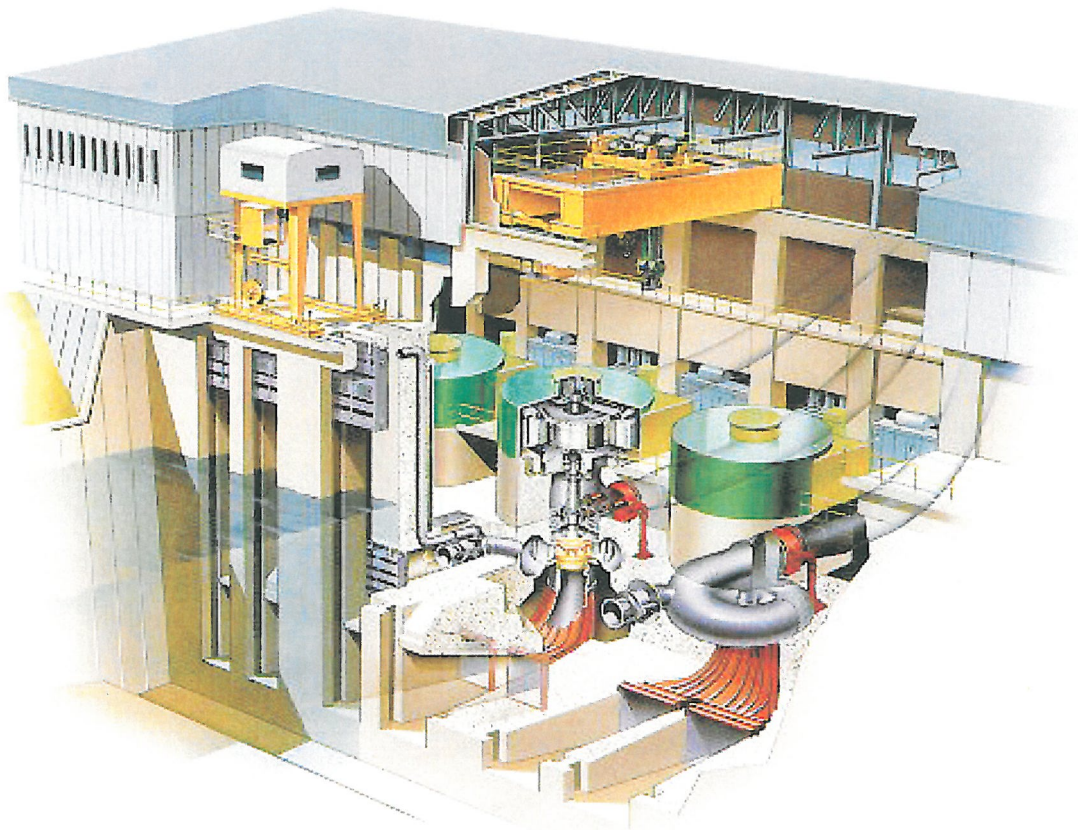


# Regulering av hydrauliske strømningmaskiner



av prof. Hermod Brekke

Vannkraftlaboratoriet NTNU 2003

# Forord

Kompendiet dekker pensum i fag 64176 - Regulering av strømningsmaskiner, ved Institutt for Termisk Energi og Vannkraft, NTNU. Kompendiet gir en beskrivelse av strømningsmaskinsystemers oppbygging og reguleringsfunksjon. Disse emnene blir belyst:

- Omløpstallsregulering og lastregulering ved samkjøring av flere aggregater med sekundære reguleringsfunksjoner.
- Total systemanalyse med svingesjakter, akkumulatorer og roterende masser med innflytelse fra generator, motorer med innflytelse fra henholdsvis turbin eller pumpekarakteristikker og elektrisk system.
- Trykkregulering ved hjelp av omløpstallsregulering av pumper og turbiner og innvirkning fra turbinkarakteristikken.

Kompendiet er overført til *Scientific Word* (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X), med hjelp fra dr. ing. student Roar Vennatrø og vitenskapelige assistenter Terje Bryhni Sivertsen, Abdel Ilah Rhrich, Sven Arild Nyrnes og Kjell Roger Finseraas som har bearbeidet figurer og tekst etter anvisning fra forfatteren.

NTNU, august 1999  
Hermod Brekke



# Innhold

<b>1</b>	<b>INNLEDNING</b>	<b>1</b>
1.1	Regulering av vannturbiner . . . . .	1
1.1.1	Overordnet ytelsesregulering av kraftverk i et område . . . . .	1
1.1.2	Overordnet regulering av de forskjellige aggregat i et kraftverk . . . . .	1
1.1.3	Regulering av turbinaggregatet . . . . .	2
1.1.4	Trepunkts regulator . . . . .	2
1.1.5	Sekundærregulering (fjernstyrt) . . . . .	2
1.1.6	Vern . . . . .	3
1.2	Sekvensstyringer - termineringsbokssystemer . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Start/stopp-sekvensen</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Systemet som skal reguleres</b>	<b>17</b>
3.1	Generator . . . . .	19
3.2	Regulator . . . . .	21
3.2.1	Mekanisk regulator . . . . .	22
3.2.2	Elektrohydraulisk regulator . . . . .	37
3.2.3	Oljehydrauliske komponenter . . . . .	45
3.3	Vannveier . . . . .	47
3.3.1	Massesvingninger. Thoma-kriteriet for reguleringsstabilitet. . . . .	47
3.3.2	Trykkstøt . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Stabilitetsberegninger</b>	<b>69</b>
4.1	Blokkdiagram . . . . .	69
4.2	Stabilitetskriterier . . . . .	70
4.2.1	Teori . . . . .	70
4.2.2	Nyquists stabilitetsteori . . . . .	73
4.2.3	Eksperimentell undersøkelse av regulatorens stabilitetsforhold . . . . .	87
4.3	Nettets innflytelse på turbinregulatoren . . . . .	90

4.3.1	Innflytelse på stabiliteten . . . . .	90
4.3.2	Nettets akselerasjonstid . . . . .	90
4.3.3	Nettets selvregulering - nettstatikken . . . . .	90
4.3.4	Beregning av lastforstillingstiden . . . . .	93
4.4	Igangsetting . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Løsning av Allievis ligninger i tidsplanet</b>	<b>105</b>
5.1	Karakteristikkmetoden . . . . .	105
5.1.1	Randbetingelser for venstre ende . . . . .	111
5.1.2	Randbetingelser for høyre ende . . . . .	113
5.2	Grafisk løsning av trykkstøt i elastiske ledninger . . . . .	116
5.3	Analytisk løsning av trykkstøt i elastiske ledninger . . . . .	125
5.3.1	Allievis ligninger . . . . .	125
5.3.2	Løsning i direkte støtperiode . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Overslagsberegninger av reguleringsgarantier</b>	<b>135</b>
6.1	Stabilitet . . . . .	135
6.1.1	Lukketiden . . . . .	136
6.1.2	Tilnærmelser . . . . .	137
<b>7</b>	<b>Mekanisk-hydraulisk regulator</b>	<b>141</b>
7.1	Pendelen . . . . .	141
7.1.1	Pendelutslaget . . . . .	141
7.1.2	Sentrifugalpendelens dynamiske ligning . . . . .	142
7.2	Den hydrauliske forstyring, med forstyringsservomotor . . . . .	143
7.2.1	Proporsjonalvirkningen . . . . .	144
7.2.2	Hovedsleiden med servomotor og tilbakeføring . . . . .	145
<b>A</b>	<b>Stabilitetsberegninger - trykkregulering av pumper</b>	<b>153</b>
<b>B</b>	<b>Svingesjakt</b>	<b>157</b>
<b>C</b>	<b>Dynamiske sleidkarakteristikker</b>	<b>161</b>
<b>D</b>	<b>Dimensjonering av servomotorer for Francisturbinregulering</b>	<b>165</b>
D.1	Bestemmelse av nødvendig overskytende trykk for reguleringsshastigheten . . . . .	165
D.1.1	Bestemmelse av nødvendig drivende trykk ved statisk betraktning . . . . .	165
D.1.2	For dobbeltvirkende servomotor . . . . .	166
D.1.3	For enkeltvirkende servomotor . . . . .	166

<b>E</b>	<b>Innvirkning fra turbinkarakteristikk og omløpstall på trykkstøt i rørledningen</b>	<b>169</b>
<b>F</b>	<b>Illustration of the iteration steps in computation</b>	<b>171</b>
<b>G</b>	<b>Vannveiens transferfunksjon på matriseform</b>	<b>177</b>
<b>H</b>	<b>Allievis ligninger utledet fra Euler's ligning</b>	<b>187</b>
H.1	Friksjon fra Navier-Stoke's ligning . . . . .	189
H.2	Beregning av bølgehastighet -a- for sirkulære rør . . . . .	190



# Kapittel 1

## INNLEDNING

### 1.1 Regulering av vannturbiner

Regulering av vannturbiner er bygget opp hierarkisk i overordnede og underordnede reguleringsystem. Alle reguleringsystem er underlagt system av vern som stopper aggregatene eller kopler ut kraftlinjer styrt av feilmeldinger.

#### 1.1.1 Overordnet ytelsesregulering av kraftverk i et område

Større kraftverk og mindre kraftverk i et område er vanligvis samkjørt i et system, i dag gjerne komputerkontrollert. Områdene i Norge var tidligere underlagt Samkjøringen. Oppgavene med å distribuere kraft innenlands og utenlands ivaretas nå av Statnett, som er et stats eid selskap utskilt fra Statkraft. Vi har i tillegg en norsk-svensk kraftbørs som besørger utveksling av kraft mellom Norge og Sverige. ”Tørkerammede” områder i landet kan nå som tidligere få tilført kraft fra mer nedbørrike områder, men i dag etter børsprinsippet som under tørre år gir høyere priser. ”Toppkraft” kan også selges til for eksempel Danmark om dagen mens vi importerer ”billigere” overskudds varmekraft, som ikke kan reguleres, om natten.

#### 1.1.2 Overordnet regulering av de forskjellige aggregat i et kraftverk

De forskjellige turbinaggregatene i et kraftverk kan samkjøres eller operere parallelt ved at statikken, eller ”sakkingsgraden”, innstilles slik at de forskjellige aggregat tar den ønskede del av samlet effekt behov.

En annen og mer brukt måte er å installere en stasjonsregulator (joint control) i stasjonen som styrer effekten på de forskjellige aggregater enten prediktert ved hjelp av en computer eller via manuell input av den ønskede ytelse på de forskjellige maskiner, som alle har en høy statikk og dermed følger lastvariasjonssignalet meget nøyaktig (se senere kapittel om statikk).

### 1.1.3 Regulering av turbinaggregatet

Turbin-generator aggregatet er regulert av en turbinregulator som virker som en omløpstallsregulator når aggregatet regulerer på isolert nett, og det ikke er tilkoplede andre enheter, eller som dominerende maskin i et lite nett.

Statikken innstilles på null slik at den dominerende maskinen tar hele lastvariasjonen og de andre maskinene har statikken større enn null, og dermed har konstant ytelse så lenge frekvensen i nettet er konstant. Ved store belastningsvariasjoner vil imidlertid frekvensen variere temporært, og alle maskiner vil ta del i reguleringen under innsvingningen til riktig frekvens, men til slutt vil maskinen med null statikk ta hele lastendringen og de andre maskinene kommer tilbake til konstantlast.

Når aggregatet er tilkoplede et stort nett, slik at effekten på aggregatet er liten i forhold til hele nettet, vil nettfrekvensen bli konstant og turbinregulatorens funksjon bli *lastregulering* av aggregatet. Dette oppnås ved at regulatoren innstilles med statikk, dvs. lasten er omvendt proporsjonal med omløpstallet på aggregatet, slik at lasten øker når nettfrekvensen synker. Ved å senke eller heve karakteristikklinsen på regulatoren, kan vi også forandre ytelsen ved en konstant nettfrekvens. Dette kalles lastregulering. Ved en overordnet stasjonsregulator vil lastreguleringen for de forskjellige aggregatene styres av denne.

I tillegg til turbinregulatoren er generatorspenningene regulert av en spenningsregulator som i isolert drift har stor betydning for omløpstallsreguleringen, særlig om stabiliteten i systemet er dårlig.

### 1.1.4 Trepunkts regulator

Små turbiner og turbiner som aldri vil bli tilkoplede et isolert nett med krav om frekvensregulering, utstyres vanligvis med en såkalt trepunkts regulator. Denne regulatoren utgjør en del av apparatlegget tilkoplede innfasingsautomatikken, som normalt gir signal til en enkel pådragsregulator om å øke eller minske pådraget og dermed omløpstallet.

For en turbin med trepunkts regulator blir et "ett-trinns" signal sendt til den elektrohydrauliske forsterkeren foran på hovedservomotor, som trinnavis går i lukkeretning ved for høyt omløpstall og omvendt ved for lavt omløpstall. På denne måten kan omløpstallet innstilles synkront med nettfrekvensen og muliggjøre innfasing på nettet. En trepunkts regulator kan ikke kjøre på eget nett, og dersom aggregatet blir frakoplede nettet må turbinen gå til stopp og startes opp på nytt. En turbin med *turbinregulator* vil gå til tomgangsstilling med et konstant omløpstall om generatorbelastningen frakoples, og kan dermed fases inn igjen fra tomgang, noe som tar mye kortere tid. Trepunktsregulatoren er ikke behandlet i dette kompendiet.

### 1.1.5 Sekundærregulering (fjernstyrt)

Sekundærregulering kan være en vannstandsregulering av et reservoar i en elv eller en fjernstyring ut fra andre sekundærbehov som minstevannføring i en elv o.l. Sekundærregulering har man i alle hierarkier.

### 1.1.6 Vern

Alle aggregater, transformatorer og kraftlinjer er utstyrt med vern som utløses av følere via forsterkere i tilfelle feil på systemene. Feilmeldingene gir varsel og stopp på aggregatene eller alternativt frakopling av linjer eller last, avhengig av type feil og konsekvensene av feilen.

Vernet ligger i alle lag av hierarkiet i kontrollsystemet og overprøver alle reguleringssignaler. Det betyr at hvis vi har en feil på et lager i et aggregat så får regulatoren et signal som går direkte til et stengesystem som kopler ut eventuelle åpnesignaler fra reguleringssystemet inntil feilen er utbedret. Vi får ”svarte” linjer, selv om dette er uønsket, slik at for eksempel et lagerhavari som ville medføre langvarig stopp unngås.

## 1.2 Sekvensstyringer - termineringsbokssystemer

Start og stopp av turbinaggregater skjer automatisert i fastlagt rekkefølge. Dette kalles sekvensstyring. Sekvensstyringen var tidligere oppbygd ved hjelp av releer og brytere, men i dag brukes mikrobrytere og programmerbare logiske computere. Hele systemet kalles Programmerbart Logisk System (PLS).

Fordelene med de programmerbare logiske systemene er at man lett kan omprogrammere og forandre sekvensen. Dersom vi setter opp en liste over reguleringstypene etter hvilken prioritet de har i systemet (utenom vern, som opererer som et brannvern), vil vi få følgende hierarki fra regionsystemet og ned til turbinregulatoren:

Overordnet kontrollsystem	-Signaler fra regionsystemet
Stasjonsregulator	-Apparatanlegg for flere turbiner
Turbinregulering	-Omløpstallsregulering
	-Lastregulering

I tillegg har vi stasjonsregulator for flere turbiner og vannstandsregulering og andre typer sekundærregulering ved lastregulering.

*Overordnet alle disse funksjoner ligger **vern**, som griper inn og stopper aggregatene om det er noe galt, eller stenger strømmen til linjene dersom det er feil i systemet.*

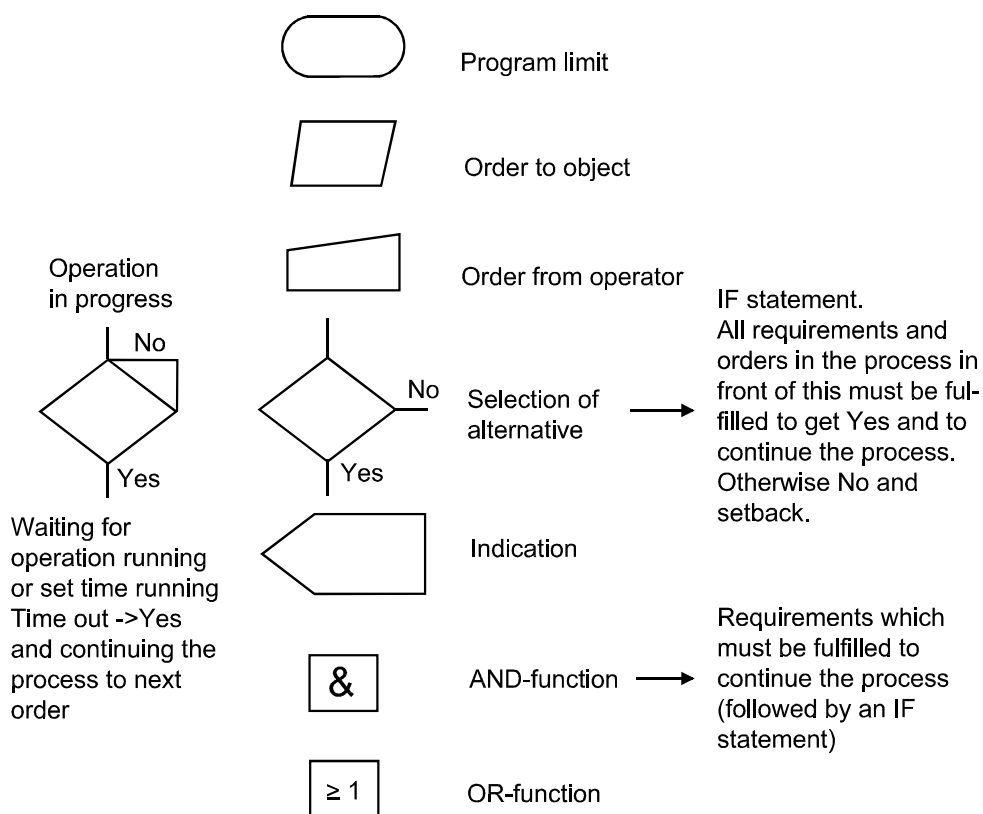
Det viktigste element er vern av anlegget, som tar seg av sikkerheten. Deretter kommer reguleringen av turbinen og systemet. Dersom vi har vannstandsregulering eller andre typer sekundærregulering vil disse også innenfor visse grenser ha høyere prioritet enn krav til effektkjøring fra brukersiden, fordi krav til vannstand oftest er konsesjonsbetinget. I de neste kapitlene skal vi se nærmere på de forskjellige reguleringstypene (reguleringsnivåene).



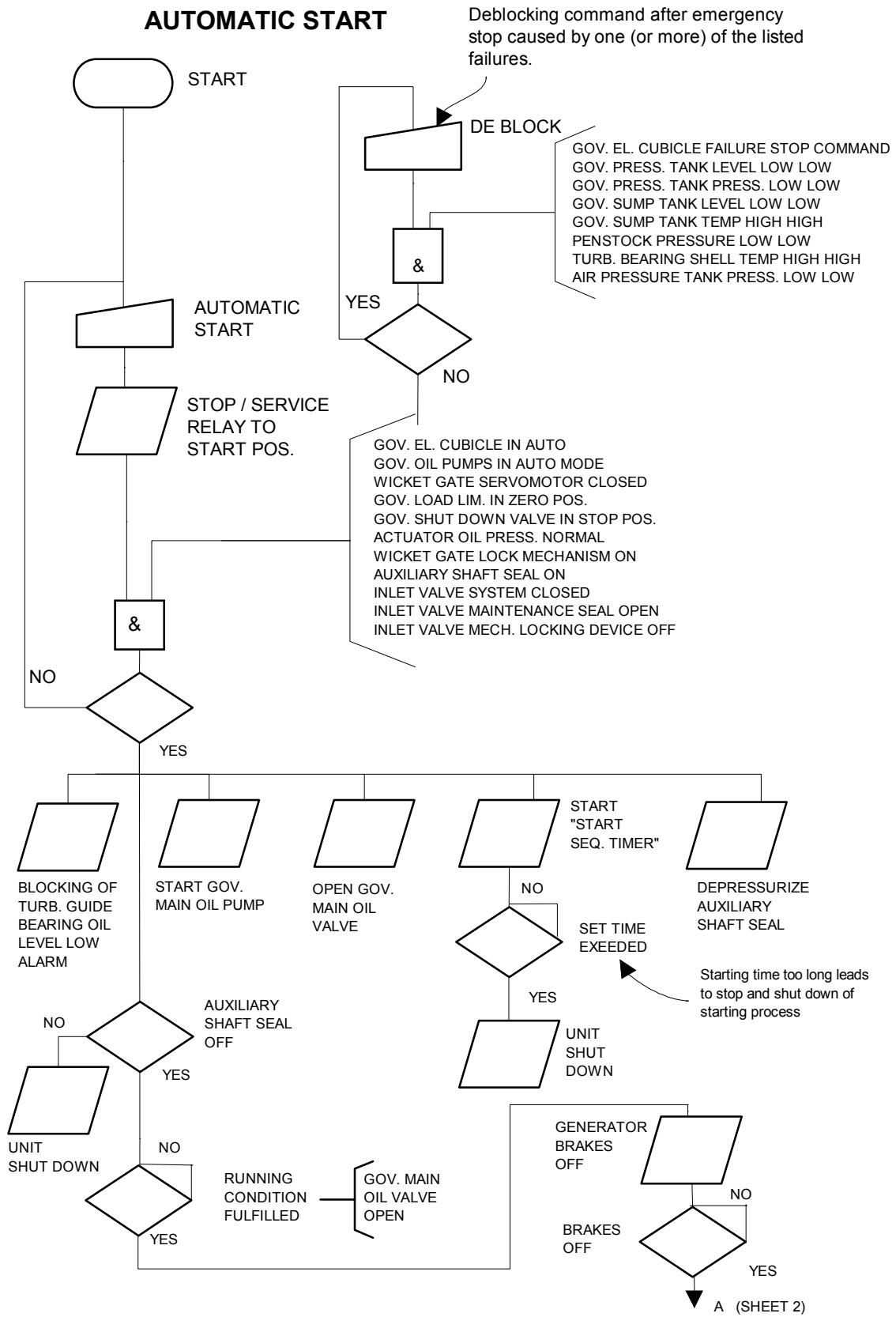
# Kapittel 2

## Start/stopp-sekvensen

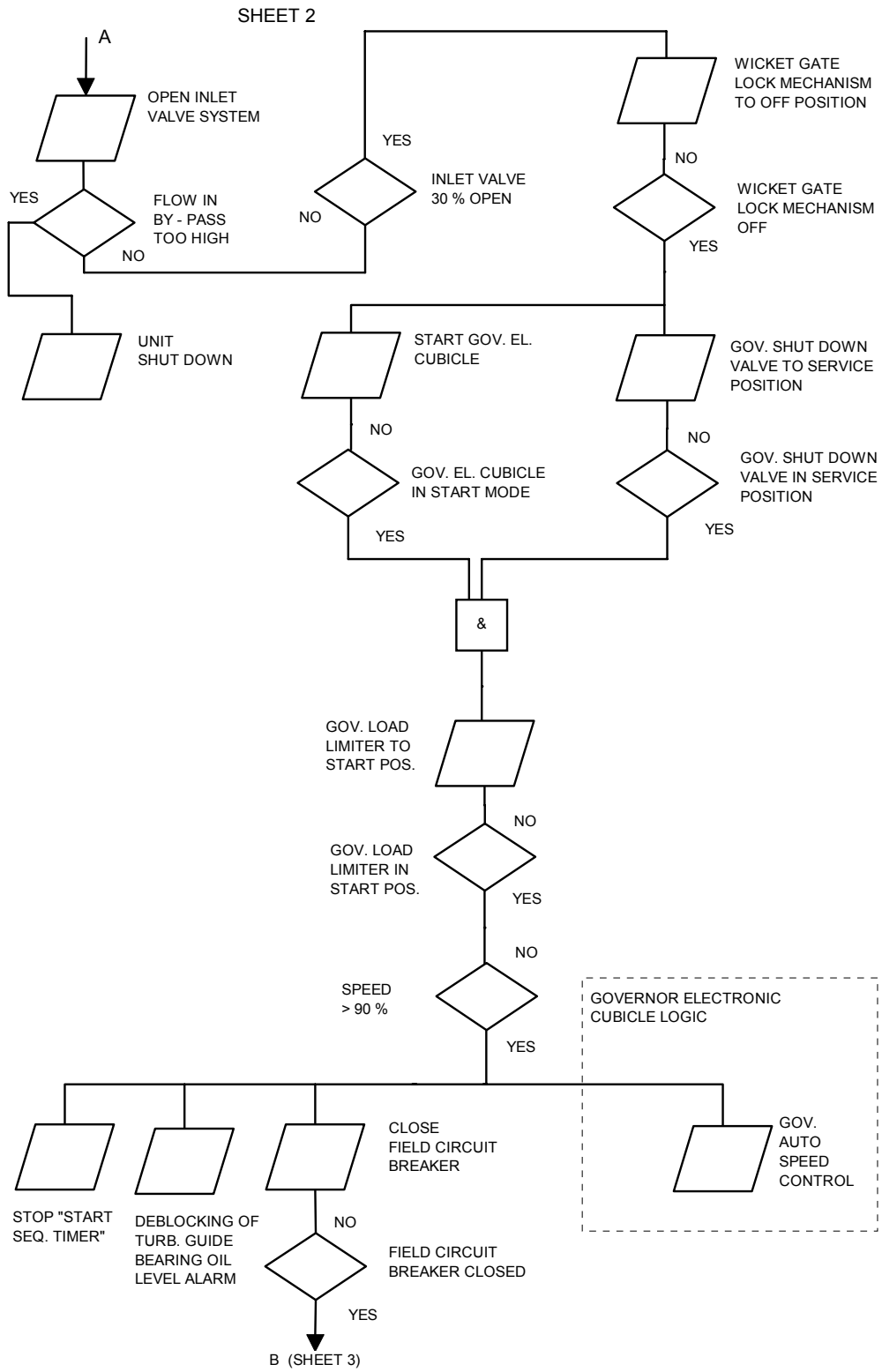
I dette kapitlet blir flytdiagram for start/stopp-sekvensene vist. Det er mye som må sjekkes og være i orden før maskinen kan startes eller stoppes. I figur (2.6) er diagrammet for hovedkontrollsystemet vist. I tillegg er det vist hva en av "boksene" inneholder. I figur (2.1) presenteres noen av de mest brukte elementene i flytdiagrammene som er vist i dette kapitlet. I figurene (2.2) - (2.4) presenteres et eksempel på et flytskjema for en automatisk oppstart prosedyre. I figur (2.5) presenteres et eksempel på et flytskjema for en automatisk stopp prosedyre.



