

Skriveglede i matematikk

T. Stai, *Institutt for matematiske fag (NTNU)*

SAMMENDRAG: Vi presenterer en utradisjonell skriveoppgave for matematikkstudenter. Målet med oppgaven er å skape begeistring over (skriving i) eget fag, og å bidra til en bevisstgjøring rundt disiplinens egenart.

Vi deler også erfaringer fra vår egen bruk av oppgaven i et førsteårsemne.

1 BAKGRUNN

Akademisk skriving har sterke tradisjoner for en saklig språkbruk. I dette landskapet stikker matematikken seg likevel ut: Fagets ufravikelige krav til presisjon gjør at skriftlig matematikk gjerne blir en særlig formell sjargong.

Matematikkstudenter blir da også stadig bedt om å uttrykke seg skriftlig i faget. Ikke minst brukes regelmessige øvingsinnleveringer som arbeidskrav i mange matematikkemner på grunnleggende nivå. De *klassiske* øvingsoppgavene ligner på (klassiske) eksamensoppgaver; her dreier det seg om å gjøre en utregning eller å føre et matematisk bevis. Det er likevel gjengs oppfatning i mitt kollegium at mange studenter sliter med å kommunisere matematikk—spesielt skriftlig.

Dette prosjektet er ment som et beskjedent bidrag i retning av en kur, ganske enkelt ved å øke den matematiske skriveleden blant (førsteårs)studenter.

1.1 Rasjonale

Med dette mål for øye har vi utviklet en *annerledes* øvingsoppgave, hvor studentene får utfolde seg i en mindre stivbent kontekst ved å svare på et fiktivt leserbrev—se *Fig. 1*. Dette er en skriveoppgave skåret over samme lest som Bean–Weimer [1] sine "microtheme assignments", et format som er særlig godt egnet til å skape begeistring og stimulere til diskusjon også utenfor auditoriet.

Roald et al. [4] finner—tilsynelatende paradoksalt—at studenter som også prøver seg i andre (gjerne uformelle) sjangere, faktisk vil ha lettere for å mestre *ren akademisk skriving*. Kanskje er det springende punktet at studentene selv får oppdage at et akademisk språk kan ha noe for seg: I matematikken kan vi håpe at arbeidet med en slik oppgave hjelper studentene med å innse nødvendigheten av presisjon.

Forskningen viser dessuten at det rent faglige utbyttet av en slik øvelse kan være stort: Denne oppgaveformen fører gjerne til at studentene både gjenleser forelesningsnotater og oppsøker andre kilder med fornyet appetitt. Videre genererer formatet *bevis på læring* og er godt egnet til å avsløre misforståelser blant studentene. I sin tur gir dette faglæreren mulighet til å justere undervisningen på en hensiktsmessig måte.

2 SKRIVEOPPGAVEN

For de innvidde er matematikken på dette nivået fri for kontroverser. Så hvordan lage en oppgave som virkelig kan engasjere?

Jo, heldigvis er det flust av misforståelser om vår disiplin blant *utenforstående*! Samtidig er det sjelden at vi får anledning til å snakke om vårt virke med andre enn medstudenter og kolleger. En sentral idé i dette prosjektet er å spille på studentenes presumptive behov for å *vise fram* faget sitt: Tanken er at skriveoppgaven vil få dem til å føle et ansvar for å både forklare og forsvare matematikken.

2.1 Et popkulturelt læringssyn

Det matematiske temaet for skriveoppgaven er *komplekse tall*. Ved min egen institusjon dukker dette konseptet opp i flere førsteårseminner, men det kan ofte falle mellom flere stoler og få en noe stemoderlig behandling av underviserne. Sett fra dette perspektivet adresserer oppgaven blott et lokalt problem.

Men her insisterer vi på en annen vinkling: Oppgaven handler ikke egentlig om komplekse tall, men om å *vekke noe i studentene*. Med McCloskey–Rubel [5] sitt språk har vi begått en *kontekstualisering*. Hvis utført med hell, er dette et grep som ikke bare fasiliteterer den direkte læringen av fagstoff, men som også vil påvirke og motivere studentene på et mer *affektivt* nivå.

En forutsetning for å kunne skape en opportun kontekst, er at underviseren forstår hva som faktisk kan interessere studentene.¹ Vår idé var å syntetisere Vygotsky sin konstruktivisme [6] med Thomas Seltzer sin udødelige karakter Trygdebeistet²: Her skulle studenten lære gjennom deltagelse i et sosialt og *populærkulturelt fellesskap*!

