(t) = C\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, og derfor

$$i(t) = C\,\mathrm{Re}\{j\omega V \exp(j\omega t)\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V}{Z} \exp(j\omega t)\right\}, \tag{19}$$

der $Z = \frac{1}{j\omega C}$ kalles impedansen til kondensatoren. Vi ser at Z opptrer i (19) på samme måte som R opptrer i (18), så impedansen Z er å anse som en "generalisert" resistans.

Det er praktisk å definere en kompleks strøm I:

$$I = \frac{V}{Z}, \tag{20}$$

slik at

$$i(t) = \mathrm{Re}\{I \exp(j\omega t)\}. \tag{21}$$

Om vi hadde kjent strømmen igjennom resistansen eller kapasitansen, i form av (21), ville vi kunne regne oss tilbake til spenningen, på tilsvarende vis som ovenfor. Dette gir (16), der $V = ZI$.

Hva nå om vi parallellkobler to impedanser Z_1 og Z_2? Siden den samme spenningen er over de to impedansene, får vi strømmene

$$i_1(t) = \mathrm{Re}\{\frac{V}{Z_1}\exp(j\omega t)\}, \tag{22a}$$

$$i_2(t) = \mathrm{Re}\{\frac{V}{Z_2}\exp(j\omega t)\}, \tag{22b}$$

og derfor

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2}\right)\exp(j\omega t)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V}{Z}\exp(j\omega t)\right\}, \tag{23}$$

der

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \tag{24}$$

Dette er altså uttrykket for impedansen til en parallellkobling. På tilsvarende måte kan vi vise uttrykket

$$Z = Z_1 + Z_2 \tag{25}$$

for en seriekobling. Man bruker da at strømmen er den samme igjennom de to impedansene.