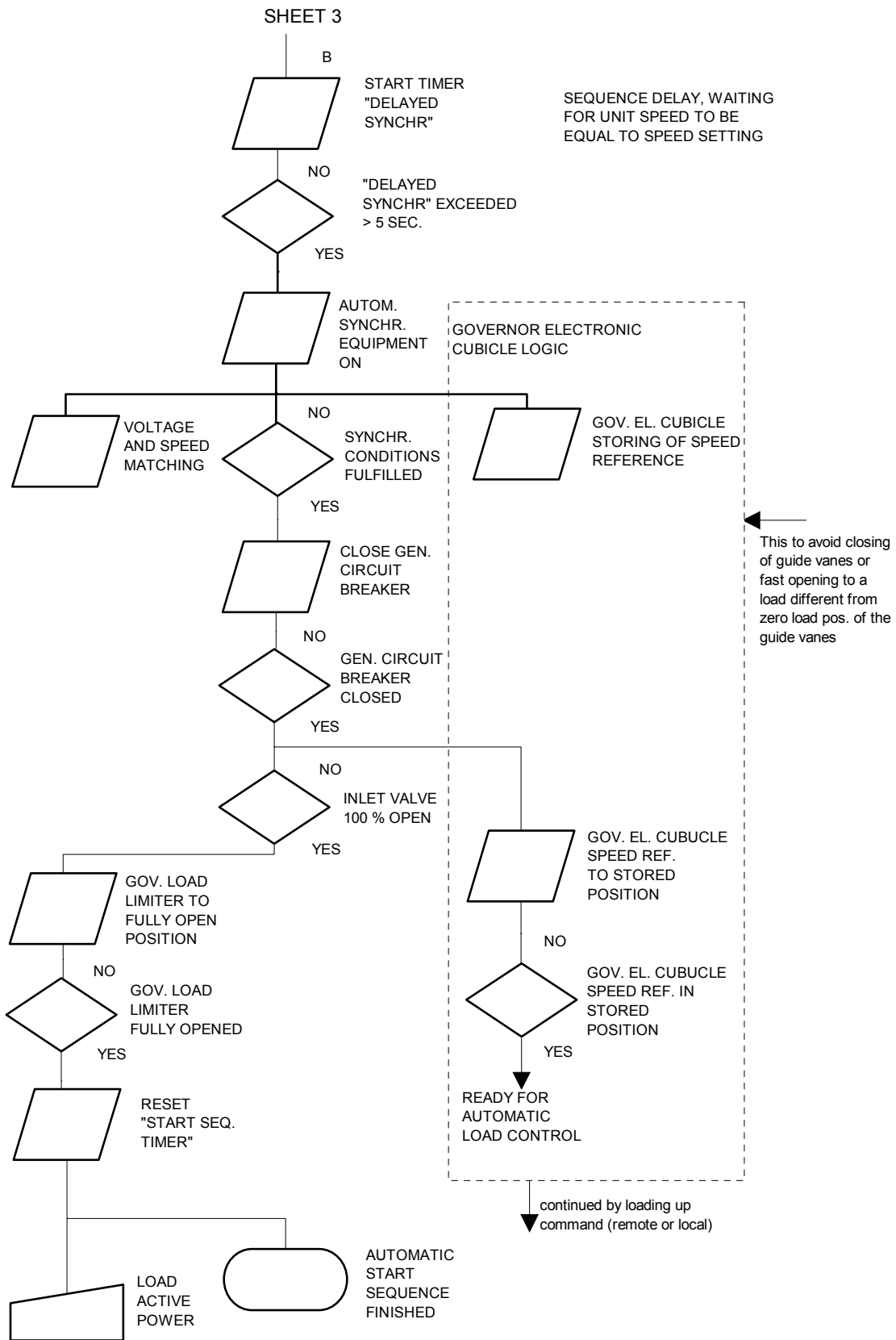
Figur 2.1: Beskrivelse av elementer i flytdiagrammene.



Figur 2.2: Flyttdiagram, start

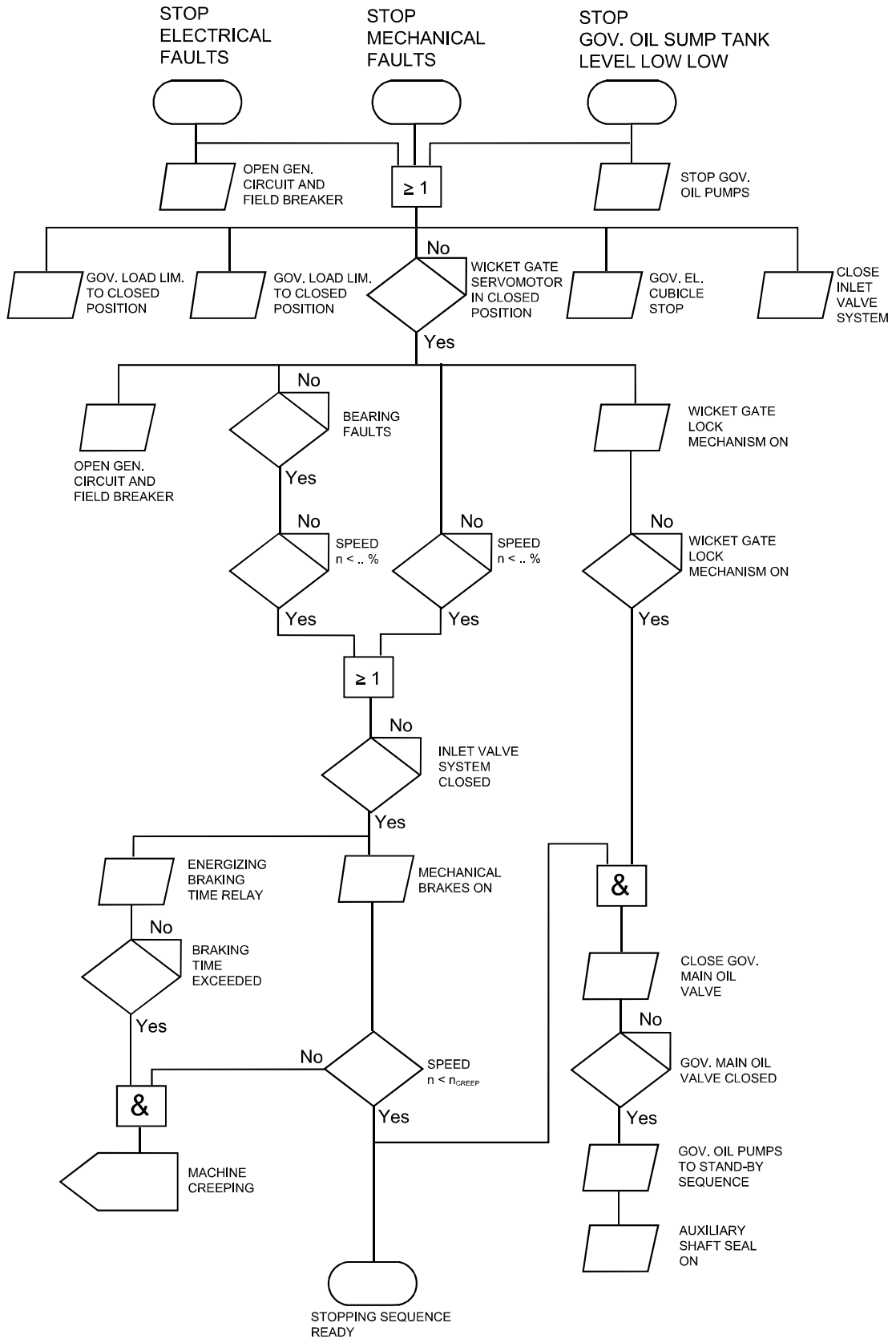


Figur 2.3: Sheet 2



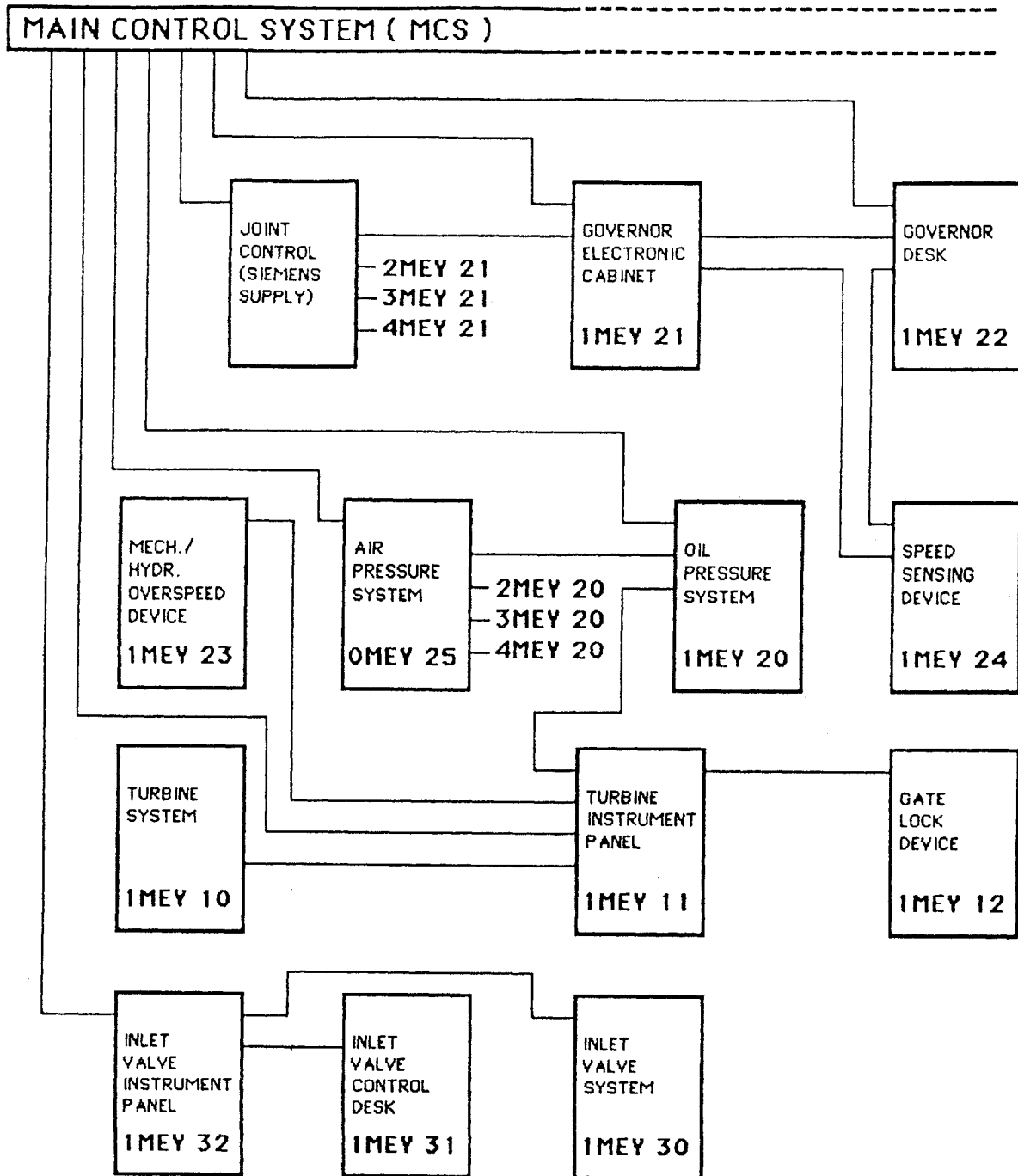
Figur 2.4: Sheet 3

# STOP SEQUENCES

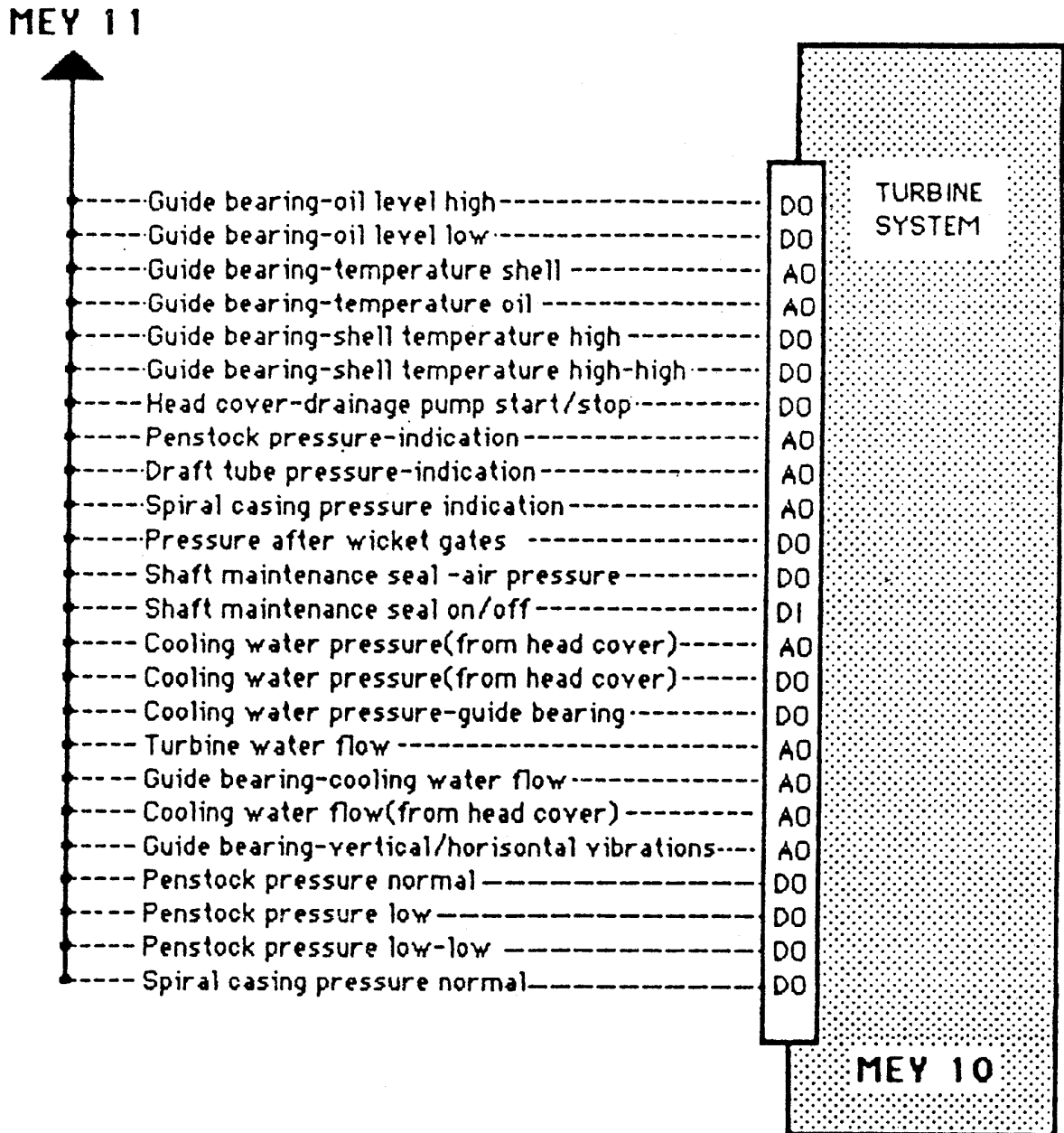


Figur 2.5: Stoppsekvenser.

TURBINE, GOVERNOR AND INLET VALVE  
OVERALL CABLING DIAGRAM



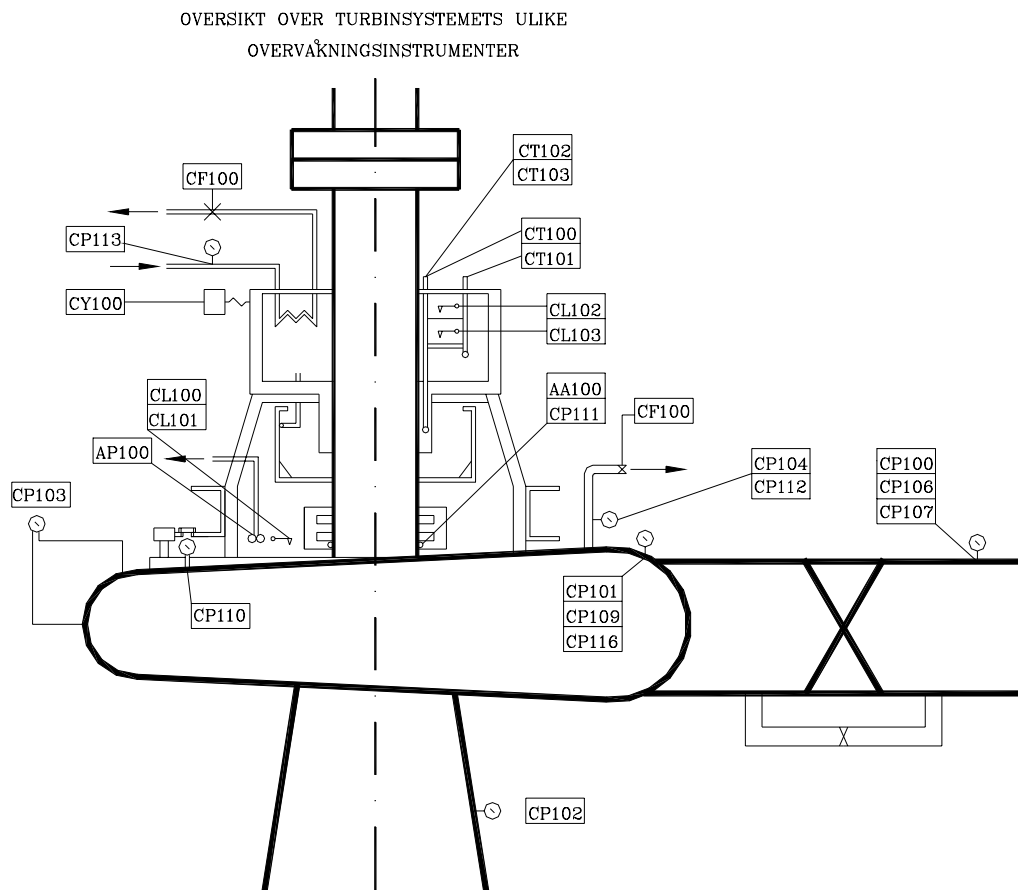
Figur 2.6: Forbindelser mellom termineringsbokser for forskjellige underordnede systemer slik som turbinsystem MEY 11, beskrevet i neste figur.



#### SYMBOL EXPLANATION

Analog input	-	AI
Analog output	-	AO
Digital input	-	DI
Digital output	-	DO

Figur 2.7: Detalj av termineringsliste for MEY 11 vist i forrige figur.



Figur 2.8: Oversikt over turbinsystemets ulike overvåkningsinstrumenter.

Nr NO MEY 10 -	Beskrivelse DESCRIPTION (Koplings plan ref. nr.) (WIRING DIAGRAM REF NO)	Type / Elektr. Data TYPE / ELECTR. DATA	Funksjon FUNCTION			Anmerkning (Plasering) NOTE (LOCATION)
			A	B	C	
	<u>TURBINE SYSTEM</u>					
AA 100	Solenoid valve Auxiliary shaft seal on/off					
AP 100	Motor Drainage pump, turbine head cover	SERO-SNS 31 WY 380 VAC, 1.1 kW				
CF 100	Flowmeter Cooling water flow (From head cover)	Input VDC Output 4-20 mA				
CF 101	Flowmeter Guide bearing, cooling water flow	Input VDC Output				
CL 100	Level switch Drainage pump stop	GEMS LS-800E 240 VAC, 0.4 A				
CL 101	Level switch Drainage pump start	GEMS LS-800E 240 VAC, 0.4 A				
CL 102	Level switch Guide bearing, oil level high	GEMS LS-800E 240 VDC, 0.4 A				
CL 103	Level switch Guide bearing, oil level low	GEMS LS-800E 240 VDC, 0.4 A				
CP 100	Pressure transmitter Penstock pressure	Kamstrup Input 24 VDC Output 4-20 mA				
CP 101	Pressure transmitter Spiral casing pressure	Kamstrup Input 24 VDC Output 4-20 mA				
CP 102	Pressure transmitter Draft tube pressure	Kamstrup Input 24 VDC Output 4-20 mA				
Anmerkning NOTE		Referanseliste / REFERENCE LIST				
		KYÆRNER BRUG A/S OSLO NORWAY		Bl. av 4 blad SH 2 OF 4 SHTS		
LUBUGE 2 REF.LIST 1 TURB 860318		Dato DATE 85.08.20	Tegnet DRAWN Andrø	Nummer NUMBER 263042		
		Kontr. CHECKED	Godkjent APP'D	Format A SIZE A 4		

Figur 2.9: Referanseliste fra Lubuge kraftverk, side 2 (Kværner Brug A/S).

Nr NO MEY 10 -	Beskrivelse DESCRIPTION (Koplings plan ref. nr.) (WIRING DIAGRAM REF NO)	Type / Elektr. Data TYPE / ELECTR. DATA	Funksjon FUNCTION			Anmerkning (Plasering) NOTE (LOCATION)
			A	B	C	
	<u>TURBINE SYSTEM</u>					
CP 103	Differential pressure transmitter Turbine water flow	Kamstrup Input 24 VDC Output 4-20 mA				
CP 104	Pressure transmitter Cooling water pressure	Kamstrup Input 24 VDC Output 4-20 mA				
CP 106	Pressure switch Penstock pressure normal	Sauter DFC 17B 250 VDC, 0.1 A				
CP 107	Pressure switch Penstock pressure low	Sauter DFC 17B 250 VDC, 0.1 A				
CP 108	Pressure switch Penstock pressure low-low	Sauter DFC 17B 250 VDC, 0.1 A				
CP 109	Pressure switch Spiral casing pressure	Sauter DFC 17B 250 VDC, 0.1 A				
CP 110	Pressure switch Pressure after wicket gates	Sauter DFC 17B 250 VDC, 0.1 A				
CP 111	Pressure switch Pressure shaft maintenance seal	Sauter DFC 17B 250 VDC, 0.1 A				
CP 112	Pressure switch Cooling water pressure	Sauter DFC 17B 250 VDC, 0.1 A				
CP 113	Pressure switch Guide bearing, cooling water pressure	Sauter DFC 17B 250 VDC, 0.1 A				
Anmerkning NOTE		Referanseliste / REFERENCE LIST				
		KYÆRNER BRUG A/S OSLO NORWAY		Bl. 3 av 4 blad SH OF SHTS		
LUBUGE 2 REF.LIST 2 TURB 860318		Dato DATE 85.08.20	Tegnet DRAWN Andrø	Nummer NUMBER 263042		
		Kontr. CHECKED	Godkjent APP'D	Format A SIZE A 4		

Figur 2.10: Referanseliste fra Lubuge kraftverk, side 3 (Kværner Brug A/S).