SKRIVEOPPGAVE

Kjære student, denne uka er du **Morgenbladets matematiker!**

Jobben din er å svare på innsendte spørsmål fra lesere; svarene dine kommer på trykk i avisen hver fredag. I dag mottok du dette brevet:

Til matematiker'n,

Alle skjønner at et positivt tall ganga med et annet positivt tall, blir et positivt tall. Og allerede på Kolstad barneskole lærte jeg at "minus ganger minus er pluss"!

Så, uansett hvilket tall jeg velger: Hvis jeg ganger det med seg sjøl må jo resultatet være et positivt tall. Skjønner du, eller?

Men jeg har sett noen rimelig sketchy nettsider hvor folk snakker om tall som liksom blir negative når dem ganges med seg sjøl. Dette er selvfølgelig bare et forsøk fra elitene på å forvirre befolkninga! Splitt og hersk, am I right? For det første er det jo opplagt at sånne tall ikke finnes (som jeg allerede har vært inne på)! Og for det andre ville jo sånne tall uansett ikke ha vært bruknes til noe som helst.

Men så langt er det ingen ting av det jeg sier som biter, og jeg trenger et knockout-argument som stopper kjeften på hele Illuminati. Hvordan vinner jeg diskusjonen?

Med håp om at du ikke (ennå) er i lomma på Big Math, Trygdebeistet

Hvordan svarer du? Bruk 250–500 ord; eventuelle figurer/illustrasjoner kommer i tillegg.

Du skal altså skrive et slags populærvitenskapelig essay. Husk at innlegget ditt skal kunne leses og forstås av en vanlig abonnent (så du kan ikke anta at vedkommende vet særlig mye om matematikk). Her er det viktig at du klarer å både identifisere misforståelsen(e) og gjøre deg forstått i skriftlig form! Klarer du å produsere en tekst som i tillegg er engasjerende, eller til og med underholdende?

NB! En del av oppgaven er å innhente tilbakemelding fra et vanlig menneske før du leverer ditt endelige svar: Få en som ikke til daglig driver med matematikk (kanskje en i familien eller en venn), til å gi feedback på et utkast! Forstår denne testleseren i det hele tatt hva du snakker om? Klarer du å overbevise vedkommende om det du ønsker å formidle?

Fig. 1: Skriveoppgaven slik våre studenter fikk den presentert

¹ Et spenningsmoment knyttet til vår skriveoppgave var hvorvidt den ville fenge på tross av at den åpenbart var (svært) fiktiv. Ville det vise seg at vi var enda mer ute av kontakt med dagens 20-åringer enn vi hadde trodd?

² <https://no.wikipedia.org/wiki/Trygdekontoret>

2.2 Vurderingskriterier?

Skriveoppgaven er en *annerledes* matematikkoppgave også i følgende forstand: Som faglærer har jeg ikke noen klar formening om hvordan jeg *selv* ville ha løst den.

Med dette sagt, her følger noen elementer som jeg tenker må/bør/kan være med i en god besvarelse.

- Studenten må innse at Trygdebeistet faktisk tar feil! Komplekse tall er et veletablert og fundamentalt konsept som er nyttig ikke bare i matematikk, men også ute i "virkeligheten".
- Studenten bør utvise empati med sine lesere (og med innsenderen som kanskje ikke bør dømmes for hardt): Nøkkelen vil være at studenten klarer å ordlegge seg både presist og forståelig, og tar hensyn til at leseren er et tenkende og feilbarlig menneske (men ingen matematiker).
- Studenten kan for eksempel peke på hvordan *reelle tall* i sin tid (altså i antikken) var kontroversielle; er komplekse tall noe mer kunstig? Studenten kan også peke på (mer eller mindre konkrete) anvendelser av komplekse tall.

3 ERFARINGER

I etterkant av gjennomføringen—basert på ikke bare mine egne inntrykk, men også skriftlige og muntlige tilbakemeldinger fra studenter og studentassistenter—virker det rimelig å si at dette var en suksess: Oppgaven vakte stort personlig engasjement blant studentene og en (økt) skriveglede kunne helt klart observeres!³

3.1 Høyere ordens læring

Den store iveren ble på den ene siden omsatt i et betydelig læringsutbytte på metanivå: I tråd med vår intensjon rapporterte mange studenter å ha fått seg en "øyeåpner" hva angår skriftlig kommunikasjon av matematikk. Flere kommenterte dessuten at de satte pris på hvordan skriveoppgaven hadde gjort dem mer bevisste vårt fag sin egenart og posisjon i samfunnet.

Det var aldri et mål for dette prosjektet å si noe definitivt om eventuelle langtidseffekter av skriveoppgaven. Vår tese er likevel at de studentene som her fikk øynene åpnet, ikke vil lukke dem igjen. I litteraturen finner vi også belegg for en slik påstand: Disse studentene har kommet seg over en kognitiv *terskel*, i den forstanden begrepet brukes av Land-Meyer [3]. Her snakker vi om en *irreversibel* form for læring, som gjerne involverer å la noen (vrang)forestillinger fare.

Et annet trekk ved slike terskler er at det kan være spesielt vanskelig og smertefullt å bestige dem. Men i arbeidet med vår skriveoppgave slapp studentene formodentlig å ha det vondt; de ble så ivrige at de var oppe før de innså at de var i ferd med å klatre.

3.2 Konkret faglig utbytte

Den voldsomme arbeidsinnsatsen fra studentene avstedkom også en rekke gode besvarelser, se *Fig. 2* for et eksempel. Det er dermed liten tvil om at den rent matematiske gevinsten av å arbeide med oppgaven også var stor for mange.

En heldig—og på forhånd spådd—bieffekt var at jeg også plukket opp en misoppfatning⁴ hos mange studenter. Denne ble i ettertid adressert under en ordinær undervisningsøkt i emnet.

4 AVVEININGER OG VURDERINGER

Visse (tilsynelatende små) endringer i skriveoppgaven ville ha resultert i en vesensforskjellig opplevelse for studenten. To (bevisste) valg i utformingen av oppgaven fremstår som særlig kritiske; la oss kort diskutere hvordan vi forholdt oss til disse.

4.1 Tilbakemelding fra hvem?

I deres arbeid med skriveoppgaven skulle studentene innhente tilbakemeldinger på sine utkast (kun) fra ikke-matematikere. Argumentet for dette valget var å verne om de positive effektene—begeistring,

³ Kontekstualiseringen hadde altså virket, til gunst for vår egen forfengelighet og opplevde alder.

⁴ Disse studentene *definerte* den imaginære enheten som "kvadratroten av minus én", noe som er litt unøyaktig.

bevisstgjøring, et cetera—som vi håpet å observere når studentene fikk snakke om faget sitt med utenforstående.

Roald et al. [4] peker også på at en øvelse å la vår skriveoppgave kan gi studentene en etterlenget opplevelse av at de virkelig mestrer noe. Det er jo fort gjort å pådra seg "impostor syndrome" på et sted som Gløshaugen, ved alltid å sammenligne seg med andre som kan mer enn en selv. Vi endte altså opp med å prioritere dette aspektet: Her får studenten sjansen til å vise seg fram for både Trygdebeistet og mora si!

Denne prioriteringen gikk på bekostning av et alternativ som også ville ha hatt sine fordeler, nemlig det å la studentene gi tilbakemeldinger på *hverandres* utkast. Kanskje er det mulig å se for seg skriveoppgaven som en isbryter for *peer feedback* (se e.g. [2]). Det vil si, en kunne håpe at en slik lettbenet øvelse åpnet studentenes øyne for fordelene ved det å gi tilbakemelding på hverandres besvarelser. Dermed ville de formodentlig bli mer mottagelige for en slik praksis også når det kom til skriftlige arbeider av mer formell/akademisk karakter.

4.2 Bare et arbeidskrav?

I vårt emne var skriveoppgaven en del av øvingsopplegget (som bare gir *tilgang* til en avsluttende eksamen, som igjen bestemmer hele karakteren), med premiering til "beste besvarelse" etter vårt eget skjønn.

På den annen side kan en se for seg å gjøre slike *microthemes* [1] til en del av selve vurderingsgrunnlaget.⁵ Et slikt opplegg er dømt til å bli vesensforskjellig fra det vi selv gjennomførte: For det første må selve skriveoppgaven da trolig være av en mer formell/akademisk karakter. Og ikke minst vil skriveleden da stå i fare for å bli erstattet av skrivefrykt.

Øving 8 MA1202

March 2025

Oppgave 1

Hei Trygdebeistet!

Takk for et engasjert innlegg med spennende spørsmål. La oss se nærmere på påstanden om at det finnes tall som, når de multipliseres med seg selv, gir et negativt resultat.