Nr NO MEY 10 -	Beskrivelse DESCRIPTION (Koplings plan ref. nr.) (WIRING DIAGRAM REF NO)	Type / Elektr. Data TYPE / ELECTR. DATA	Funksjon FUNCTION			Anmerkning (Plasering) NOTE (LOCATION)
			A	B	C	
	<u>TURBINE SYSTEM</u>					
CT 100	Resistor element Guide bearing oil temperature	NEBB A 33076 0°C=100 ohm 100°C=138,5 ohm				
CT 101	Resistor element Guide bearing shell temperature	NEBB A 33076 0°C=100 ohm 100°C=138,5 ohm				
CT 102	Thermometer Guide bearing shell temperature high	Clausen, Kaldager & Co 704/KG/17BY 380 V, 10 VA				
CT 103	Thermometer Guide bearing shell temperature high-high	Clausen, Kaldager & Co 704/KG/17BY 380 V, 10 VA				
CY 100	Velocity transducer Vibration indicator	Vibrationsteknik AB VT 1117				
Anmerkning NOTE		Referanseliste / REFERENCE LIST				
		KYÆRNER BRUG A/S OSLO NORWAY	B1. SH 4	av OF 4	blad SHTS	
LUBUGE 2 REF LIST 3 TURB 850820		Dato DATE 85.08.20	Tegnet DRAWN Andrø	Nummer NUMBER 263042		
		Kontr. CHECKED <i>Cr. Fo.</i>	Godkjent APP'D <i>Andrø</i>	Format A SIZE A 4		

Figur 2.11: Referanseliste fra Lubuge kraftverk, side 4 (Kværner Brug A/S).

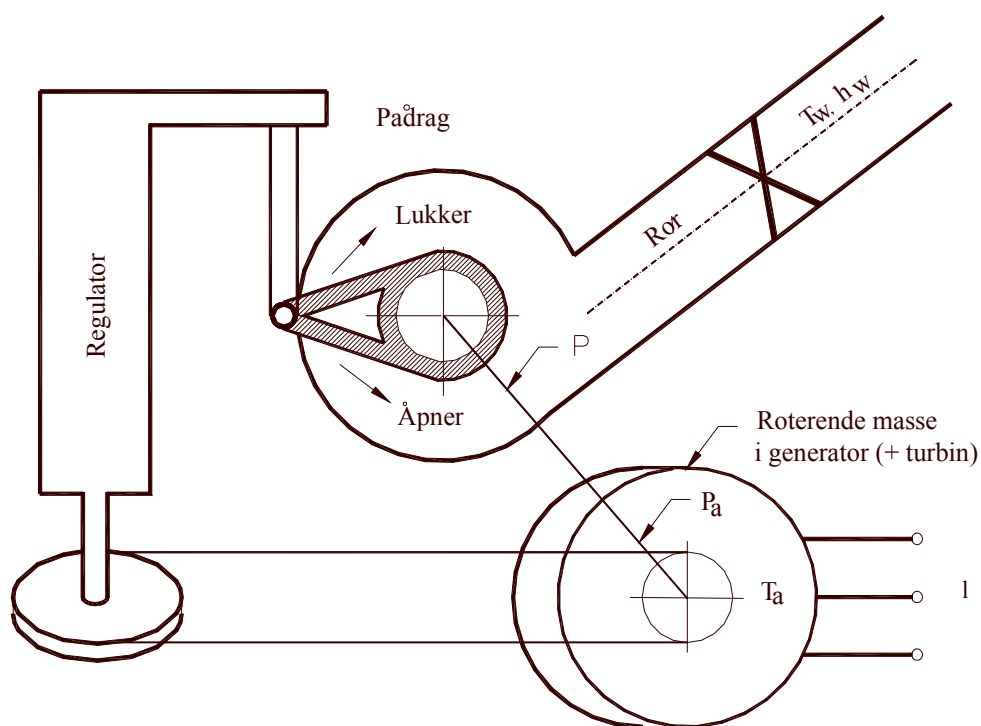


## Kapittel 3

# Systemet som skal reguleres

Turbinreguleringen deles i to deler:

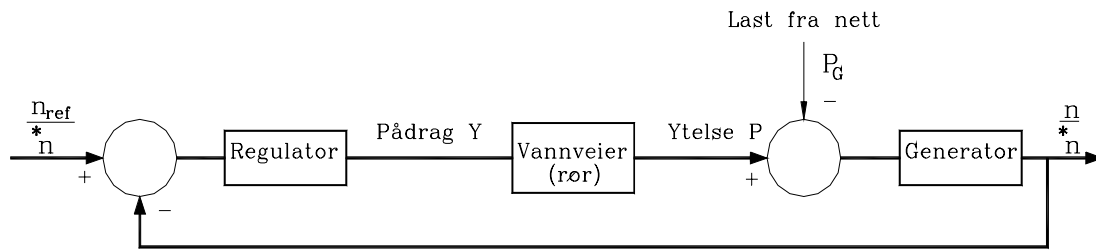
- Omløpstallsregulering (når turbinen går på eget nett)
- Lastregulering (når turbinen er koplet til et større nett i samkjøring ved hjelp av statikk)



Figur 3.1: Skjematisk fremstilling av reguleringsystemet.

Vi skal komme tilbake til de to reguleringstypene senere, men i det påfølgende vil vi anta at vi har *omløpstallsregulering*. Vårt reguleringsystem kan skjematisk fremstilles som i figur (3.1).

Dersom vi setter dette systemet opp i et blokkdiagram vil det bli seende ut som i figur (3.2). Antar at vi har et referanseomløpstall  $n_{ref}$  på generator/turbin.



Figur 3.2: Blokkdiagram for systemet er vist i figur 3.1.

Vi skal i det påfølgende ta for oss de tre "boksene":

- Generator
- Regulator
- Vannveier (rør)

Vi starter med å se på generatoren.

### 3.1 Generator

Vi ønsker å se på hvilken innflytelse generatoren har på sitt eget omløpstall. Bidraget generatoren har kommer i form av dens egen svingmasse. Vi regner også med turbinens svingmasse her. For roterende masse har vi at

$$M = J \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{J}, \quad \omega = \frac{n\pi}{30} \quad (3.1)$$

der

$$\begin{aligned} M &= \text{dreiemoment [Nm]} \\ {}^0M &= \text{dreiemoment ved full ytelse med nominelt omløpstall [Nm]} \\ J &= \text{svingmassen} = \text{massetregghetsmoment [kg m}^2\text{]} \\ \omega &= \text{vinkelhastighet [rad/s]} \\ n &= \text{omløpstall [omdr/min]} \end{aligned}$$

Dette gir:

$$d\omega = \frac{{}^0M}{J} dt \quad (3.2)$$

Vi integrerer nå fra 0 til  $T_a$  der  $T_a$  er tiden det tar å akselerere turbinen fra stillstand til nominelt omløpstall eller nominell vinkelhastighet  ${}^*\omega$  ved full ytelse  ${}^0P$  (d.v.s. fullt moment):

$$\int_0^{*\omega} d\omega = \int_0^{T_a} \frac{{}^0M}{J} dt = \frac{{}^0M}{J} \int_0^{T_a} dt \quad (3.3)$$

$${}^*\omega = \frac{{}^0M}{J} T_a \Rightarrow T_a = \frac{J}{{}^0M} {}^*\omega \quad (3.4)$$

Har pr. definisjon at  ${}^0P \simeq {}^0M \cdot {}^*\omega$

For  $\frac{\omega}{{}^*\omega} \approx 1$ , d.v.s. små avvik i omløpstallet ( $\Delta\omega \ll {}^*\omega$ ) får vi ved å sette inn for  ${}^0M = \frac{{}^0P}{{}^*\omega}$  (merk for  $\omega < {}^*\omega$  og  $P < {}^0P$  vil vi også kunne få at  ${}^0M = \frac{{}^0P}{{}^*\omega} = \text{konstant}$ . For  $P = {}^0P$  må vi imidlertid ha  $\omega \approx {}^*\omega$ ). Akselerasjonstiden  $T_a$  blir da:

$$T_a = J \frac{{}^*\omega^2}{{}^0P} \quad (3.5)$$

Svingmassen eller massetregghetsmomentet ( $J$ ) for en generator beregnes normalt som svingmasse av en ring (hulsylinder) med ytre radius  $R$ , tykkelse  $\Delta R$ , og ”dybde”  $h$  inn i papiplanet. Radiusen  $R$  må ikke forveksles med treghetsradien for en homogen skive. (Se kap. 4.4 i ”Dynamikk” av F. Irgens). Dersom vi videre antar at det er liten forskjell mellom ringens ytre og indre radius kan masstregghetsmomentet uttrykkes ved en midlere radius,  $r_m$ :

$$J = mr_m^2 \quad (3.6)$$

Antar her at  $r_m = R$ . Momentet blir da:

$$M = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = mR^2 \frac{d\omega}{dt} = \rho 2\pi R \Delta R h R^2 \frac{d\omega}{dt} \quad (3.7)$$

Setter  $\rho 2\pi R \Delta R = G$  og  $h = 1$  og får:

$$M = \frac{G \cdot D^2}{4} \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (3.8)$$

Ved å sette inn for  $\omega = \frac{n\pi}{30}$  i ligning (3.5), får vi:

$$T_a = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 \cdot \frac{G \cdot D^2 \cdot n^2}{4 \cdot 0P} \quad (3.9)$$

Her er  $D =$  treghetsdiameteren og  $J = \frac{GD^2}{4}$ . Og  $GD^2$  er svingmassen i  $[kg m^2]$ . Ytelsen, eller effekten ( $P$ ) for et turbinaggregat oppgis normalt i  $[KW]$  og ikke i  $[W]$ , noe som forårsaker at vi må dividere med en faktor på  $10^3$  i ligning (3.9).

Vi ønsker også å se på hva som skjer dersom det inntreffer en forandring i dreiemomentet  $\Delta M$ , og ser hva som skjer ved et påslag:

Endring i omløpstall:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta M}{J} = \left(\frac{\Delta M}{0M}\right) \frac{0M}{J} = \left(\frac{\Delta M}{0M}\right) \frac{* \omega}{T_a} \quad (3.10)$$

der  $\Delta M =$  overskytende dreiemoment ved en minskning av belastningen på generatoren. Vi setter, på grunnlag av at  $0M \approx \frac{0P}{* \omega}$  for  $\Delta \omega \ll * \omega$ :

$$\frac{\Delta M}{0M} = \frac{\Delta P}{0P} = \underline{P} - \underline{P}_G \quad (3.11)$$

der  $\Delta P = P - P_G$ , d.v.s. vi regner med relative verdier

$$\underline{P} = \frac{P}{0P} \quad \text{og} \quad \underline{P}_G = \frac{P_G}{0P} \quad (3.12)$$

Setter inn i ligning (3.10) og får:

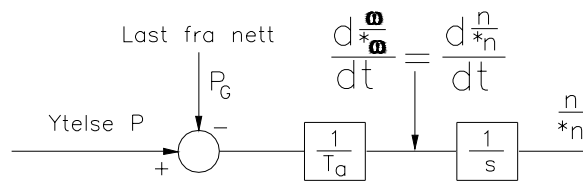
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta P}{0P} \cdot \frac{* \omega}{T_a} = (\underline{P} - \underline{P}_G) \frac{* \omega}{T_a} \quad (3.13)$$

eller etter innføring av dimensjonsløse relative størrelser:

$$\frac{d\left(\frac{\omega}{* \omega}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{n}{* n}\right)}{dt} = (\underline{P} - \underline{P}_G) \frac{1}{T_a} \quad (3.14)$$

Settes disse ligninger inn i et blokkdiagram får vi:

Med Laplace-transformasjon får vi blokkdiagrammet for hele systemet som vist i figur (3.3). Fullstendig blokkdiagram er vist i figur (3.4).



Figur 3.3: Blokkdiagram for turbinytelse og generatorlast, Laplace-transformert.

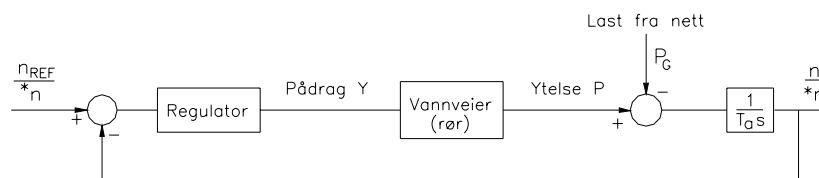
## 3.2 Regulator

Regulatorens oppgave er å gjøre avviket i omløpstallet  $\varepsilon = (n_{ref} - n)$  minst mulig. Dette kan kanskje virke som en smal sak, men etter at vi har gjennomgått vannveienes innvirkning på systemet vil det vise seg at det blir mer komplisert enn vi setter pris på. Før vi ser på forskjellige typer regulatorer skal vi definere noen størrelser:

- $n$  = omløpstallet på aggregatet (turbinen)
- $n_{ref}$  = innstilt omløpstall på pendelfjær (ønsket turtall)
- $n$  = omløpstall tilsvarende øvre anslag på pendel
- $n_u$  = omløpstall tilsvarende nedre anslag på pendel
- $\delta$  = pendelets totale ujevnhetsgrad
- $\varepsilon$  = prosentvis omløpstalls-variasjon på aggregatet (avviket)
- $\hat{a}$  = åpningsgraden

I blokkdiagrammet gjør vi alle variable dimensjonsløse, ved å dividere med den tilsvarende variabel for full ytelse ved beste omløpstall  $*n$ . (D.v.s.  $*n$  er omløpstallet ved maksimal virkningsgrad).

$$\begin{aligned} \underline{n}_{ref} &= \frac{n_{ref}}{*n} & \underline{P} &= \frac{P}{0P} & \text{Ytelse i \% av full ytelse (aktuell dividert} \\ & & & & \text{med nominell d.v.s. fullast)} \\ \delta &= \frac{*n - n_u}{*n} & \underline{P}_G &= \frac{P_G}{0P} & \text{Belastning i \% av full ytelse} \\ \delta_L &= \frac{n_\phi - *n}{*n} & \underline{Y} &= \frac{Y}{0Y} & \text{Pådrag i \% av full ytelse} \\ \varepsilon &= \frac{n_{ref} - n}{*n} \end{aligned}$$



Figur 3.4: Fullstendig blokkdiagram.

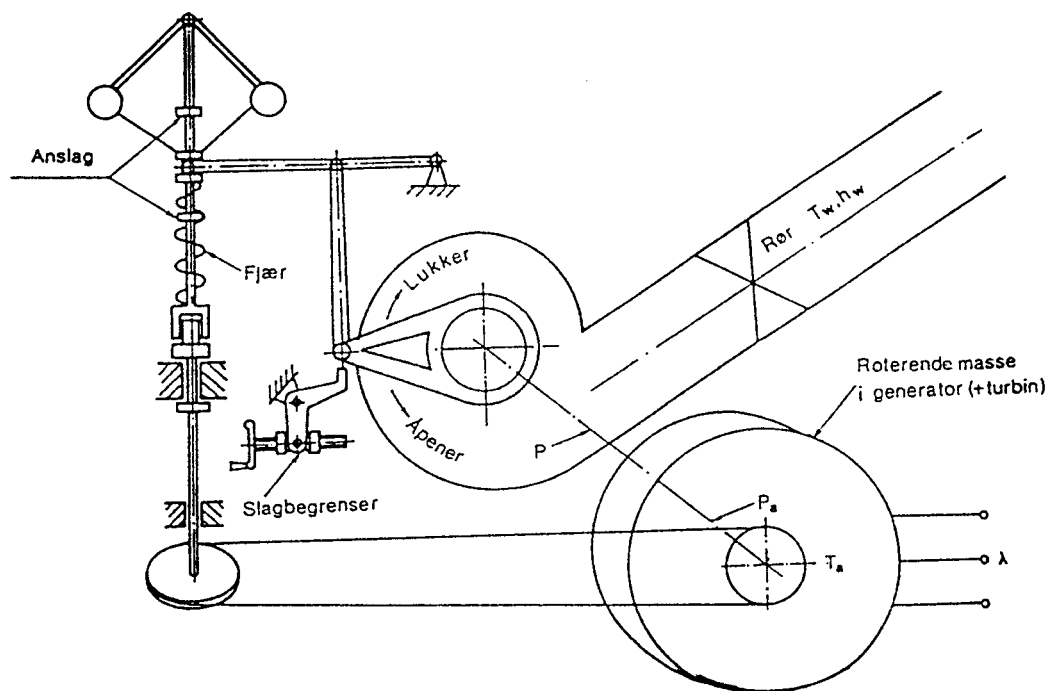
### 3.2.1 Mekanisk regulator

Av mekaniske regulatorer skal vi se på:

- P regulator, proporsjonalregulatorer
- Regulator med hydraulikk
- PI regulator

#### Proporsjonalregulatorer

Den enkleste form for regulator en kan tenke seg er en mekanisk proporsjonal regulator. Denne er vist i figur (3.5). Denne regulatoren er ikke praktisk realiserbar fordi energibehovet som trengs for å regulere en vannturbin er alt for stort til at det nytter å bruke direkte regulering med sentrifugalpendel. Vi trenger en servomotor. Vi starter imidlertid med å se på en enkel regulator og bygger videre på den, for til slutt å få en regulator som tilfredsstillere våre krav. Blokkdiagrammet for systemet, dersom vi ser bort fra vannveiene, er vist i figur (3.6).



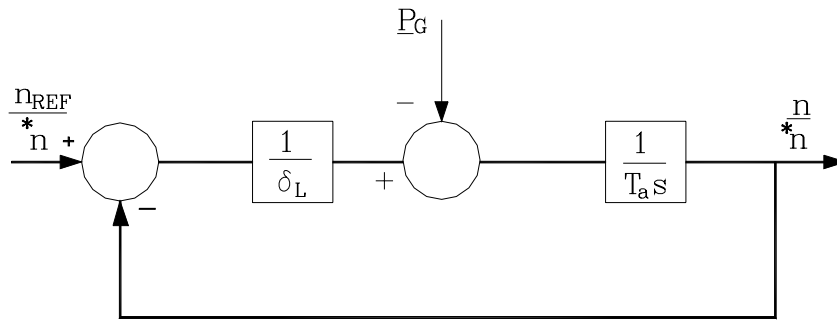
Figur 3.5: Mekanisk proporsjonalregulator.

Dersom vi reduserer blokkdiagrammet i figur (3.6) får vi blokkdiagrammet i figur (3.7).

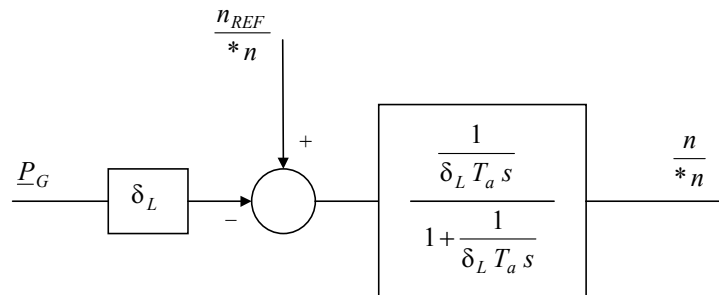
Transferfunksjonen mellom  $\underline{P}_G$  og  $\frac{n}{*n}$  blir som vist i figur (3.8).

Responsten etter et sprang i lasten på  $\Delta \underline{P}_G$  (sprang =  $\frac{1}{s}$ ) blir:

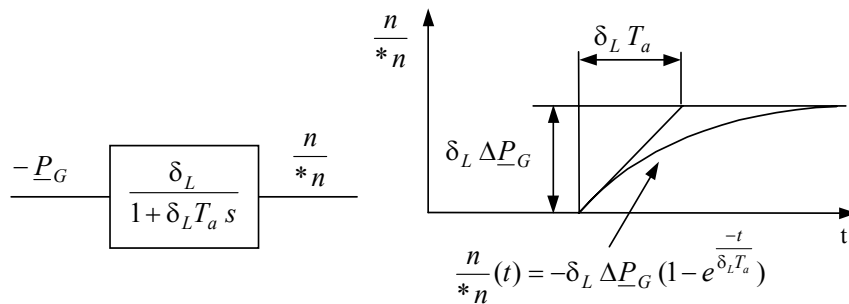
$$\frac{n}{*n}(s) = \frac{-\delta_L \Delta \underline{P}_G}{(1 + \delta_L T_a \cdot s) s} = \frac{-\Delta \underline{P}_G}{T_a \left( \frac{1}{\delta_L T_a} + s \right) s} \quad (3.15)$$



Figur 3.6: Blokkdiagram for systemet dersom vannveiene neglisjeres.



Figur 3.7: Redusert blokkdiagram



Figur 3.8: Transferfunksjonen mellom  $P_G$  og  $\frac{n}{*n}$ . (I tidsplanet til høyre).

i tidsplanet

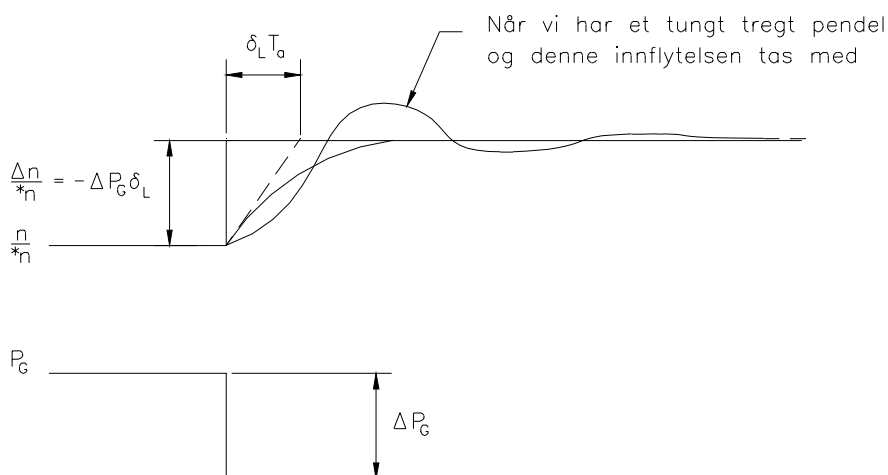
$$\frac{n}{*n}(t) = \frac{-\delta_L \Delta P_G \cdot T_a \cdot e^0}{T_a} + \frac{\delta_L \Delta P_G \cdot T_a \cdot e^{\frac{-t}{\delta_L T_a}}}{T_a} \quad (3.16)$$

$$\frac{n}{*n}(t) = -\delta_L \Delta P_G \left(1 - e^{\frac{-t}{\delta_L T_a}}\right) \quad (3.17)$$

Stasjonærverdien er funnet ved å benytte sluttverditeoremet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{*n}(t) \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{n}{*n}(s) \cdot s \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{-\delta_L \Delta P_G}{(1 + \delta_L T_a \cdot s)} \right\} \quad (3.18)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{*n}(t) \right\} = -\delta_L \Delta P_G \quad (3.19)$$

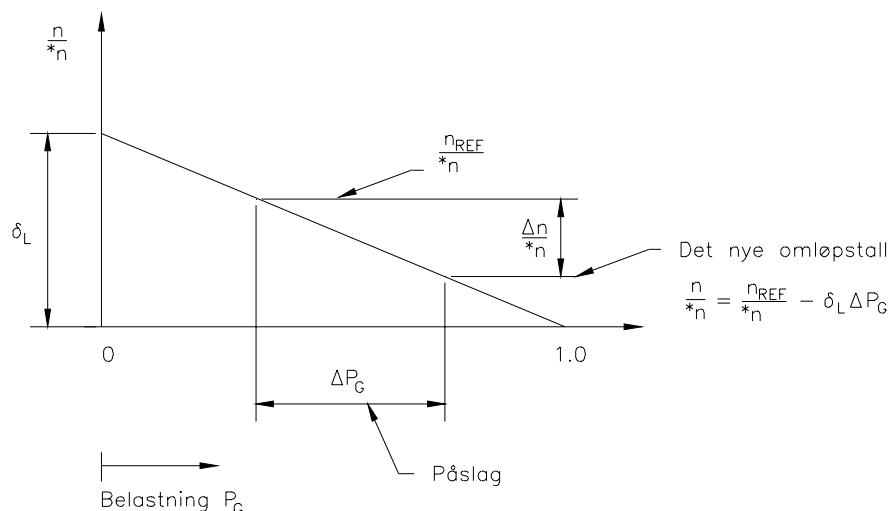


Figur 3.9: Vi ser at omløpstallet stiger når lasten synker, og vi får blivende ujevnhetsgrad.

Begynnelsesverdien finnes ved hjelp av begynnelsesverdi-teoremet ( $t \rightarrow 0$  for  $\omega \rightarrow \infty$ ),  $\frac{n}{*n}(t) = 0$ . Vi vil altså få en regulator med såkalt ”blivende” ujevnhetsgrad eller varig avvik, d.v.s. en regulator med *statikk*. Ved omløpstallsregulering som er beskrevet hittil fører statikken til at omløpstallet *synker* med *økende* pådrag eller ytelse. Ved samkjøring på et stort nett vil imidlertid omløpstallet på generatoren bli tvunget til å være konstant lik nettets frekvens. Statikken vil da holde *ytelsen* konstant på det enkelte aggregat. Ytelsen kan imidlertid stilles ved å forandre omløpstallsinnstillingen, d.v.s. heve eller senke statikklinjen. Vi kommer nærmere tilbake til dette. Hvor stor statikken er avhenger av størrelsen  $\delta_L$ . Jo stivere fjær, jo større  $\delta_L$  og jo større ”blivende” omløpstallsvariasjon (statikk) får vi. Vi kan sette opp diagrammet i figur (3.10) for å belyse dette.

Vi ser at omløpstallet synker etter spranget i belastningen  $\Delta P_G$  (hvis turbinen går på eget nett), og det nye omløpstallet blir:

$$\frac{n}{*n} = \frac{n_{ref}}{*n} + \Delta \left( \frac{n}{*n} \right) \quad (3.20)$$



Figur 3.10: Omløpstall som funksjon av belastning.

Stigningstallet (helningen på linjen) = statikken, og uttrykkes:

$$\frac{-\delta_L}{P_{G,Fullast}} = \frac{\Delta\left(\frac{n}{*n}\right)}{\Delta P_G} \quad (3.21)$$

der  $P_{G,Fullast} = 1$ . Endringen i omløpstallet blir da:

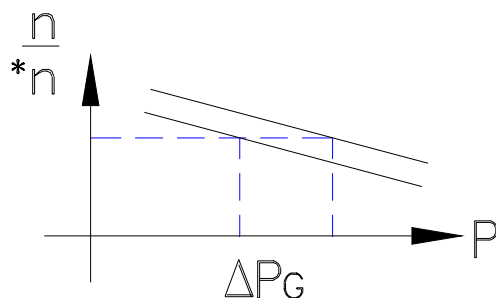
$$\Delta\left(\frac{n}{*n}\right) = -\delta_L \Delta P_G \quad (3.22)$$

Det nye omløpstallet blir dermed:

$$\frac{n}{*n} = \frac{n_{ref}}{*n} - \delta_L \Delta P_G \quad (3.23)$$

Vi ser altså at denne type regulator ikke egner seg som omløpstallsregulator, fordi omløpstallet ikke holdes konstant. *Lastregulering* brukes når mange maskiner kjører på samme nett under samkjøring. Når lasten på nettet øker (for eksempel når mange slår på TV for å se Dagsrevyen) og nettfrekvensen dermed synker så vil statikken på de enkelte maskiner bestemme hvor mye ekstra last de skal ta, se figur (3.10). Det ekstra effektbehovet blir dermed fordelt på de forskjellige maskinene, avhengig av helningen på statikklinjen for de forskjellige turbinene. Hvis den samlede effekten på turbinene i nettet ikke dekker økningen i effektbehovet så vil nettfrekvensen synke dramatisk og nettet kan bryte sammen. For å unngå dette så griper samkjøringen inn og starter opp nye maskiner. For å forandre ytelsen på en turbin ved en fast frekvens kan man også flytte statikklinjen opp eller ned, se figur (3.11). Det gjøres ved å justere lastinnstillingsmekanismen på regulatoren.

Det som skjer er at lasten på maskiner som ikke går på fullast øker, uten at omløpstallet forandres, ved at statikk kurven endres. Nettfrekvensen kan også holdes konstant ved å stille statikken på den største turbinen i nettet på null. Denne maskinen vil da ta hele økningen i nettlasten alene, uten at nettfrekvensen synker. Dette kan imidlertid bare gjøres i små nett som har en dominerende turbin.



Figur 3.11: Forskyvning av statikklinjen.

### Lastfordeling

Når flere turbiner er tilkopleet et isolert nett må regulatorne ha statikkinstilling som gjør at regulatoren virker som en  $P$  - regulator. Turbinaggregatene vil da øke ytelsen dersom nettfrekvensene, og dermed omløpstallet på maskinen, synker. Ytelsesøkningen vil ved en lineær statikk bli proporsjonal med reduksjonen av nettfrekvensen.

Ytelsesøkningen på det enkelte aggregat blir da:

$$\frac{\Delta P}{{}^oP} = \frac{\frac{\Delta n}{*n}}{b_p} \quad (3.24)$$

Her er  ${}^oP$  = fullastytelsen,  $\frac{\Delta n}{*n}$  = dimensjonsløs reduksjonen av nettfrekvensen og  $b_p$  = dimensjonsløs statikkinstilling (internasjonal standard er at statikken oppgis i prosent). Summen av belastning i nettet må bli lik summen av ytelsesøkning på alle aggregatene:

$$\sum_{i=1}^n P_i = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n \quad (3.25)$$

Eksempel:

To turbiner er tilkopleet et eget nett. Den ene turbinen har en statikkinstilling på 5%,  $b_p = 0.05$ . Dette vil si at 5% reduksjon av nettfrekvensen (= 2,5 Hz) vil få turbinregulatoren til å øke ytelsen med 100% eller lik  ${}^oP$ .

Fullastøkning er imidlertid bare mulig om turbinen går i tomgang. Den andre turbinen har en statikkinstilling på 10%. Fullastytelsen på første turbin er  $P_1 = 50$  [MW], og på den andre turbinen  $P_2 = 100$  [MW].

a) Hvor stor blir lastøkningen på de to turbinene hvis belastningen på nettet øker med  $\sum P = 50$  [MW]?

b) Hvor mye vil nettfrekvensen synke?

Vi får:

$$\frac{\Delta P_1}{50} = \frac{\frac{\Delta n}{*n}}{0.05} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta P_2}{100} = \frac{\frac{\Delta n}{*n}}{0.10} \quad (2)$$

$$\sum P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = 50 \quad (3)$$

Ved å løse ligningene (1), (2) og (3) får vi: (3 ligninger og 3 ukjente)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{*n} &= 0.025 \text{ eller } 1.25 [Hz] \\ \Delta P_1 &= 25 [MW] \\ \Delta P_2 &= 25 [MW] \end{aligned}$$

På denne måten kan lastfordelingen på  $n$  turbiner finnes i et stort nett.

Dersom  $\sum P$  er stor i forhold til lastøkningen  $\sum \Delta P$  vil vi få en uendelig liten reduksjon av nettfrekvensen og vi har et såkalt *stivt nett*. Dette er tilfellet for de store nettsystem vi har i dag der flere land kan være tilkopleet, noe som er en fordel for å holde  $\frac{\Delta n}{*n}$  så liten som mulig.

Dersom vi har en gitt  $\frac{\Delta n}{*n}$  i et stort stivt nett-system og nettet er så stivt at innvirkningen på nettfrekvensen fra ytelsesøkningen på ett aggregat er neglisjerbar, kan  $\Delta P$  finnes direkte av ligning (3.24).

### Regulator med hydraulikk

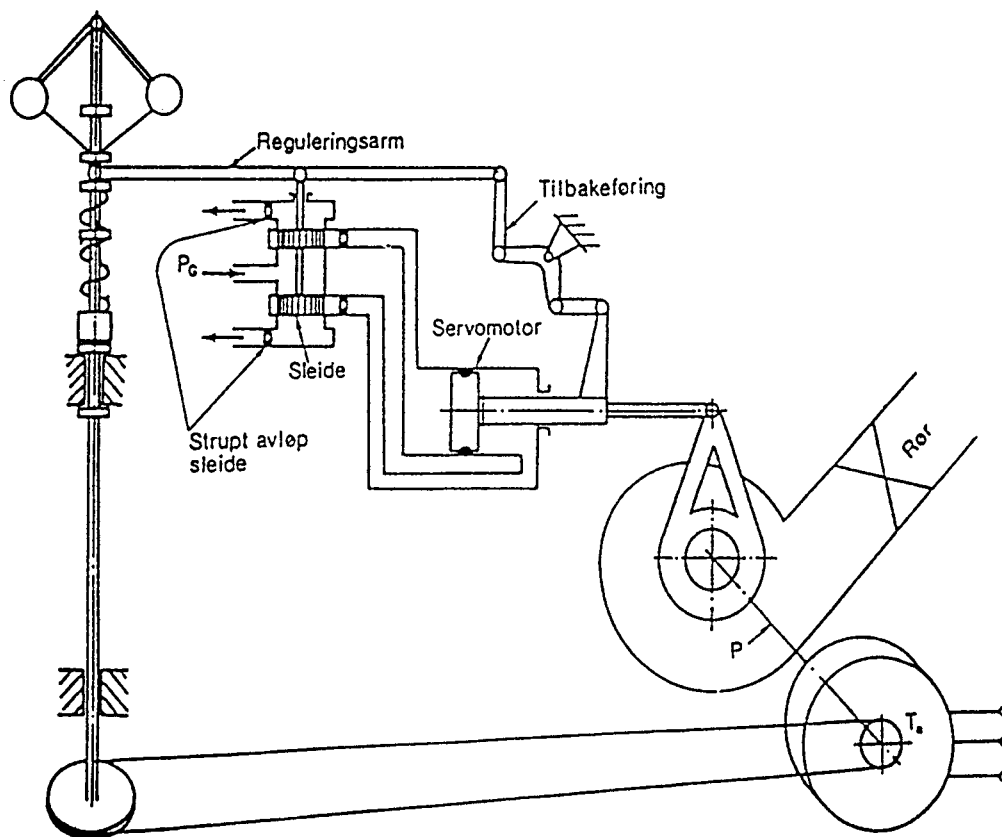
Proporsjonalregulatoren vist i foregående kapittel er ikke brukbar i praksis. Det kommer av at forstillingskraften fra ett pendel ikke er stor nok til å forstille et turbinpådrag. Det må derfor bygges inn et forsterkersystem. Forsterkersystemet er hydraulisk og består av en sleid og en servomotor med tilbakeføring, se figur (3.12).

Dersom omløpstallet blir høyere enn normalt ved et avslag, så løfter pendelet opp reguleringsarmen i den ene enden slik at sleiden blir løftet opp fra midtstillingen. Da får servomotoren tilført en oljestrøm på baksiden av stemplet og pådraget går mot stengning. Samtidig blir den andre enden av reguleringsarmen, som er forbundet med servomotoren, ført nedover av stempelbevegelsene slik at sleiden blir ført tilbake mot midtstilling inntil ny likevekt er oppnådd.

Servomotoren kan av fysiske grunner altså ikke kopiere pendelet momentant. Vi skal nå se litt nærmere på servomotoren og sleiden. Servomotoren kan ikke reagere spontant på at pendelet endrer stilling, men stempelet får en hastighet som er proporsjonal med størrelsen på oljestrømmen som igjen er proporsjonal med sleideutslaget. Dette er fordi oljen trenger en viss tid på å fylle opp et visst volum for å bevege stempelet en viss lengde. Det er altså en tidsforsinkelse mellom pendelutslag og stempelutslag. Figur (3.13) viser servomotorhastigheten  $\frac{dY}{dt}$  som funksjon av sleideutslaget  $\sigma'$ .

$Y = \Delta Y / {}^0Y$  = servomotorgange i % av fullt servomotorslag.

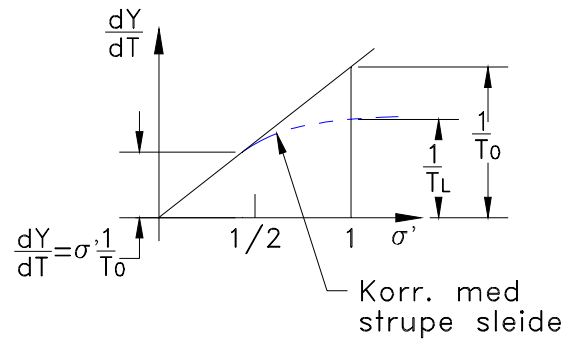
$\sigma'$  = sleideutslag i % av det sleideutslaget som tilsvarer fullt pendelutslag mot lukking.



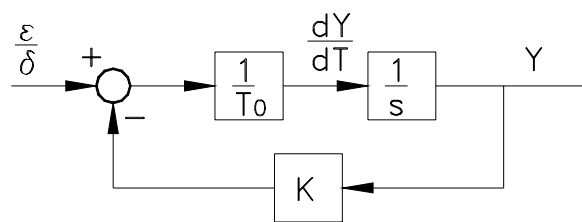
Figur 3.12: Regulator med tilbakeføring.

$T_0$  = tiden det tar for servostempelet å gå fra full åpning til lukking (d.v.s. 100% servomotorslag) uten struping.

Med struping blir forløpet som vist med den stiplede streken i figur (3.13). Strupningen blir ofte lagt inn i sleiden fordi vi ikke ønsker at servomotoren skal gå for raskt mot lukking da det kan føre til for stort trykkstøt i vannveiene (dette kommer vi tilbake til). Av figur (3.12) ser vi at denne regulatoren har tilbakeføring fra servomotoren via sleidebevegelsen. Vi må derfor innføre en tilbakeføringskonstant  $K$ .  $K$  er forholdet mellom den lengden sleiden blir ført tilbake ved et fullt servomotoravslag og slaglengden ved fullt pendelutslag. Dette betyr for eksempel at dersom pendelet gjør fullt utslag mot lukking og servoslaget bare reagerer med å gå halvveis mot lukking så er  $K = 2$ . Vi har nå nok opplysninger til å sette opp blokkdiagrammet for servosystemet med tilbakekoplingen. Dette er gjort i figur (3.14).



Figur 3.13: Sleidekarakteristikk.



Figur 3.14: Blokkdiagram for servosystem med tilbakekopling.

Blokkdiagrammet for hele regulatoren blir da som vist i figur (3.15).

Figur 3.15: Blokkdiagram for hele systemet.

Vi ønsker nå å se på hva som skjer dersom vi får et sprang i lasten fra generatoren på  $\Delta P_G$ . Ved å dra sammen blokkdiagrammene og neglisjere vannveiene får vi blokkdiagrammet i figur (3.16).

Figur 3.16: Redusert blokkdiagram (vannveier neglisjert).

Vi påtrykker nå et sprang i lasten på  $\Delta P_G(t)$  i tidsplanet. I frekvensplanet blir et enhetsprang  $P_G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow$  sprang:  $\Delta P_G(s) = \frac{\Delta P_G}{s}$ . Omløpstallet blir da :

$$\begin{aligned} \frac{n}{*n} &= \frac{-\delta_L K \left(1 + \frac{T_o s}{K}\right) \Delta P_G}{(\delta_L T_a T_o s^2 + \delta_L T_a K \cdot s + 1) s} \\ &= \frac{\frac{\delta_L K}{T_a} \left(s + \frac{K}{T_o}\right) \Delta P_G}{\left(s^2 + \frac{K}{T_o} s + \frac{1}{\delta_L T_a T_o}\right) s} = \frac{\frac{\delta_L K}{T_a} \left(s + \frac{K}{T_o}\right) \Delta P_G}{\left\{ \left[ s^2 + \frac{K}{T_o} s + \left(\frac{K}{2T_o}\right)^2 \right] - \left(\frac{K}{2T_o}\right)^2 + \frac{1}{\delta_L T_a T_o} \right\} \cdot s} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\frac{n}{*n} = \frac{-\frac{1}{T_a} \left(s + \frac{K}{T_o}\right) \Delta P_G}{\left( \left(s + \frac{K}{2T_o}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta_L T_a T_o} - \left(\frac{K}{2T_o}\right)^2\right) \right) \cdot s} \quad (3.27)$$

Bruker sluttverditeoremet for å finne stasjonært avvik, ved hjelp av ligning (3.26):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{*n}(t) \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{n}{*n}(s) \cdot s \right\} = \underline{\underline{-\delta_L \Delta P_G \cdot K}} \quad (3.28)$$

Dette gir blokkdiagrammet i figur (3.17).

Figur 3.17: Blokkdiagram for hele regulatoren.

For å forenkle blokkdiagrammene innfører vi følgende faktorer:

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{K}{T_o} \\ \beta^2 &= \frac{1}{\delta_L T_a T_o} - \left(\frac{K}{2T_o}\right)^2 \\ a_o - \alpha &= \frac{K}{2T_o} \\ \Psi &= F(\alpha, \beta, a_o) = \textit{konst} \\ \alpha &= \frac{K}{2T_o} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1}{\delta_L T_a T_o} \\ \frac{a_o}{\alpha^2 + \beta^2} &= \frac{\delta_L T_a T_o}{\frac{T_o}{K}} \end{aligned}$$

Det gir innsatt i uttrykket for omløpstallet :

$$\frac{n}{*n} = \frac{-\Delta P_G}{T_a} \left( \frac{s + a_o}{s \left[ (s + \alpha)^2 + \beta^2 \right]} \right) \quad (3.29)$$

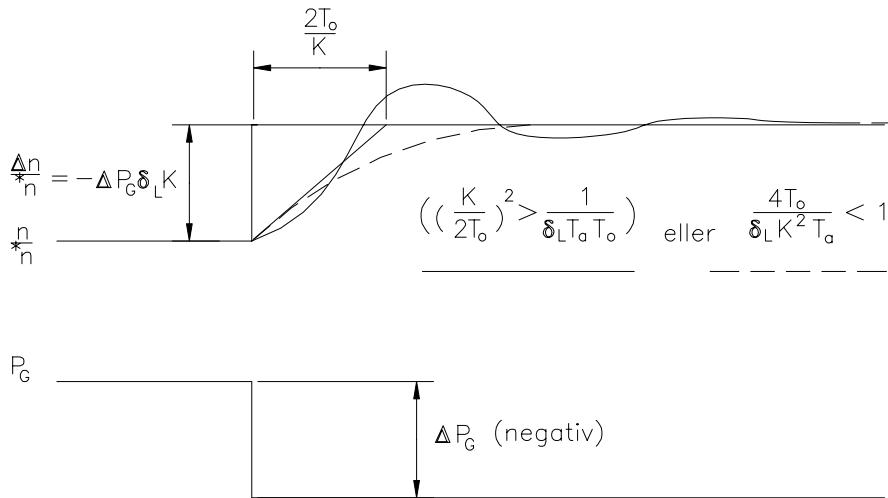
Ved hjelp av den inverse Laplace transformasjon kan vi sette opp ligning (3.29) i tidsplanet:

$$\frac{n}{*n} = \frac{-\Delta P_G}{T_a} \left[ \frac{a_o}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{1}{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{(a_o - \alpha)^2 + \beta^2} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \Psi) \right] \quad (3.30)$$

Ved innsetting får vi da:

$$\frac{n}{*n} = -\delta_L \Delta P_G \cdot K \left[ 1 - A e^{-\frac{K}{2T_o} t} + B e^{-\frac{K}{2T_o} t} \cdot \sin \left( \sqrt{\left[ \frac{1}{\delta_L T_a T_o} - \left(\frac{K}{2T_o}\right)^2 \right]} \cdot t \right) \right] \quad (3.31)$$

der A og B er to konstanter. Vi kan nå tegne et diagram som viser hvordan omløpstallet  $\frac{n}{*n}$  vil endre seg dersom vi får et avslag i lasten,  $\Delta P_G$ . Se figur (3.18). Vi ser her at vi kan få en



Figur 3.18: Endring i omløpstall som følge av endring i last.

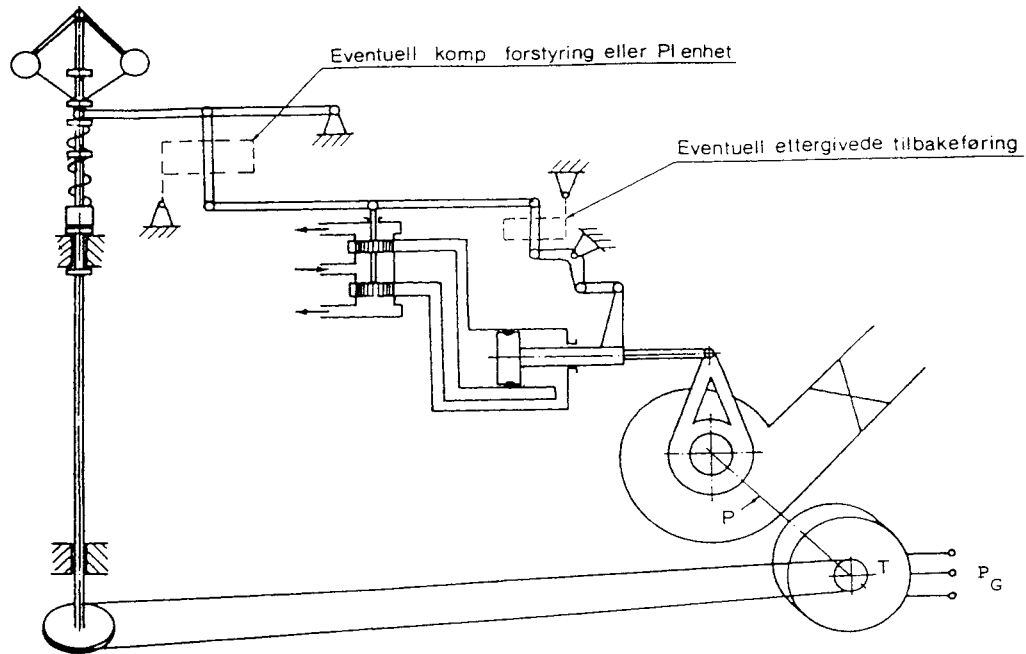
regulator med oversving, og for stort oversving er ikke ønskelig. Systemet kan bli dempet ved å øke  $K$  og/eller  $T_a$  og minske  $T_o$ . Denne fremgangsmåten må vurderes. Økt  $T_a$  betyr større og dermed dyrere generator. Minsket  $T_o$  betyr hurtigere sleideservosystem, men på grunn av faren for trykkstøt i rørene så må lukkehastigheten reduseres ved store variasjoner, og da vil tidskonstanten øke som vist i figur (3.13). Vi sier da at servosystemet går i metning. Av figur (3.18) ser vi at også denne regulatoren har statikk (omløpstallet holdes ikke konstant, men synker ved økende regulatorslag. Det vil si ved økende ytelse). Denne proporsjonalregulatoren er ubrukelig på vannkraftanlegg som skal være tilkopleet et eget isolert nett, fordi vi i det tilfellet er avhengige av at frekvensen er tilnærmet konstant i det lokale nettet.

### PI-regulator

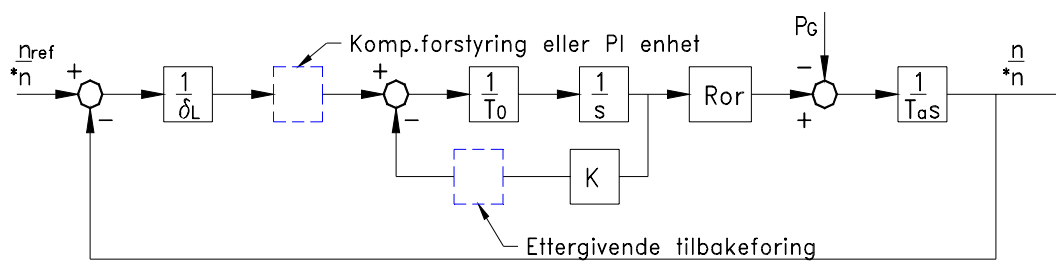
Vi har nå sett at en ren proporsjonalregulator ikke er brukbar til å regulere en vannturbin på eget nett med krav om konstant nettfrekvens. Hva skal vi så gjøre? Svaret er selvsagt å prøve med en såkalt Proporsjonal + Integral regulator som i fagspråket betegnes PI-regulator. En slik regulator er i stand til å holde konstant frekvens, uavhengig av nettfrekvensen ved at små avvik fra en fast innstilt frekvens blir integrert over et tidsrom inntil avviket blir null. I figur (3.19) - (3.21) er det vist hvordan dette kan gjøres mekanisk.