Du har helt rett i at produktet av to reelle negative tall – så vel som to positive – alltid blir positivt. Så hvordan er det mulig at enkelte tall, når de multipliseres med seg selv, blir negative? For å forstå dette må vi utvide vår forståelse av hva et tall er. Som du nevner i innlegget ditt, så lærer vi om positive og negative tall på barneskolen, men visste du at for matematikerne i antikkens Hellas så var negative tall et konsept de ikke forsto seg på? Den gang var matematikken tett knyttet til geometri, og siden man jobbet med konkrete størrelser som lengde og areal, var negative tall et konsept som ikke ga mening; man kunne ikke ha et negativt areal eller en negativ lengde. Men i dag vet vi jo at negative tall har en mening i den reelle verden.

På 1500-tallet måtte vi igjen utvide vår forståelse av hva et tall var, da vi kom over noen ligninger som tilsynelatende ikke kunne løses med de tallene vi kjente fra før. Men det ble vist at disse ligningene hadde løsninger, men løsningsmetoden ga et tall som ikke ga mening i prosessen. Da ble $\sqrt{-1}$ introdusert for å løse opp i denne tilsynelatende umuligheten. Senere ble $\sqrt{-1}$ definert som i .

Overgangen til de komplekse tallene markerer et viktig skifte. Konvensjonen er å skrive et komplekst tall på formen $a + bi$, der både a og b er reelle tall, og i er definert til å være $\sqrt{-1}$. Når vi multipliserer i med seg selv, får vi $i \cdot i = i^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$. Dette kan vi se for oss som en 180° rotasjon i et koordinatsystem, der de imaginære tallene går opp og ned, mens de reelle tallene går til høyre og venstre.

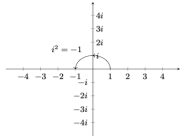


Figure 1: Det komplekse planet

Komplekse tall har et bredt spekter av anvendelser. Innen elektronikk forenkler de beskrivelsen av vekselstrøm, i datagrafikk fungerer de som et verktøy for bildebehandling, og i datavitenskap er de nyttige i signalanalyse. I fysikk spiller komplekse tall en essensiell rolle, blant annet i kvantemekanikk for å modellere sannsynligheter og i partikkelfysikk, der de inngår i bølgligninger for partikler.

Som du ser, er komplekse tall både reelle og svært nyttige. Det er ingen konspirasjon – det er matematikk som hjelper oss med å forstå verden enda bedre.

Med vennlig hilsen

Fig. 2: En besvarelse

5 KONKLUSJON

Det er vår klare oppfatning at skriveoppgaven virker slik den er ment å virke. Selv kommer vi definitivt til å fortsette å bruke den i førsteårsemner.

Vi vil også oppmuntre andre undervisere til å prøve ut (variasjoner av) oppgaven. Den generelle oppskriften—putt et fagbegrep (*komplekse tall*) inn i en populærkulturell kontekst (*Trygdekontoret*)—burde la seg overføre til de fleste fag.

⁵ Dette forutsetter at man ignorerer alle "KI-genererte" endetidstegn for hjemmeeksamen som vurderingsform.

6 TAKK

Takk til Ingrid Stock ved Institutt for språk og litteratur (NTNU) som ga nyttig tilbakemelding på en tidlig variant av opplegget.

REFERANSER

- [1] Bean, J.C. and Weimer, M. (2021), *Engaging Ideas: The Professor's Guide to Integrating Writing, Critical Thinking, and Active Learning in the Classroom*, John Wiley & Sons.
- [2] Carless, D. (2016), *Feedback as dialogue*, Springer, Singapore, pp. 803-808.
- [3] Meyer, J.H. and Land, R. (2006), *Threshold concepts and troublesome knowledge*, Routledge, *Overcoming barriers to student understanding*, pp. 3-18.
- [4] Roald, G.M., Wallin, P., Hybertsen, I.D. and Stenøien, J.M. (2021), *Learning from contrasts: first-year students writing themselves into academic literacy*, *Journal of Further and Higher Education*, Vol. 45, No. 6, pp. 758-770.
- [5] Rubel, L.h. and McCloskey, A.V. (2021), *Contextualization of mathematics: which and whose world?*, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 107, No. 2, pp. 383-404.
- [6] Vygotsky, L.S. and Cole, M. (1978), *Mind in society: Development of higher psychological processes*, Harvard University Press.