Regulatorleddet som utfører integralvirkningen i figur (3.25) kalles ettergivende tilbakeføring og transferfunksjonen kan skrives:

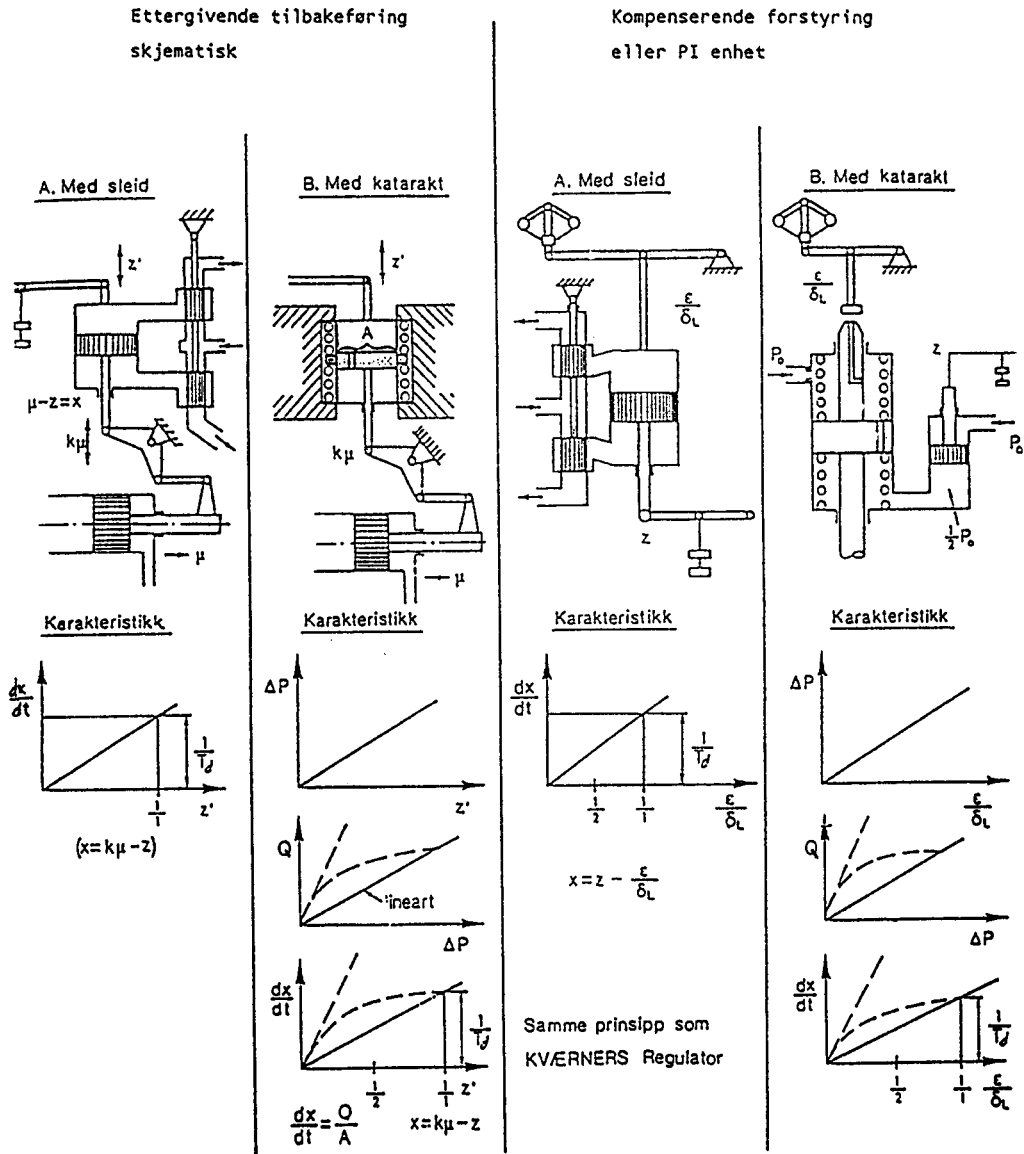
$$\frac{1 + T_d s}{T_d s \left[ (1 + T_d s) \frac{T_0}{T_d} + k \right]}, \text{ der } \frac{T_0}{T_d} \ll k.$$



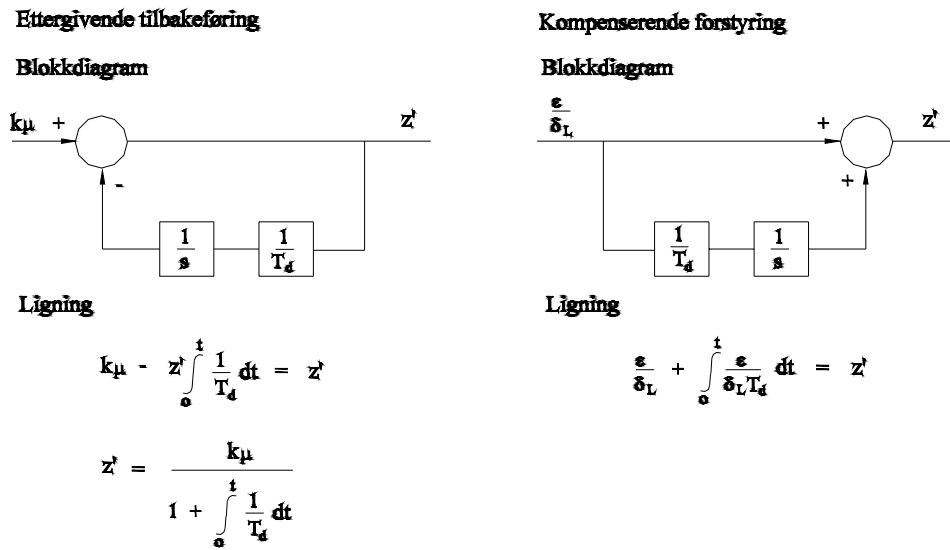
Figur 3.19: Regulator med kompenserende forstyring og ettergivende tilbakeføring.



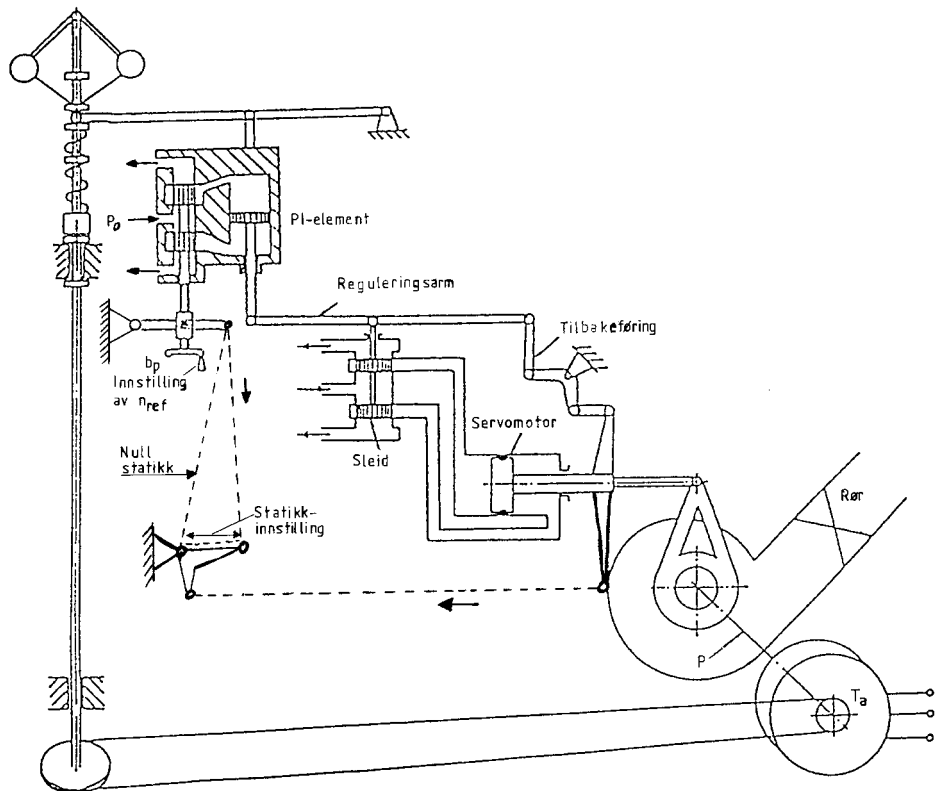
Figur 3.20: Blokkdiagram til regulatoren over.



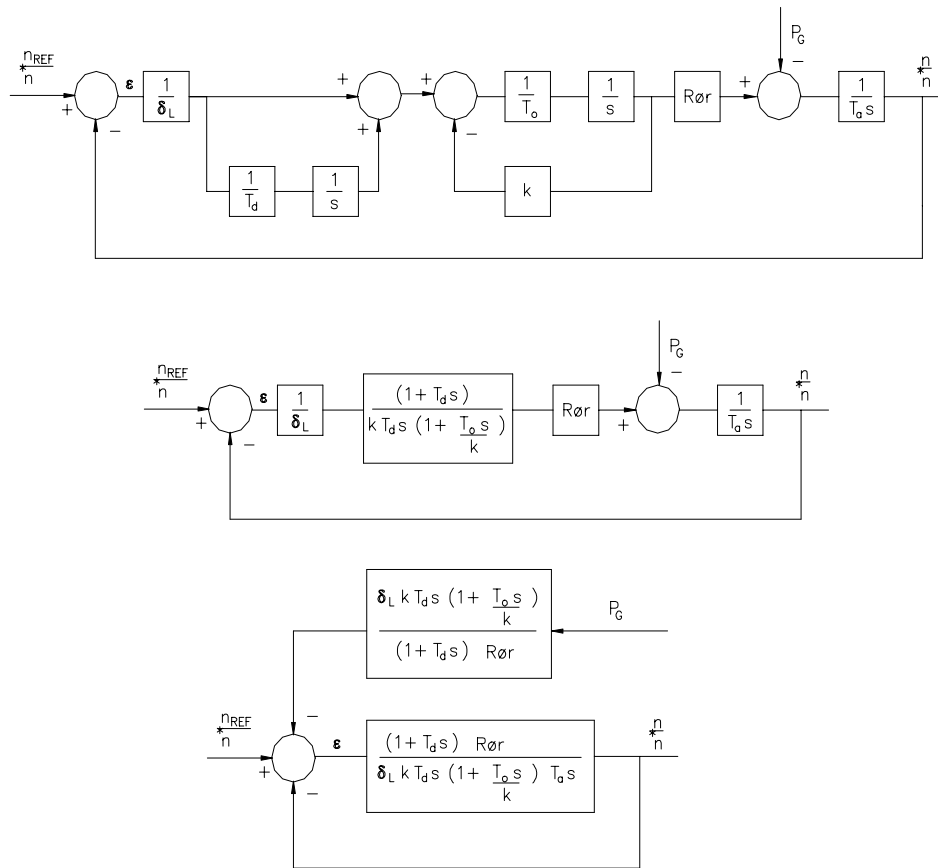
Figur 3.21: Eksempler på kompenserende og ettergivende ledd.



Figur 3.22: Ettergivende tilbakeføring og kompenserende forstyring, representert ved blokkdiagram og ligninger.



Figur 3.23: Mekanisk-hydraulisk PI-regulator med kompenserende forstyring og statikk (stiplet).



Figur 3.24: Fullt blokkdiagram med kompenserende forstyring.

Denne type regulator som har leddet med ettergivende tidskonstant  $T_d$  blir et derivatledd i tilbakeføringen  $= \frac{k T_o s}{1+T_d s}$  som omdannes til et integralledd i hovedsløyfen når tilbakeføringssløyfen lukkes:

$$\left[ \frac{1+T_d s}{T_d s} \right] = \left[ \frac{1}{T_d s} + 1 \right] \quad (3.32)$$

Høyre side i ligningen er et proporsjonal + et integral ledd, og gjelder for en PI regulator. Der-som vi ser litt nærmere på PI regulatoren, for eksempel den med kompenserende forstyring som er vist i figur (3.23), vil vi se at omløpstallet ikke får noen varig endring selv om lasten endres dersom statikken stilles på 0 (ingen bevegelse av omløpstallforstillingen om servomotoren beveger seg). Den kompenserende forstyringen (integraldelen) sørger for at oljestrømmen fra hydraulikk-aggreatet beveger sleiden og servomotoren slik at pendelutslaget siger tilbake til normalstilling som gir samme omløpstall ved alle turbinytelser. I forhold til en ren proporsjonalregulator får servomotoren dermed en økt utstyring mot økt eller minsket ytelse inntil omløpstallet er tilbake på det innstilte referanseomløpstall  $n_{ref}$ . Dette kan også sees ved å sette på et sprang i lasten på  $\Delta P_G$  og se hva som skjer med  $\frac{n}{n}$ .

Ved å trekke sammen blokkdiagrammet i figur (3.24) som gjelder for regulatoren i figur (3.23), når man ser bort fra rørets transferfunksjon, fås:

$$\frac{n}{*n}(s) = \frac{-K\delta_L T_d s \left[1 + \frac{T_o}{K}s\right]}{\delta_L T_d T_a K \cdot s^2 \left[1 + \frac{T_o}{K}s\right] + (1 + T_d s)} P_G(s) \quad (3.33)$$

Transferfunksjonen for et sprang i  $P_G(t)$  på  $\Delta P_G$ ;  $P_G(s) = \frac{\Delta P_G}{s}$  blir:

$$\frac{n}{*n}(s) = \frac{-K\delta_L T_d \left[1 + \frac{T_o}{K}s\right]}{[\delta_L T_d T_a K \cdot s^2 \left[1 + \frac{T_o}{K}s\right] + (1 + T_d s)] \cdot s} \Delta P_G \quad (3.34)$$

Det blir nå mer komplisert å transformere funksjonene tilbake til tidsplanet, derfor nøyer vi oss med å benytte sluttverditeoremet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{*n}(t) \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{n}{*n}(s) \cdot s \right\} = 0 \quad (3.35)$$

Det betyr at det ikke blir noen stasjonær endring i  $\frac{n}{*n}$  selv om  $P_G$  varierer.

PI regulatoren er derfor egnet til å regulere en vannkraftturbin på eget nett. Det er imidlertid i noen tilfeller hensiktsmessig å bruke en PID-regulator for lavtrykksturbiner der turbinkarakteristikken gir en positiv tilbakekopling. Dette blir mer utførlig behandlet i Dr. ing. faget *Regulering av vannkraftverk*. For vanlige høytrykks turbiner brukes ikke PID-regulatorer da dette kan gi dårligere stabilitet.

### 3.2.2 Elektrohydraulisk regulator

I dag produseres bare få av de rent mekaniske regulatorene som er vist i foregående kapittel. Det amerikanske firmaet Woodward masseproduserer imidlertid mekaniske regulatorer med ettergivende tilbakeføring av PI typen. Slike regulatorer kan brukes for småturbiner i dag. For store turbiner har man erstattet den mekaniske PI-regulatorene med elektroniske eller digitale PC baserte PI- og PID-regulatorer. Figur (3.26) viser en vanlig moderne regulators hovedkomponenter. Vi skal nå se litt nærmere på noen av komponentene.

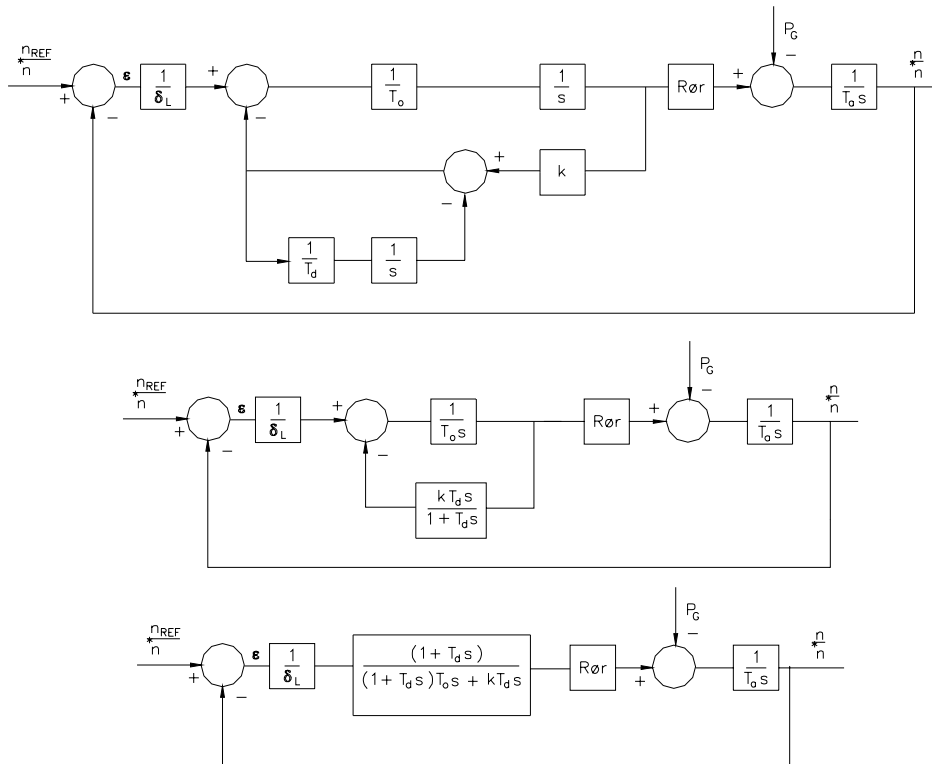
#### Elektronisk turbinregulator

En elektronisk regulator er normalt oppbygd av passive RC-kretser og aktive kretser bygd opp av operasjonsforsterkere (beskrevet senere). En elektronisk regulator kan se ut som regulatoren i figur (3.27) <sup>1</sup>.

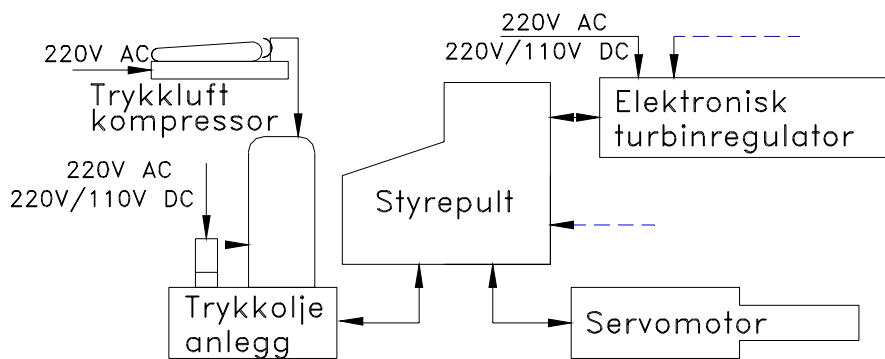
$E$	=	Spenning
$V_f$	=	Voltsignal fra omløpstallet
$V_{fo}$	=	Voltsignal fra omløpstallreferansen
$V_{PO}$	=	Voltsignal fra lastreferansen
$V_P = V_Y$	=	Tilbakeføringssignal fra pådrag eller last for statikk
$I_r, I_c$	=	Strøm gjennom h.h.v. motstand og kondensator

Vi analyserer først integralkretsen for å se om den likner på den mekanisk bygde integraldelen beskrevet i kapitlet om PI-regulatorene.

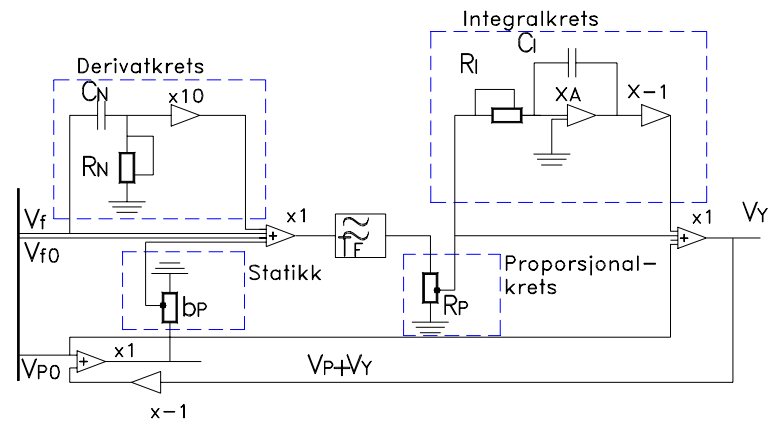
<sup>1</sup>Dersom du ikke er helt stø i elektroniske komponenter kan vi anbefale "Operasjonsforsterkere" av Kristian Sundsdal, NKI forlaget, 1979.



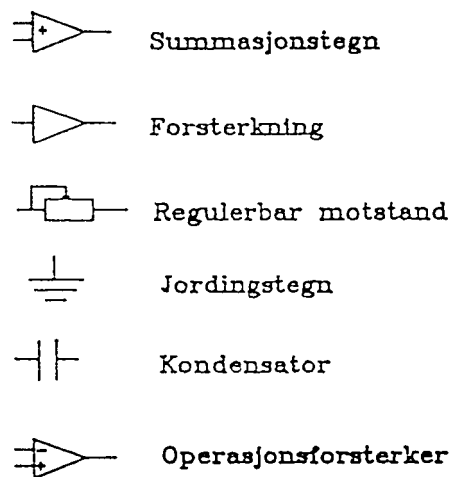
Figur 3.25: Fullt blokkdiagram med ettergivende tilbakeføring. Vi ser bort fra statikkmekanismen.



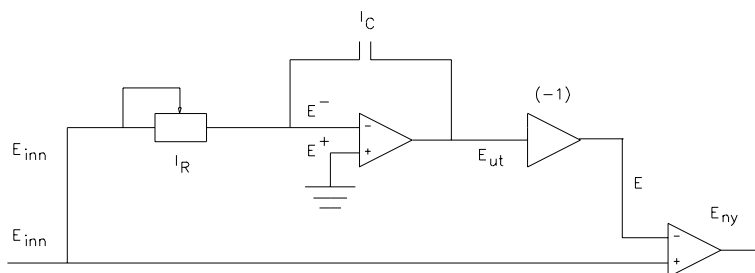
Figur 3.26: Hovedkomponenter, elektrohydraulisk regulator.



Figur 3.27: Elektronisk regulator med integrasjon i foroverføring og direkte lastrespons.



Figur 3.28: Tegnforklaring for blokkdiagrammet.



Figur 3.29:

**Integralvirkning, analyse** I figur (??) er integralkretsen fra figur (3.27) vist i detalj. Merk at denne kretsen betegnes som en *aktiv krets* fordi operasjonsforsterkeren er koplet med en kondensator i tilbakekoplingen ( $Z_C = \frac{1}{C}$ ) (se side 43).

En kan sette opp følgende uttrykk for det som skjer i kretsen:

1.  $E_{inn} = R_i I_R$
2.  $I_C = C \frac{d}{dt} (E_{ut} - E^-)$  da vi har  $E = \frac{1}{C} \int I dt$
3.  $E^- \approx 0, \Rightarrow I_C = C \frac{d}{dt} (E_{ut})$  ( $E^- \approx 0$  fordi vi har tilnærmet uendelig forsterkning)
4.  $I_C + I_R = 0$  (tilnærmet ingen strøm gjennom operasjonsforsterkeren fordi det er tilnærmet uendelig forsterkning. Se beskrivelse av operasjonsforsterkeren figur (3.33))

Setter 1), 2) og 3) inn i 4):

$$C \frac{d}{dt} (E_{ut}) + \frac{E_{inn}}{R_i} = 0 \quad (3.36)$$

Laplace transformerer uttrykket og får:

$$C E_{ut} s + \frac{E_{inn}}{R_i} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{E_{ut}}{E_{inn}} = -\frac{1}{R_i C s} \quad (3.38)$$

Operasjonsforsterker med forsterkning på (-1) gir:

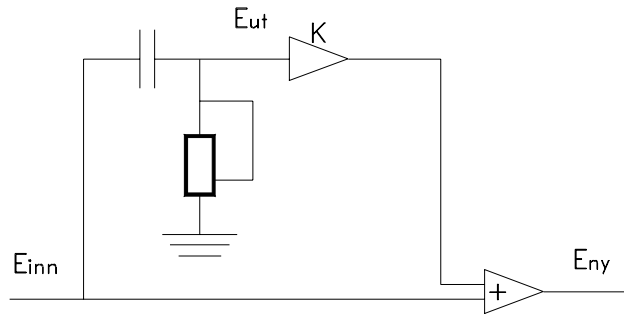
$$\frac{E}{E_{inn}} = \frac{1}{R_i C s} \quad (3.39)$$

Total innflytelse får vi når inngangsspenningen summeres med et proporsjonalledd i en summasjonsforsterker til et PI element.

$$\frac{E_{ny}}{E_{inn}} = \frac{E_{inn} + E_{ut}}{E_{inn}} = 1 + \frac{1}{R_i C s} \quad (3.40)$$

Dersom vi setter  $T_d = RC$  ser vi at innflytelsen fra integralleddet blir den samme som for den mekaniske regulatoren i kapitlet om PI regulatoren, nemlig  $(1 + \frac{1}{T_d s})$ .  $T_d$  kan varieres ved å variere motstanden R.

**Derivatvirkning, analyse** I figur (3.30) er derivatkretsen fra figur (3.27) vist.



Figur 3.30: Derivatkrets. Passiv RC-krets med aktiv operasjonsforsterker koplet i serie.

Kretsen i figur (3.30) kalles en *passiv RC-krets* med motstand og kapasitans. (Forsterkeren K inngår ikke i selve RC-kretsen som danner tidskonstanten). Analyse av kretsen i figur (3.30) gir:

1.  $(E_{inn} - E_{ut}) = \frac{1}{C} \int I \cdot dt$
2.  $E_{ut} = IR$

Laplace transformerer 1) og 2) og får:

$$I = C(E_{inn} - E_{ut})s \quad (3.41)$$

$$I = \frac{E_{ut}}{R} \quad (3.42)$$

Setter ligning 3.41 inn i 3.42 og får:

$$E_{ut} = RC(E_{inn} - E_{ut})s \quad (3.43)$$

$$\frac{E_{ut}}{E_{inn}} = \frac{RCs}{1 + RCs} \quad (3.44)$$

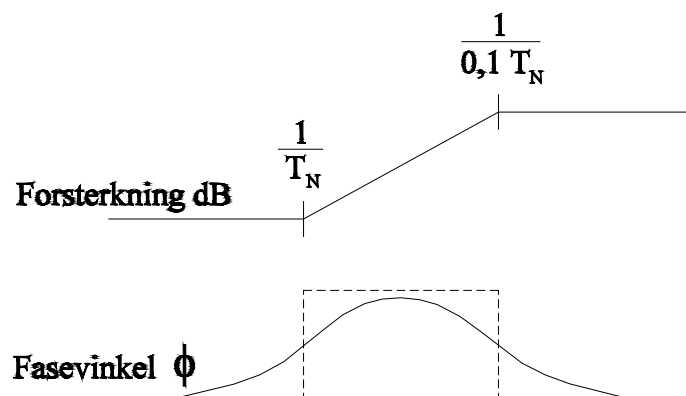
Forsterkning ved hjelp av operasjonsforsterker med K gir:

$$\frac{E_{ut}}{E_{inn}} = \frac{KRCs}{1 + RCs} \quad (3.45)$$

Total innflytelse fra derivatleddet blir når spenningen  $E_{inn}$  summeres til en proporsjonalspenning etter operasjonsforsterkeren K i en summasjonsforsterker. Dette gir:

$$\frac{E_{ny}}{E_{inn}} = 1 + \frac{E_{ut}}{E_{inn}} = \frac{1 + (K + 1)RCs}{1 + RCs} \quad (3.46)$$

Normalt velges en forsterkning  $K = 9$  og vi får derivattidskonstanten  $T_n = 10RC$  med en begrensning  $0.1T_n$ , som gir:



Figur 3.31: Derivatkrets representert i et AFF-diagram (forsterkning  $K = 9$ ).

$$\frac{E_{ny}}{E_{inn}} = \frac{1 + T_n s}{1 + 0,1 T_n s} \quad (3.47)$$

I et AFF diagram blir en derivatkrets som vist i figur (3.31), når  $K = 9$ .

Det betyr at høyfrekvente signaler blir forsterket opp, noe som kan føre til ustabilitet ved høytrykksanlegg med lange rør. Man er derfor ofte forsiktig med bruken av derivatleddet som gir forbedret stabilitet bare i lavtrykksanlegg. Da referansesignalet kan forandres i sprang vil dette signalet få en svært stor forsterkning om det går gjennom et derivatledd. I en virkelig regulator blir derfor bare tilbakeføringssignalet fra omløpstallet ført gjennom derivatleddet mens referansesignalet bare går gjennom PI-leddet se figur (3.27). I figur (3.27) legger vi også merke til hvordan statikken er koplet på en vanlig regulator. Det finnes også andre måter å lage en elektronisk regulator på, for eksempel som i figur (3.32).

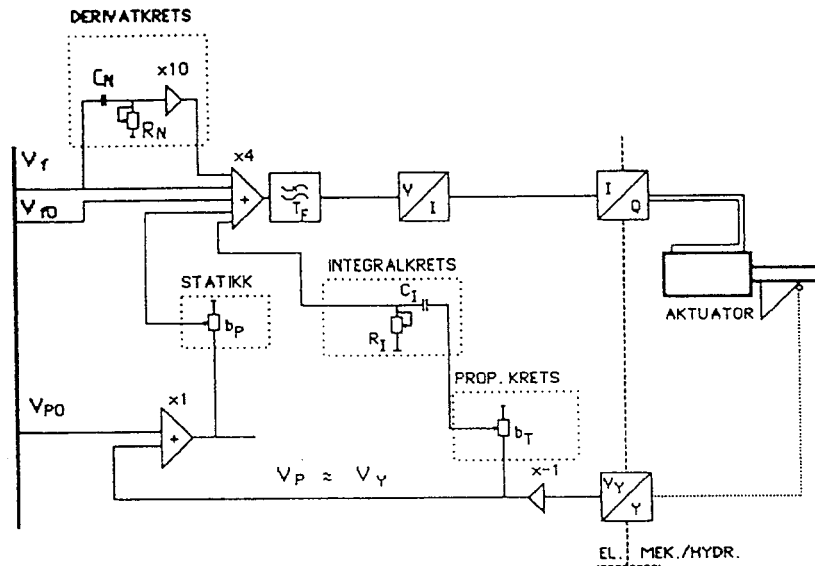
### Operasjonsforsterker

Den elektroniske turbinregulatoren er bygget opp av såkalte passive kretser, RC-kretser, og aktive kretser der operasjonsforsterkere er koplet inn i selve kretsen som beskrevet tidligere. En operasjonsforsterker er bygd opp over en transistor som har en tilnærmet uendelig forsterkning. Ved hjelp av en tilbakekoplet impedans og en impedans i serie kan en ønsket forsterkning oppnås. Skjemaet for en operasjonsforsterker er vist i figur (3.33). (Impedans kan bestå av en Ohmsk motstand, en kondensator eller en reaktans (spole)).

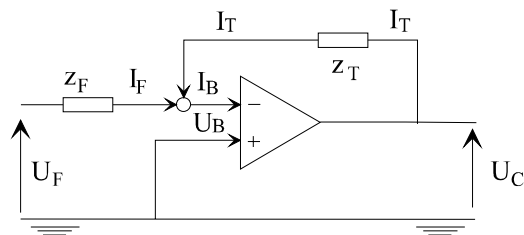
$$I_F = \frac{(U_F - U_B)}{Z_F} \quad (3.48)$$

$$I_T = \frac{(U_C - U_B)}{Z_T} \quad (3.49)$$

Forsterkning i selve forsterkerelementet er tilnærmet uendelig og da er  $U_B \approx 0$  fordi  $U_C$  har en endelig verdi. Videre er  $I_B \approx 0$  fordi vi har uendelig forsterkning.



Figur 3.32: Elektronisk regulator med derivasjon og integrasjon i tilbakeføringskretsen.



Figur 3.33: Tilbakekoplet operasjonsforsterker.

Dette gir:

$$I_F + I_T = I_B \approx 0, \text{ d.v.s.} \quad (3.50)$$

$$\frac{U_F - U_B}{Z_F} + \frac{U_C - U_B}{Z_T} \approx 0 \quad (3.51)$$

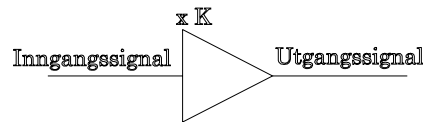
vi får da:

$$\frac{U_C}{Z_T} = -\frac{U_F}{Z_F} \quad (3.52)$$

eller vi får forsterkningen av spenningen som forholdet mellom  $Z_T$  og  $Z_F$  som velges:

$$\boxed{\frac{U_C}{U_F} = -\frac{Z_T}{Z_F} = K} \quad (3.53)$$

$K$  = tilbakekoplet forsterkning. Forsterkeren symboliseres som i figur (3.34) Tilbakekopling i selve

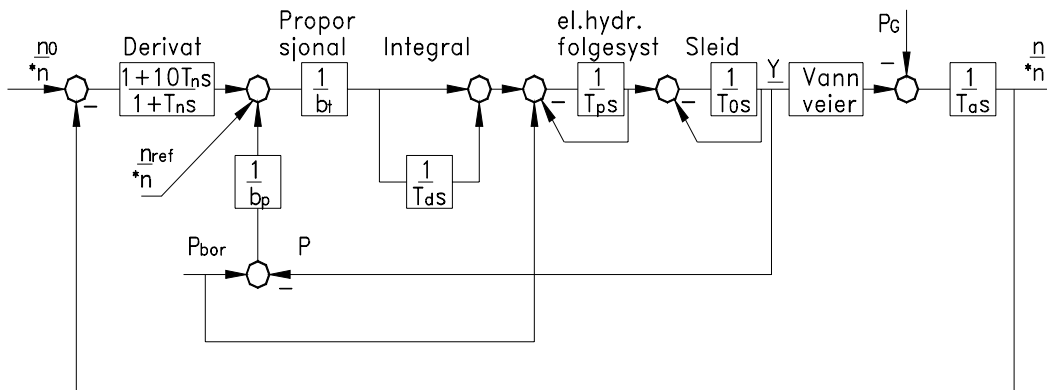


Figur 3.34: Forsterker

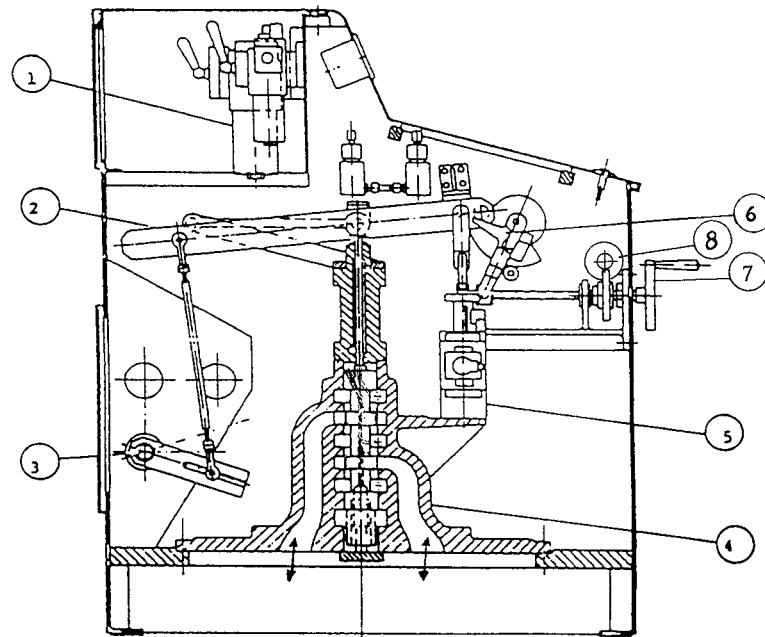
forsterkeren vises ikke i symbolene. Operasjonsforsterkere kan også brukes som summasjonsforsterkere med flere innganger.

### Blokkdiagram for en fullstendig elektrohydraulisk regulator

Dersom vi benytter en regulator som skissert i figur (3.27) vil vi få et blokkdiagram som vist i figur (3.35). Merk: Derivat elementet står i tilbakekoplingsløyfa slik at referansesignalet ikke går gjennom dette da referanseverdien ofte endres som et sprang.



Figur 3.35: Blokkdiagram for fullstendig regulator med statikk.



Figur 3.36: Hovedstyrepult med dobbeltvirkende hovedsleid (servoventil).

### 3.2.3 Oljehydrauliske komponenter

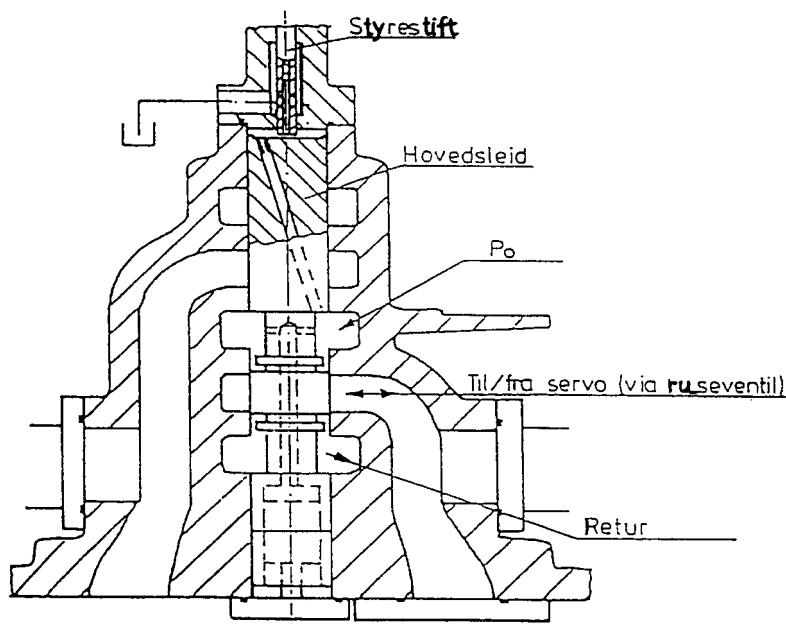
#### Styrepult

I figur (3.36) er vist en vanlig styrepult som inneholder de oljehydrauliske komponentene og den elektrohydrauliske overgangsførsterkeren fra elektrisk signal til mekanisk bevegelse. Styrepulten inneholder hovedsleiden eller hovedservoventilen (4) til servomotoren(e) (det kan være to eller flere servomotorer) som driver ledeapparatet på Francis- og Kaplan turbiner, eller deflektoren på Pelton turbiner. Styringen av nålene er plassert i separate styreskap for hver nål, som er styrt fra hovedstyrepulten enten mekanisk via hovedservomotoren som beveger deflektoren(e) eller elektronisk ved hjelp av et signal parallelt med inngangen til den elektrohydrauliske styreventilen (5), som igjen styrer hovedstyreventilen.

Tilbakeføringsbevegelsen fra hovedservomotoren kommer, via armer og lenker, til akselen i hovedstyrepulten (3), som overfører bevegelsen til armen (2). Denne armen er koplet til hovedsleiden på midten og den elektrohydrauliske servomotoren (5) som omdanner det elektriske spenning- (eller strøm-) signalet til mekanisk bevegelse.

Videre er slagbegrenseren (6) vist. Ved hjelp av slagbegrenser kan man begrense åpningsbevegelsen, d.v.s. bevegelsen av armen der den elektrohydrauliske servomotoren er tilkoplet. En kan også via slagbegrenseren stenge servomotoren manuelt (7) eller fjernstyrt (via en motor) (8), dersom det er en feil i regulatoren (jfr. vern, kapittel 1).

Et enkeltvirkende servosystem består av en servomotor der stempelstangen, eller det såkalte skjørtet, på servomotoren har et tverrsnitt som er 50% av stempelarealet. På siden der stempelstangen kommer ut vil derfor det effektive stempelareal være 50% av arealet på den andre siden av stemplet.



Figur 3.37: Hovedsleid med styrestift for enkeltvirkende hovedservomotor.

For en slik enkeltvirkende servomotor står det et fullt konstant oljetrykk på stempelstangside, mens trykket på den andre siden står i forbindelse med den enkeltvirkende sleiden. Denne sleiden balanserer trykket mellom tilførselstrykket  $P_0$  (fullt trykk) og returtrykket i avløpsrøret til sumpen i trykkoljelegget. Dette trykket som ligger bak stemplet er  $\frac{1}{2}P_0$  og holder servomotoren i balanse dersom de hydrauliske kreftene fra ledeapparatet er null. De hydrauliske kreftene fra turbinen vil til enhver tid bli utbalansert ved at trykket bak stemplet blir større eller mindre enn  $\frac{1}{2}P_0$ . Ved lukking av servomotoren vil sleiden normalt løftes opp og oljetrykket på stempelsiden dreneres. Konstantrykket på stempelstangside driver da servomotoren mot lukking. Lukkebevegelsen for en enkeltvirkende servomotor utføres ved at stempelstangen trekkes inn i servosylinderen. Dette fordi konstantrykket er sikrere enn trykket fra en styreventil, hvor lekkasjer kan oppstå.

Åpnebevegelse får vi når sleiden beveges nedover og vi får økende oljetrykk på stempelsiden. I røret mellom styreventilen og servomotoren er det installert en ruseventil som blir utløst av rusevernet dersom omløpstallet stiger over en viss grense. Ruseventilen drenerer trykket på stempelsiden av hovedservomotoren slik at servomotoren lukker ledeskovlene dersom det oppstår en feil.

### Trykkoljelegg

I figur (3.38) er vist et typisk trykkoljelegg. I trykkoljelegget tilføres oljen energi fra en hovedpumpe for drift av hovedsleid og servosystemet. I tillegg finnes det en "stand by" pumpe som starter om oljetrykket synker under en viss grense. Liste over komponenter med korresponderende nummer finnes under figuren. De ulike delene vil ikke bli omtalt nærmere da listen i figur (3.38) tydelig illustrerer funksjonen til de ulike delene. Vi skal likevel merke oss at en kompressor for lufttilførsel til akkumulatoren er nødvendig for å holde oljenivået i tanken på et visst nivå ved normalt trykk. Dette er nødvendig fordi akkumulatoren må ha lagret et visst energinivå

(trykk x volum) for å kunne stenge servomotorene under nødstop om strømmen blir borte og oljepumpene dermed stopper. Dette gjøres selv om det er nødaggregat eller likestrømsdrevet nødpumpe tilkoplek oljehydraulikk-anlegget.

### 3.3 Vannveier

Det som gjør en turbin vanskelig å regulere er trykksvingningene som oppstår i vannveiene på grunn av pådragets åpne og lukke bevegelser, etter som trykksvingningene forårsaker variasjoner i vannføringene. Vi skiller her mellom to typer trykksvingninger foran turbinen:

1. Massesvingninger (Vannets svingninger opp og ned i svingesjakten ved enden av tilløpstunnelen slik at trykket foran turbinen også svinger).
2. Trykkstøt (Skyldes at vann og rør er "elastiske" slik at trykkbølger forplanter seg fra turbinen og oppover i røret og deretter reflekteres igjen fra nærmeste vannspeil slik at trykksvingninger oppstår).

#### 3.3.1 Massesvingninger. Thoma-kriteriet for reguleringsstabilitet.

Hensikten med svingesjakter i vannkraftsystemer er å begrense trykkstigningen foran turbinen når ledeskovler eller ventil stenger, og å bedre reguleringsstabiliteten. Det gjøres ved å begrense trykkøkningen på grunn av vannmassene som er i bevegelse i tunnelsystemet. Disse svingningene er langsomme. Vi kan ikke øke svingmassene i generatorene så mye at lukketiden av pådraget blir lang nok til å påvirke massesvinget i særlig grad.

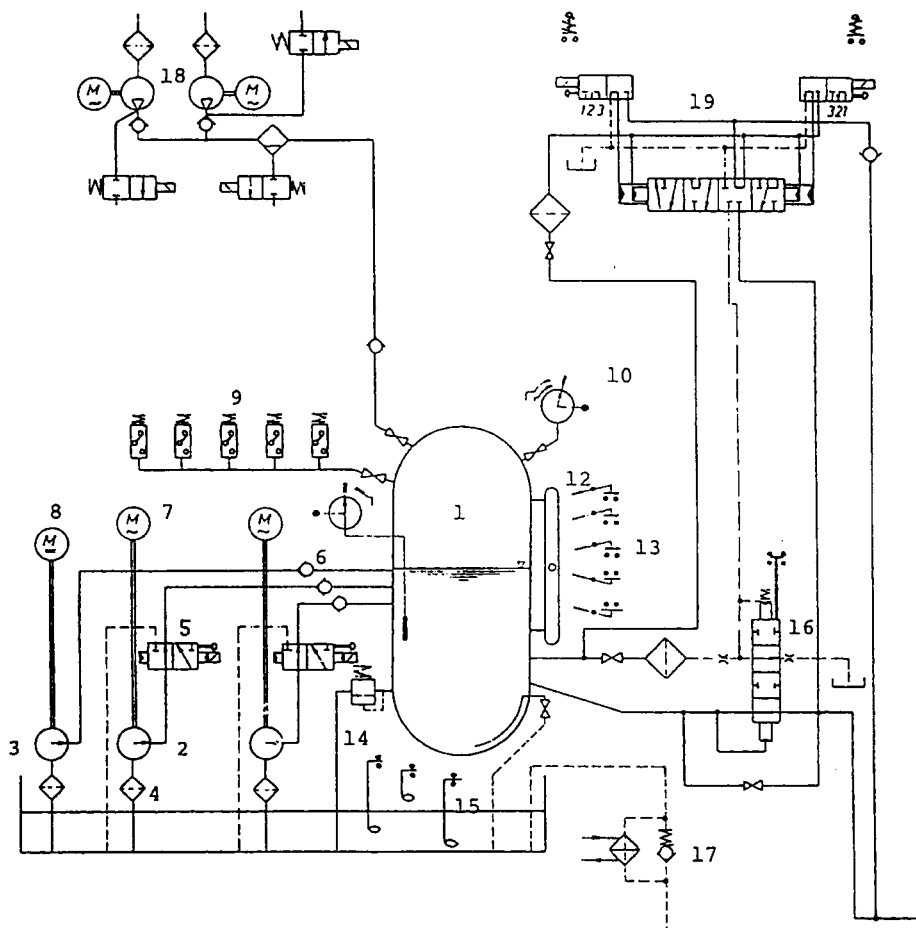
Dersom vi antar at massesvingningene er langsomme, kan turbinregulatoren klare å holde turbineffekten  $= \rho g Q H = \text{konstant}$ . (For korte tunneler med kort svingetid er denne antagelsen noe tvilsom, ref. Dr. ing. kurs - *Regulering av vannkraftverk*).

For langsomme svingninger er kriteriet brukbart selv om man ser bort fra virkningsgradsendringen i turbinen på grunn av endringene i trykk og vannføring.

Da tunneltverrsnittet ofte varierer må vi beregne en ekvivalent lengde som summen av dellengdene, slik at tunneltverrsnittet korrigeres som vist i figur (3.40) og ligning (3.54). Merk at det er hensiktsmessig å velge det tverrsnittet som den lengste delen av tunnelen har  $= f_0$  og omregne de andre dellengdene i forhold til dette tverrsnittet.

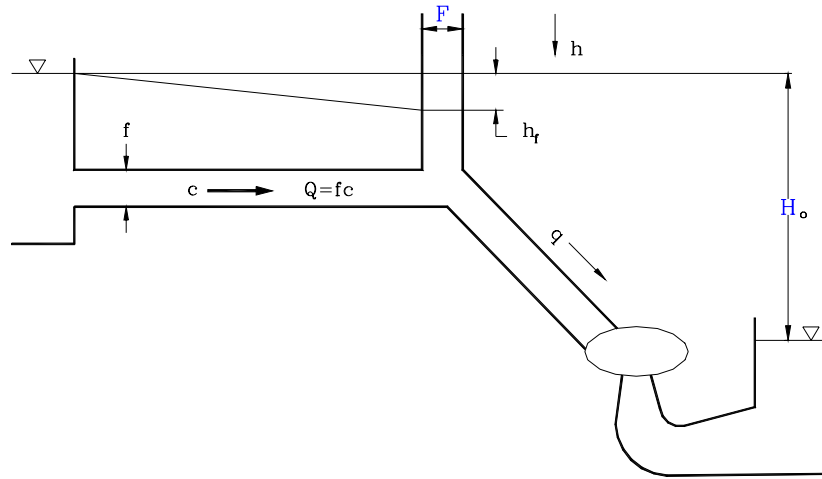
Dersom man legger til grunn tverrsnittet  $f_0$ , kan ekvivalent lengde  $L$  beregnes slik:

$$\begin{aligned}
 m &= \rho V = \rho L f = \rho \sum L f = \rho [L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2 + L_3 f_3 + L_4 f_4 + \dots] \\
 &= \rho f_0 \left[ L_0 + \frac{f_1}{f_0} L_1 + \frac{f_2}{f_0} L_2 + \frac{f_3}{f_0} L_3 + \frac{f_4}{f_0} L_4 + \dots \right] \\
 L &= \left( L_0 + \frac{f_1}{f_0} L_1 + \frac{f_2}{f_0} L_2 + \frac{f_3}{f_0} L_3 + \frac{f_4}{f_0} L_4 \right) = L_0 + \sum_1^n \frac{f_n}{f_0} L_n \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

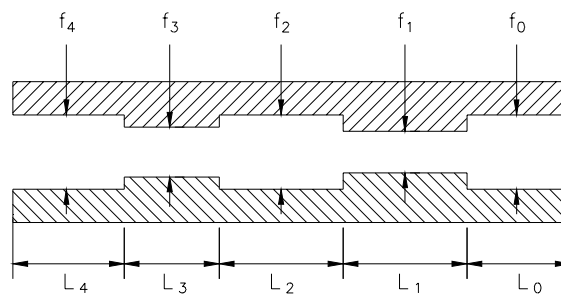


- |                                   |                                       |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1. Akkumulator                    | 11. Termometer med signalkontakter    |
| 2. Oljepumpe (hoved)              | 12. Oljestandsviser                   |
| 3. Oljepumpe (nød)                | 13. Nivåbrytere, akkumulator          |
| 4. Sugefiltre                     | 14. Trykkreguleringsventil            |
| 5. Avlastningsventiler            | 15. Nivåbrytere, oljekasse            |
| 6. Tilbakeslagsventiler           | 16. Påslipningsventil                 |
| 7. Vekselstrømsmotorer (hoved)    | 17. Oljekjøler                        |
| 8. Likestrømsmotor (nød)          | 18. Luftkompressorer                  |
| 9. Trykkbrytere                   | 19. Styreventil for påslipningsventil |
| 10. Manometer med signalkontakter |                                       |

Figur 3.38: Trykkoljeanlegg.



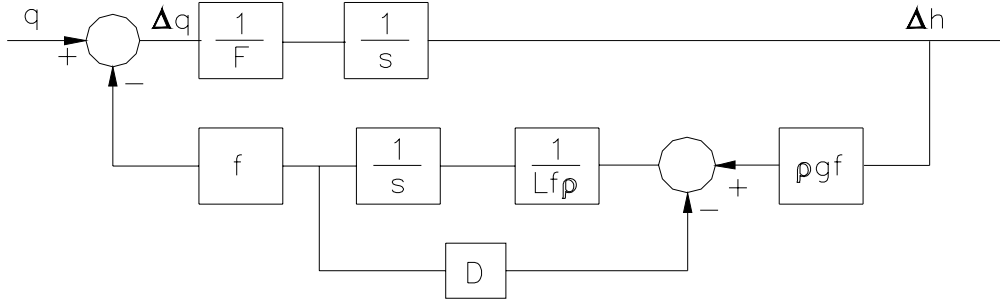
Figur 3.39: Skisse av svingesystemet med betegnelser for lengder, høyder og tverrsnitt. Høyden  $h$  er positiv nedover.



Figur 3.40: Lengder og tilhørende tverrsnitt for en del av et rør.

### Maksimalt oppsving eller trykkstigning - svingetid.

Svingetid og maksimalt oppsving ( $\Delta h$ ) for en sjakt uten friksjon kan finnes fra figur (3.39) ved å sette opp blokkdiagram som i figur (3.41) ved å linearisere friksjonen;  $D = \xi |C_0| = konst.$



Figur 3.41: Blokkdiagram for system med svingesjakt. (Merk at det ikke er dimensjonsløse variable her.)

Settes friksjonen  $D = 0$ , får vi med god tilnærming et bilde av første svingning i frekvensplanet:

$$\frac{\Delta h}{q} = \frac{1}{F} \frac{s}{s^2 + \frac{fg}{FL}}$$

Dette gir i tidsplanet etter et sprangavslag  $= q$  (se appendix hvor dette er utledet for en tilløpstunnel i detalj):

$$\frac{\Delta h}{q} = \sqrt{\frac{L}{fFg}} \sin \sqrt{\frac{fg}{FL}} \cdot t$$

Maksimalt oppsving får vi når vi stenger turbinen plutselig fra fullast, d.v.s.  $q = {}^0Q$  for  $t\sqrt{\frac{fg}{FL}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{FL}{fg}}$ .

$$\Delta h_{\max} = {}^0Q \sqrt{\frac{L}{fFg}} = {}^0c \sqrt{\frac{fL}{Fg}}$$

Svingetiden for en hel svingesyklus blir:

$$T \sqrt{\frac{fg}{FL}} = 2\pi$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{LF}{fg}} \quad (3.55)$$

større forhold  $\frac{F}{f}$  gir lengere svingetid, som betyr at vi har en slakkere fjær.

### Luftpute svingekammer

Et alternativ til åpen svingesjakt er et luftputekammer. Vi ser på kompresjonen av luftvolumet i luftputekammeret. I tillegg B er svingningene i en avløpstunnel med friksjon beregnet.

Antar polytropisk kompresjon:

$$pV^n = \text{const} = p_0V_0^n \quad (3.56)$$

Deriverer uttrykket:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0V_0^n} (dpV^n + pnV^{n-1}dV) &= 0 \\ \frac{dp}{p_0} + n\frac{dV}{V_0} &= 0 \\ \frac{dp}{dV} &= -n\frac{p_0}{V_0} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dersom det regnes dimensjonsløst ved stabilitetsberegninger kan vi sette:

$$\frac{dp}{p_0} = \frac{dH}{H_0} = -n\frac{dV}{V_0}, \text{ ie. } \frac{dH}{dV} = -n\frac{H_0}{V_0}$$

der;

$V_0$  = Initielt luftvolum [ $m^3$ ]

$p_0$  = Initielt lufttrykk i meter vannsøyle (NB!) [ $m V.S.$ ]

$p$  = Varierende trykk i luftputa [ $m$ ]

$V$  = Luftmengde [ $Nm^3$ ]

$n$  = Polytropeksponenten (I norske kraftverk med kaldt vann har man funnet  $n \approx 1.3$ )

### Sammenlikning av sjakt og luftpute.

Endringen av volumet  $V = dV = -Fv dH$ . (Negativt fortegn fordi  $H$  peker nedover, se figur (3.39)). Får da for en sjakt ( $Fv$  = overflaten av vannspeilet i sjakten):

$$\frac{dH}{dV} = -\frac{1}{Fv} \quad (3.58)$$

Og for luftpute, der  $Fv$  = areal av vannspeil (Vannspeilet er stort da kammeret er en horisontal tunnel med stort tverrsnitt):

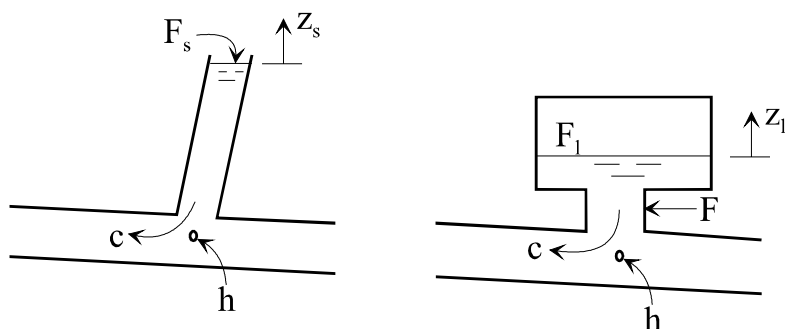
$$\frac{dH}{dV} = -\frac{1}{Fv} - n\frac{H_0}{V_0} = -\left(\frac{1}{Fv} + n\frac{H_0}{V_0}\right) \quad (3.59)$$

se figur (3.42).

Det vil si at luftputa i beregninger av små amplituder kan erstattes av en sjakt med et ekvivalent tverrsnitt gitt av:

$$F_{ekv} = \frac{1}{\frac{1}{Fv} + \frac{nH_0}{V_0}} \quad (3.60)$$

Luftputa kan dermed anslås ved å erstatte sjakttverrsnittet med  $F_{ekv}$ . Vi finner da nødvendig luftmengde  $V_0$  som sikrer en stabil u-rørs svingning. Merk at  $\frac{nH_0}{V_0} \gg \frac{1}{Fv}$  slik at leddet  $\frac{1}{Fv}$  kan sløyfes ved beregning av nødvendig luftvolum med midlere stasjonært trykk =  $H_0$  [ $m V.S.$ ] (meter vannsøyle).



Figur 3.42: Trykk-volum avhengighet, sjakt og luftputekammer.  $F$  er sjakttverrsnitt og  $F_l$  er arealet på vannspeilet i luftputa.

### Thoma-kriteriet

Thoma kriteriet bygger på likevekt av krefter på vannmassene, kontinuitetsligningen og forutsetningen om konstant ytelse på turbinen. Følgende notasjoner er brukt se figur (3.43):

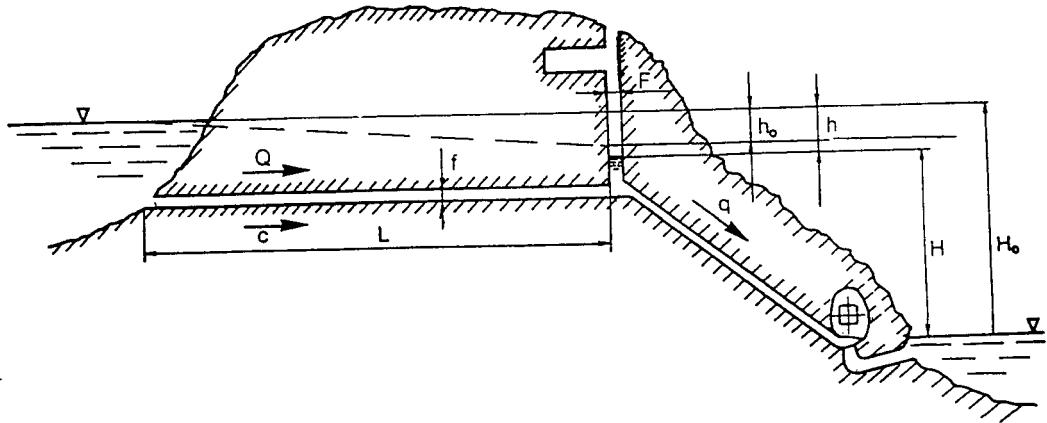
- $h$  = Nivåforskjell mellom overvann og fordelingsbasseng (svingesjakt)
- $h_f$  = Falltap mellom overvann (o.v.) og fordelingsbasseng
- $h_0$  = Falltap mellom (o.v.) og fordelingsbasseng ved begynnelsestilstanden, som er full volumstrøm
- $Q$  = Volumstrømmen i tunnelen
- ${}^0Q$  = Fullast volumstrøm i tunnel og turbin ved stasjonær drift  $q = Q = {}^0Q$ , som er begynnelsestilstand
- $H_G$  = Brutto fallhøyde i [m V.S.]
- $R_h$  = Hydraulisk radius
- $f$  = Darcy-Weisbach's friksjonsfaktor. Merk at  $f$  er beregnet mot  $R_h$ , mens Prandtl's friksjonsfaktor  $\lambda$  er beregnet mot rørdiamteren  $D$  hvor  $R_h = \frac{1}{4}D$ , d.v.s.  $\lambda = 4f$  for samme falltap.
- ${}^0C$  = Vannhastighet i tunnel ved full volumstrøm
- $q$  = Turbinvannføring

Likevekt av friksjonskrefter ved begynnelsestilstanden med vannhastighet =  ${}^0c$  i forhold til en vilkårlig tilstand med hastighet =  $c$  gir følgende ligning:

$$\frac{h_f}{h_0} = \frac{\frac{f}{R_h} \frac{L}{2g} c^2}{\frac{f}{R_h} \frac{L}{2g} {}^0c^2} \Rightarrow h_f = h_0 \left( \frac{c}{{}^0c} \right)^2 = h_0 \left( \frac{Q}{{}^0Q} \right)^2 \quad (3.61)$$

Følgende tre ligninger kan nå settes opp for de dynamiske svingingene ved variasjon i turbinens vannføring:

1. Likevekt av krefter fra overvann til fordelingsbasseng (Newtons 2. lov)



Figur 3.43: Skjematisk snitt av vannkraftanlegg med svingesjakt i fjell.

$$ma = \rho gh \cdot f - \rho gh_f \cdot f$$

$$\rho \cdot f \cdot L \cdot \frac{dc}{dt} = \rho g f \cdot (h - h_f)$$

Forkorter og setter inn for  $h_f$  og får:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{gf}{L} \cdot \left( h - h_0 \left( \frac{Q}{{}^0Q} \right)^2 \right) \quad (3.62)$$

## 2. Kontinuitets ligningen fra tunnel og turbin til svingesjakt

(Turbinrørets svingninger neglisjeres da de er en dekode hurtigere).

$$Q + \frac{dh}{dt} F = q \quad (3.63)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{q - Q}{F} \quad (3.64)$$

## 3. Konstant ytelse på turbinen (d.v.s. ideell regulering).

(Dette gjelder for lange tunneler. Ved korte tunneler klarer ikke turbinen å oppfylle denne ligningen 100% slik at større sikkerhet må brukes ved beregning av det kritiske tverrsnittet på svingesjakten).

$$q(H_0 - h) = {}^0Q(H_0 - h_0) \quad (3.65)$$

Vi setter nå (3.65) inn i (3.64) og får:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{q - Q}{F} = \frac{{}^0Q(H_0 - h_0) - Q(H_0 - h)}{F(H_0 - h)} \quad (3.66)$$

ligning (3.62) og (3.66) ordnes og dimensjonsløse størrelser innføres:

$$\frac{d\left(\frac{Q}{{}^0Q}\right)}{d\left(\frac{t}{\left(\frac{L^{\circ}c}{gh_0}\right)}\right)} = \frac{h}{h_0} - \left(\frac{Q}{{}^0Q}\right)^2 \quad (3.67)$$

Husk at  ${}^0Q = f \cdot {}^{\circ}c$

$$\frac{d\left(\frac{h}{h_0}\right)}{d\left(\frac{t}{\left(\frac{L^{\circ}c}{gh_0}\right)}\right)} = \frac{L^{\circ}c^2f}{gh_0^2F} \left[ \frac{\left(1 - \frac{h_0}{H_0}\right)}{\left(1 - \frac{h_0}{H_0} \frac{h}{h_0}\right)} - \frac{Q}{{}^0Q} \right] \quad (3.68)$$

Ved hjelp av Newtons 2. lov for uelastisk vann og tunnel finnes tunnelens anløpstid  $T_t$ .  $T_t$  er definert som den tid det tar å akselerere vannet fra stillstand til nominell fullastvannføring med helt åpent pådrag på turbinen d.v.s. ( $q = {}^0Q$ ) når nominell trykkforskjell fra inntaket til svingesjakten er lik falltapet om det antas friksjonsfri strømning. (Denne definisjonen er analog med definisjonen av turbinrørledningens tidskonstant  $T_w$  dersom det drivende trykk var  $\rho gh_0$ ).

$$\begin{aligned} \rho gh_0 f &= \rho L f \frac{dc}{dt} \\ \int_0^{T_t} dt &= \frac{L}{gh_0} \int_0^{{}^{\circ}c} dc \\ T_t &= \frac{L^{\circ}c}{gh_0} \end{aligned}$$

Det er hensiktsmessig å bruke tidskonstanten  $T_t$  som tidsenhet ved beregning av tunnelsystemets stabilitet. Definerer så følgende dimensjonsløse størrelser:

$$\frac{h}{h_0} = X$$

$$\frac{Q}{{}^0Q} = Y$$

$$\frac{h_0}{H_0} = \beta$$

$$\frac{L^{\circ}c}{gh_0} = T$$

$$\frac{L^{\circ}c^2f}{gh_0^2F} = Z$$

Uttrykkene i ligning (3.67) og (3.68) blir da:

$$\frac{dY}{dT} = X - Y^2 \quad (3.69)$$

$$\frac{dX}{dT} = Z \left[ \frac{(1 - \beta)}{1 - \beta X} - Y \right] \quad (3.70)$$

Innfører nå  $X = 1 + \Delta X$ ,  $Y = 1 + \Delta Y$  og neglisjerer ledd av høyere orden ( $\Delta X^2 \approx 0$ ,  $\Delta Y^2 \approx 0$ ,  $\Delta X \Delta Y \approx 0$  og  $\frac{d\Delta X}{dT} \Delta X \approx 0$ ). Fra ligning (3.69) får vi:

$$\frac{d\Delta Y}{dT} = 1 + \Delta X - (1 + 2\Delta Y - \Delta Y^2) \quad (3.71)$$

$$\frac{d\Delta Y}{dT} = \Delta X - 2\Delta Y - \Delta Y^2 \quad (3.72)$$

Neglisjeres høyere orden ledd fås :

$$\frac{d\Delta Y}{dT} = \Delta X - 2\Delta Y \quad (3.73)$$

Ordnet gir dette :

$$\Delta X = 2\Delta Y + \frac{d\Delta Y}{dT} \quad (3.74)$$

Ordner ligning (3.70):

$$(1 - \beta X) \frac{1}{Z} \frac{dX}{dT} = 1 - \beta - Y(1 - \beta X)$$

Setter inn for  $X = 1 + \Delta X$  og  $Y = 1 + \Delta Y$  :

$$\begin{aligned} [1 - \beta(1 + \Delta X)] \frac{1}{Z} \frac{d(1 + \Delta X)}{dT} &= 1 - \beta - (1 + \Delta Y)[1 - \beta(1 + \Delta X)] \\ [(1 - \beta)(1 + \Delta X)] \frac{1}{Z} \frac{d\Delta X}{dT} &= 1 - \beta - (1 + \Delta Y)[1 - \beta(1 + \Delta X)] \end{aligned} \quad (3.75)$$

Multipliserer ut:

$$[(1 - \beta) + (1 - \beta)\Delta X] \frac{1}{Z} \frac{d\Delta X}{dT} = (1 - \beta) - (1 - \beta - \beta\Delta X) - [\Delta Y - \beta\Delta Y - \beta\Delta X\Delta Y]$$

Eliminerer ledd av høyere orden og summerer:

$$(1 - \beta X) \frac{1}{Z} \frac{d\Delta X}{dT} = \beta\Delta X - (1 - \beta)\Delta Y$$

Ordnet:

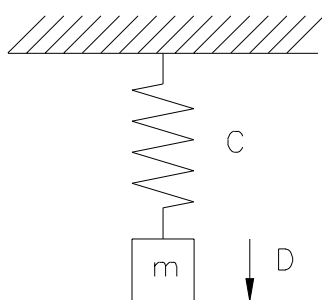
$$\beta\Delta X = (1 - \beta) \left[ \Delta Y + \frac{1}{Z} \frac{d\Delta X}{dT} \right] \quad (3.76)$$

$\Delta X$  elimineres ved å kombinere ligning (3.74) og (3.76), og vi får:

$$2\beta \Delta Y + \beta \frac{d\Delta Y}{dT} = (1-\beta) \left[ \Delta Y + \frac{1}{Z} 2 \frac{d\Delta Y}{dT} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 \Delta Y}{dT^2} \right]$$

$$(1-\beta) \frac{d^2 \Delta Y}{dT^2} + [2(1-\beta) - Z\beta] \frac{d\Delta Y}{dT} + Z(1-3\beta) \Delta Y = 0 \quad (3.77)$$

Denne ligningen er en andre ordens differensialligning lik den vi har for en masse hengt opp i en fjær og den gjelder for små variasjoner omkring en likevektstilstand på grunn av at vi har foretatt en linearisering ved å neglisjere leddene av høyere orden. (se F. Vogt, *Berechnung und Konstruktion des Wasserschlosses*).



D: dempning

Figur 3.44: Prinsipp for svingninger omkring en likevektstilstand.

Ligning (3.77) har formen

$$m\Delta \ddot{Y} + D\Delta \dot{Y} + C\Delta Y = 0 \quad (3.78)$$

der  $m$  er massen,  $C$  er fjærkonstanten og  $D$  er dempingen, se figur (3.44). Denne ligningen løses som kjent ved å innføre  $\lambda$ :

$$m\lambda^2 + D\lambda + C = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{D}{m}\lambda + \frac{C}{m} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2m}\right)^2 - \frac{C}{m}} \quad (3.79)$$

Løsningen av differensialligningen blir da:

$$\Delta Y = Ae^{\left(-\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2m}\right)^2 - \frac{C}{m}}\right)t} \quad (3.80)$$

Her er  $m = (1 - \beta)$ ,  $D = [2(1 - \beta) - Z\beta]$ , og  $C = Z(1 - 3\beta)$ . Vi ser at vi får dempet svingning i systemet for  $\frac{D}{m} > 0$  og  $\frac{C}{m} > 0$ . For  $\frac{C}{m} = 0$  får vi aperiodisk bevegelse, d.v.s. ingen svingning. For et vanlig system er ikke dette fysisk mulig, da  $(\frac{D}{2m})^2 \ll \frac{C}{m}$  og  $\frac{C}{m} = 0$  medfører  $h_0 = \frac{1}{3}H_0$ . Dette gir at vi får følgende betingelser for et stabilt system med dempede svingninger:

$$\frac{[2(1 - \beta) - Z\beta]}{(1 - \beta)} > 0 \quad (3.81)$$

(Merk at for  $\frac{D}{m} < 0$ , får vi økende amplituder med tiden, og systemet blir helt ustabilt.) Vi får følgende betingelse for stabilitet, uttrykt ved tverrsnittet i svingesjakten i forhold til tunneltverrsnittet fra ligning (3.81) ved innsetting av  $Z$  og  $\beta$ :

$$F > \frac{Lf \cdot c_0^2}{2gh_0(H_0 - h_0)} = F_{th} \quad (3.82)$$

$F_{th}$  er det teoretiske Thoma tverrsnittet. For å få en dempet svingning må vi ha en sikkerhetsfaktor. For korte tunneler brukes vanligvis:

$$F_{virkelig} > 1.5F_{th} \quad (3.83)$$

Og for lange tunneler brukes:

$$F_{virkelig} > 1.3F_{th} \quad (3.84)$$

Merk: Vi har her regnet med at en ustrupet svingesjakt har  $h_0 = \zeta L \frac{c_0^2}{2g}$  og for store fallhøyder:  $H_0 - h_0 = H =$  netto fallhøyde. Dette gir at  $F$  er uavhengig av tunnellengden ved innsetting for  $h_0$  i ligning (3.82). Og for høytrykksanlegg får vi følgende krav til tverrsnittet. Fremdeles gjelder kravet til sikkerhet som angitt i ligning (3.82).

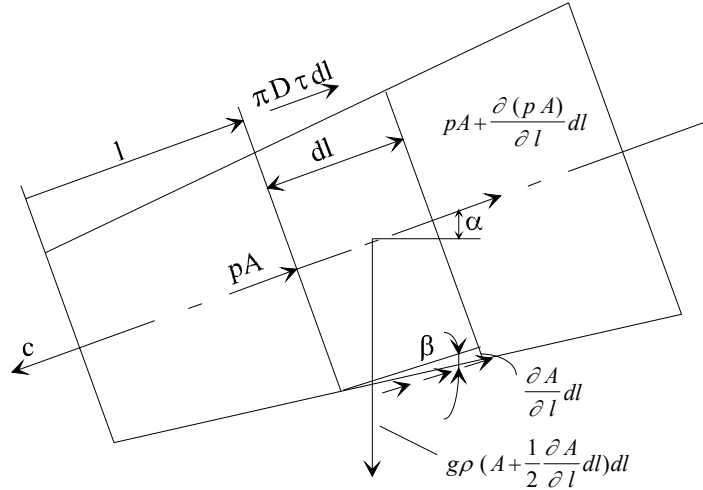
$$F > \frac{f}{\zeta H} = F_{th}$$

### 3.3.2 Trykkstøt

#### Allievis ligninger

Se også Appendix H hvor Allievis ligninger er utledet som en endimensjonal variant av Eulers ligninger. Vi har tidligere beskrevet at trykkstøt oppstår ved hurtige variasjoner av pådraget (ledeskovler eller nåler) som fører til trykkbølger som reflekteres fra nærmeste vannspeil. Vi skal i det følgende utlede ligningene for disse trykkstøtene som oppstår på grunn av at både vann og rør er elastiske. Det samme gjelder også for tunneler og høytrykkstunneler som føres nesten ned til kraftverket da disse behandles på samme måte som beskrevet for rør i dette avsnittet. Vi må imidlertid være oppmerksomme på at friksjonsdempingen i røe tunneler er stor slik at friksjonsleddet gir en ekstra sikkerhet for de beregnede verdier vist i dette avsnittet. En nøyaktig beregning av friksjonen er vist i Brekkes Dr. techn. avhandling som er pensum i Dr. ing. faget *Regulering av vannkraftverk*.

Vi tar utgangspunkt i figur (3.45).



Figur 3.45: Krefter som virker på et væskeelement i et rør.

Benevninger:

- $\tau$  = skjærkraft =  $f(Q)$
- $A$  = tverrsnittsareal
- $D$  = rørdiameter
- $p$  = trykk
- $\rho$  = tetthet
- $l$  = rørlengde
- $c$  = væskehastighet
- $Q$  = volumstrøm

Definerer  $c$  (væskehastigheten) som positiv ut av rørenden tilkoppelt turbinen d.v.s. nedover i røret, mens  $l$  er positiv oppover i røret fra turbinen. Følgende ligning for kreftene på et fritt legeme kan etableres ved å studere figur (3.45) (Newtons 2. lov):

$$pA + \left( p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial l} dl \right) \frac{\partial A}{\partial l} dl - pA - \frac{\partial(pA)}{\partial l} dl + \pi D \tau dl - \quad (3.85)$$

$$\rho g \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial l} dl \right) dl \sin \alpha + \rho \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial l} dl \right) dl \frac{dc}{dt} = 0 \quad (3.86)$$

↓

$$-\frac{\partial p}{\partial l} A dl - \frac{\partial A}{\partial l} p dl + \frac{\partial A}{\partial l} p dl + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial l} \frac{\partial A}{\partial l} dl dl + \pi D \tau dl -$$

$$\rho g A \sin \alpha \cdot dl - \frac{1}{2} \rho g \frac{\partial A}{\partial l} \sin \alpha \cdot dl dl + \rho A \frac{dc}{dt} dl + \frac{1}{2} \rho A \frac{\partial A}{\partial l} \frac{dc}{dt} dl dl = 0$$

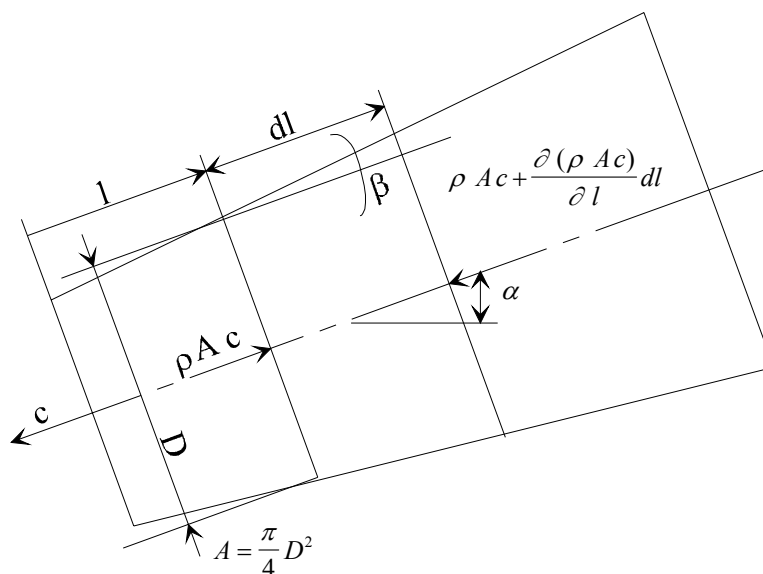
Vi neglisjerer ledd med høyere ordens differensierte siden de er "små", og står igjen med:

$$-\frac{\partial p}{\partial l} A dl + \pi D \tau dl - \rho g A \sin \alpha \cdot dl + \rho A \frac{dc}{dt} dl = 0 \quad (3.87)$$

Setter inn for  $p = \rho g H$  og  $Q = cA$ . Merk: vi benevner her hydraulisk trykk med store bokstaver (H). Det hydrauliske trykket angis i meter vannsøyle (m V.S.), og vi bruker små bokstaver (h) for relativt dimensjonsløst trykk. Vi får da for kreftene på legemet:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{1}{Ag} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\pi D \tau}{\rho} - Ag \sin \alpha \right)} \quad (3.88)$$

Vi ser nå på kontinuitetsligningen, og tar utgangspunkt i figur (3.46).



Figur 3.46: Kontinuitet for et væskeelement.

Vi får at: *massestrøm inn = massestrøm ut - komprimert masse av en liten lengde dl*, noe som gir følgende ligning:

$$\begin{aligned} -\rho A c + \rho A c + \frac{\partial(\rho A c)}{\partial l} dl - \frac{\partial(\rho A dl)}{\partial t} &= 0 \quad (3.89) \\ \frac{\partial \rho}{\partial l} A c dl + \frac{\partial A}{\partial l} \rho c dl + \frac{\partial c}{\partial l} \rho A dl - \frac{\partial \rho}{\partial t} A dl - \frac{\partial A}{\partial t} \rho dl - \frac{\partial(dl)}{\partial t} \rho A &= 0 \end{aligned}$$

Vi antar at røret er festet i begge ender slik at det ikke kan utvides i rørets lengderetning, d.v.s.  $\frac{\partial(dl)}{\partial t} = 0$ . Innfører også følgende sammenhenger da vi skal differensiere med hensyn tid og lengde av røret og løse ligningene m.h.t. tid og sted.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial A}{\partial l} &= \left( \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial l} + \pi D \tan \beta \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial \rho}{\partial l} &= \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial l} \end{aligned}$$

Kontinuitetsligningen får da følgende form:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial l} A c + \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial l} \rho c + \pi D \tan \beta \rho c + \frac{\partial c}{\partial l} = \rho A - \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial l} A - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial l} \rho = 0 \quad (3.90)$$

eller:

$$\frac{\partial c}{\partial l} \rho + \left( -\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial l} c \right) \left( \frac{\partial A \rho}{\partial p A} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + \frac{\pi D \tan \beta}{A} \rho c = 0 \quad (3.91)$$

Vi innfører trykkforplantningshastigheten (a) som er et uttrykk for elastisiteten i rørveggene og vannet i røret. D.v.s.  $\frac{\partial A}{\partial p}$  og  $\frac{\partial \rho}{\partial p}$ . Jo større elastisitet jo lavere blir hastigheten på trykkbølgen. Den bakerste parentesene i 2. ledd i ligning (3.91) inneholder elastisitetsleddene og vi kan da finne følgende uttrykk for trykkbølgens hastighet (a):

$$a = \left( \frac{\partial A \rho}{\partial p A} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad [m/s] \quad (3.92)$$

Setter inn for  $A = \pi D^2/4$ ,  $Q = cA$ ,  $p = \rho g H$  og ligning (3.92).

Vi får da:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial l} = \frac{g A \partial H}{a^2 \partial t} - \frac{g \partial H}{a^2 \partial l} Q - \frac{4}{D} \tan \beta \cdot Q} \quad (3.93)$$

Leddet  $\left( \frac{g \partial H}{a^2 \partial l} Q \right)$  neglisjeres normalt for stive rør da dette leddet blir lite. (For gummislanger bør ikke dette leddet neglisjeres). Hvis vi ser på lange tunneller og rør så kan også leddet som tar i betraktning konusiteten i røret  $\frac{4}{D} \tan \beta \cdot Q$ , neglisjeres fordi leddet blir veldig lite for større rørlengder. Vi laplacetransformerer ligning (3.88) og (3.93), men ser bort fra innflytelsen fra helningen ( $\sin \alpha = 0$ ) da innflytelsen fra den geodetiske høyden ikke varierer over tid og kan legges til slutt om dette har interesse. Innfører dimensjonsløse størrelser  $h$  og  $q$  som erstatter  $H$  og  $Q$  som angitt. Her er  $H_0$  og  $Q_0$  middelerverdier.

$$h = \frac{H}{H_0} = \frac{H_0 + \Delta H}{H_0} \quad (3.94)$$

$$q = \frac{Q}{Q_0} = \frac{Q_0 + \Delta Q}{Q_0} \quad (3.95)$$

Vi får da ved å innføre "accent circonflex" ( $\hat{\quad}$ ) som angir at vi har Laplace transformert ligningene. Da blir  $\hat{h}$  og  $\hat{q}$  variable i frekvensplanet:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{h}}{\partial l} = \frac{Q_0}{H_0 g A} (s + K) \hat{q}} \quad (3.96)$$

$$\boxed{\frac{\partial \hat{q}}{\partial l} = \frac{A H_0 g}{a^2 Q_0} s \cdot \hat{h}} \quad (3.97)$$

Her har vi satt friksjonsleddet som en konstant ( $K$ ) ved lineariseringen. Ved en matriseløsning kan vi imidlertid ved hjelp av iterasjon finne den riktige ulineære løsningen, men dette utelates her. (Ref. Dr. ing. faget *Regulering av Vannkraftverk*). (Se også kapittel 5 ligning (5.7), og i appendix).

$$K = \pi D \tau (\rho Q \hat{q})^{-1} \quad (\text{merk : } \tau = \tau(Q, q)) \quad (3.98)$$

Ligningene (3.96) og (3.97) er *Allievis ligninger* omformet til frekvensplanet. Ulike metoder for løsning av ligningene i tidsplanet er vist i kapittel 5.

**Vannveiens transferfunksjon  $\frac{\hat{p}}{\hat{y}}$  og  $\frac{\hat{h}}{\hat{q}}$** 

De viste Allievis ligninger danner utgangspunktet for modelleringen av vannveiene i frekvensplanet for stabilitetsbergning av turbin med regulator og generator. Ligningene (3.96) og (3.97) kan løses ved først å derivere ligning (3.96) m.h.p.  $l$ :

$$\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial l^2} = \frac{Q_0}{H_0 g A} (s + K) \frac{\partial \hat{q}}{\partial l} \quad (3.99)$$

Setter ligning (3.97) inn i ligning (3.99):

$$\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial l^2} = \frac{1}{a^2} (s^2 + Ks) \hat{h} \quad (3.100)$$

Innfører så det komplekse tallet  $Z$ :

$$Z = \sqrt{(s^2 + Ks)} = \sqrt{-\omega^2 + K \cdot j\omega} = x + iy$$

Der;

$$x = \omega \left[ 1 + \left( \frac{K}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} - \sin \left[ 0.5 \tan^{-1} \left( \frac{K}{\omega} \right) \right]$$

$$y = \omega \left[ 1 + \left( \frac{K}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} - \cos \left[ 0.5 \tan^{-1} \left( \frac{K}{\omega} \right) \right]$$

Dette gir for ligning (3.100):

$$\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial l^2} = \frac{Z^2}{a^2} \hat{h} \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial l^2} - \frac{Z^2}{a^2} \hat{h} = 0 \quad (3.102)$$

Dette er en 2. ordens differensialligning, og løsningen blir:

$$\hat{h} = \alpha_1 e^{(\frac{Z}{a})l} + \alpha_2 e^{-(\frac{Z}{a})l} \quad (3.103)$$

Partiellderiverer  $\hat{h}$  m.h.p.  $l$ :

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial l} = \alpha_1 \left( \frac{Z}{a} \right) e^{(\frac{Z}{a})l} - \alpha_2 \left( \frac{Z}{a} \right) e^{-(\frac{Z}{a})l} \quad (3.104)$$

Setter inn for  $\frac{\partial \hat{h}}{\partial l}$  i ligning (3.96):

$$\hat{q} = \frac{H_0 g A}{Q_0} \frac{1}{(s + K)} \left[ \alpha_1 \left( \frac{Z}{a} \right) e^{(\frac{Z}{a})l} - \alpha_2 \left( \frac{Z}{a} \right) e^{-(\frac{Z}{a})l} \right] \quad (3.105)$$

Setter inn for  $Z = \sqrt{(s^2 + Ks)}$  eller  $(s + K) = \frac{Z^2}{s}$ , setter  $\frac{Z}{a}$  utenfor parentesen og får:

$$\hat{q} = \frac{H_0 g A}{Q_0 a} \frac{s}{Z} \left[ \alpha_1 e^{(\frac{Z}{a})l} - \alpha_2 e^{-(\frac{Z}{a})l} \right] \quad (3.106)$$

Vi forenkler nå videre ved å regne friksjonsfritt,  $K = 0$ , som gir  $Z = s$ . Ligningene (3.103) og (3.106) får da formen:

$$\hat{h} = \alpha_1 e^{\frac{l}{a}s} + \alpha_2 e^{-\frac{l}{a}s} \quad (3.107)$$

$$\hat{q} = \frac{H_0 g A}{Q_0 a} \left[ \alpha_1 e^{\frac{l}{a}s} - \alpha_2 e^{-\frac{l}{a}s} \right] \quad (3.108)$$

Se også Hermod Brekkes Dr. techn. avhandling, eller utdrag i Tillegg G, hvor en matriseløsning er satt opp. Vi ønsker nå å finne forholdet  $\frac{\hat{h}}{\hat{q}}$  som gir en enkel løsning ved å dividere ligning (3.107) med ligning (3.108). Vi har følgende grensebetingelse forutsatt at det er et fritt vannspeil i øvre ende av røret:  $\hat{h} = 0$  for  $l = L$ . I nedre rørende har vi grensebetingelsen  $l = 0$ ,  $q = -q$ . Ved innsetting får vi:

$$\frac{\hat{h}}{\hat{q}} = \frac{-Q_0 a \left( 1 - e^{-\frac{2L}{a}s} \right)}{A g H_0 \left( 1 + e^{-\frac{2L}{a}s} \right)} = \frac{-Q_0 a}{A g H_0} \tanh\left(\frac{l}{a} s\right) \quad (3.109)$$

Vi innfører nå;

$$h_w = \frac{Q_0 a}{2 A g H_0} \quad (3.110)$$

der  $h_w$  er Allievis konstant. Det gir for ligning (3.109):

$$\frac{\hat{h}}{\hat{q}} = -2 h_w \tanh\left(\frac{L}{a} s\right) \quad (3.111)$$

Setter  $s = j\omega$  :

$$\frac{\hat{h}}{\hat{q}} = -2 h_w \tanh\left(\frac{L}{a} j\omega\right) = -j 2 h_w \tan\left(\frac{L}{a} \omega\right) \quad (3.112)$$

### Turbinytelsen

Hydraulisk effekt er gitt ved  $P = \rho g H Q \eta$

Endringer av effekten rundt en stasjonsær tilstand,  $P_0 = \rho g H_0 Q_0 \eta_0$  finnes ved differensiering. Forenklet settes virkningsgraden konstant,  $\eta = \eta_0$ . Hvis vi differensierer ser vi at:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial Q} dQ + \frac{\partial P}{\partial H} dH \\ &= \rho g H \eta \cdot dQ + \rho g Q \eta \cdot dH \end{aligned} \quad (3.113)$$

Innfører relative variabler ved å dividere med  $P_0 = \rho g H_0 Q_0 \eta_0$  på begge sider;  $p = \frac{dP}{P_0}$ ,  $q = \frac{dQ}{Q_0}$  og  $h = \frac{dH}{H_0}$

$$p = \frac{dP}{P_0} = \frac{dQ}{Q_0} + \frac{dH}{H_0} \quad (3.114)$$

Setter inn for;

$$\begin{aligned} h &= \frac{dH}{H_0} = \frac{d(H_0 + \Delta H)}{H_0} \\ q &= \frac{dQ}{Q_0} = \frac{d(Q_0 + \Delta Q)}{Q_0} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Får nå følgende lineariserte ligning som kan brukes i et blokkdiagram.

$$p = h + q \quad (3.116)$$

Skal nå finne innvirkningen på vannføringen fra variasjon i trykket på samme måte. Vi vet at

$$Q = \mu\sqrt{2gH} \text{ og } Q_0 = \mu\sqrt{2gH_0} \quad (3.117)$$

der  $\mu$  er ventilåpningsgrad. Differensierer  $Q$  og får:

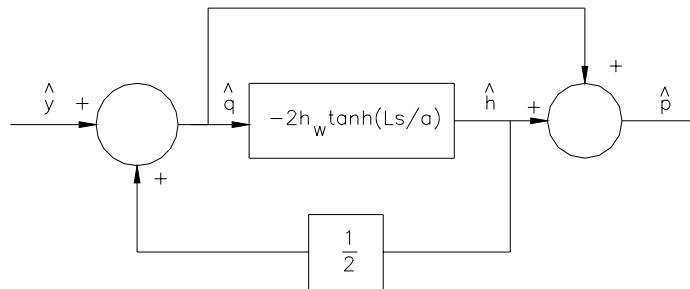
$$dQ = \mu \frac{1}{2} (2gH)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2gdH \quad (3.118)$$

Dividerer på begge sider med  $Q_0 = \mu\sqrt{2gH_0}$

Omformer uttrykket og setter inn for (3.115) og får for en middelverdi der vi setter  $H = H_0$ . Innfører dimensjonsløse relative verdier for  $h = \frac{dH}{H_0}$  og  $q = \frac{dQ}{Q_0}$  og får:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{Q_0} &= \frac{dH}{2H_0} \\ q &= \frac{1}{2}h \end{aligned} \quad (3.119)$$

På grunnlag av ligning (3.109) - (3.119) kan vi nå sette opp blokkdiagrammet i figur (3.47).



Figur 3.47: Blokkdiagram forenklet vannveisystem.

Dersom vi forenkler blokkdiagrammet får vi:

$$\frac{\hat{p}}{\hat{y}} = \frac{1 - 2h_w \tanh\left(\frac{L}{a}s\right)}{1 + h_w \tanh\left(\frac{L}{a}s\right)} \quad (3.120)$$

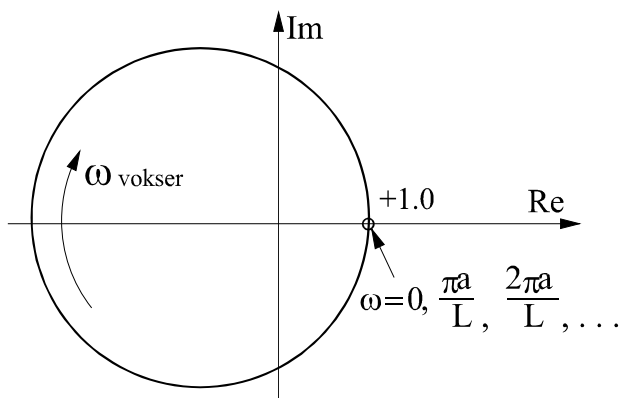
merk at vi fra blokkdiagrammet også finner verdien  $\frac{\hat{h}}{\hat{y}}$  som følger:

$$\frac{\hat{h}}{\hat{y}} = \frac{-2h_w \tanh\left(\frac{L}{a}s\right)}{1 + h_w \tanh\left(\frac{L}{a}s\right)} \quad (\text{her er } s = j\omega) \quad (3.121)$$

For små verdier av  $\frac{L}{a}$  d.v.s. korte rør hvor  $\frac{L}{a} < 0.1$  kan vi sette  $\tanh(\frac{L}{a}j\omega) = j \tanh(\frac{L}{a}\omega) \approx j\frac{L}{a}$  og  $2h_w \tanh(\frac{L}{a}s) \approx T_w s L$  da  $h_w = \frac{aC_0}{2gH}$  og  $T_w = \frac{LC_0}{gH}$  slik at  $T_w = \frac{2L}{a}h_w$ . Ligning (3.91) kan også skrives på formen (setter  $\theta = 2h_w \tanh(\frac{L}{a}s)$ ) for å forenkle:

$$\frac{\hat{p}}{\hat{y}} = \frac{1 - \theta}{1 + \frac{1}{2}\theta} = -\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\theta}{1 + \frac{1}{2}\theta} + \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\theta}{1 + \frac{1}{2}\theta} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}\theta}{1 + \frac{1}{2}\theta} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - h_w \tanh(\frac{L}{a}s)}{1 + h_w \tanh(\frac{L}{a}s)}$$

Dette gir en sirkel med radius =  $\frac{3}{2}$  og senter i punkt  $-\frac{1}{2}, 0$  d.v.s. på den reelle akse. Husk at  $\tanh(\frac{L}{a}\omega) = j \tan(\frac{L}{a}\omega)$ .



Figur 3.48: Transferfunksjonen  $\frac{\hat{p}}{\hat{y}}$  i det komplekse plan.

I det komplekse plan vil (3.120) se ut som i figur (3.48). For korte rør  $\approx$  uelastiske rør får vi  $\theta = \frac{1}{2} \tau_w s$  og stedskurven blir en halvsirkel i nedre halvplan hvor fasevinkelen går mot  $-180^\circ$  når  $\omega \rightarrow \infty$ .

Som retningslinje kan vi tilnærmet betrakte røret som uelastisk, d.v.s.  $2h_w \tanh(\frac{L}{a}j\omega) = j 2h_w \tan(\frac{L}{a}\omega) \Rightarrow T_w j\omega = T_w s$  for følgende verdier som gir  $\frac{L}{a}\omega < 0.2$ :

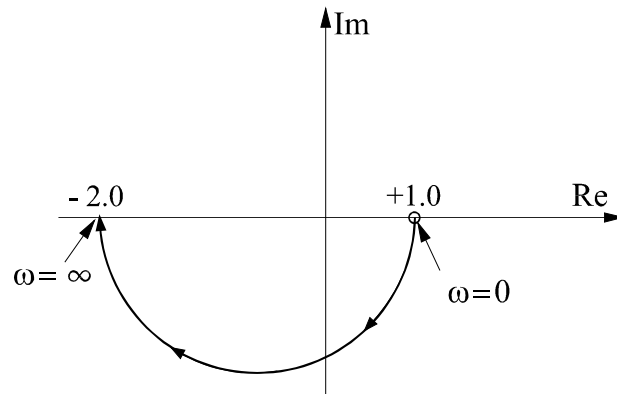
$$\begin{aligned} a &> 1000 \text{ [m/s]} \\ \omega &\leq 2 \text{ [rad/s]} \\ L &\leq 200 \text{ [m]} \end{aligned}$$

En annen tommelfingerregel er at en kan sette  $2h_w \tanh(\frac{L}{a}s) \approx T_w s$  når vi har  $h_w > 1.0$ . Vi får da transferfunksjonen for et rør tilkopleet en turbin:

$$\frac{p}{y} = \frac{1 - T_w s}{1 + \frac{1}{2}T_w s} \quad (3.122)$$

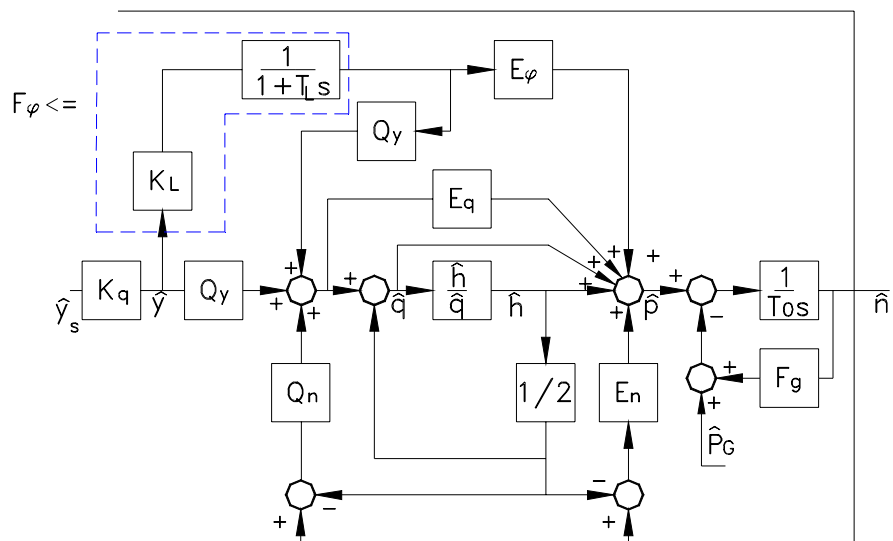
I det komplekse plan vil denne funksjonen se ut som vist i figur (3.49).

For å komme fram til blokkdiagrammet i figur (3.47) har vi gjort en del forenklinger. Dersom vi for en dobbeltregulert turbin (for eksempel Kaplan) hadde regnet med innflytelsen fra turbinkarakteristikkene og variasjonen i virkningsgrad ville figur (3.47) blitt erstattet av blokkdiagrammet i figur (3.50). (Dette er imidlertid ikke pensum i dette kompendiet).



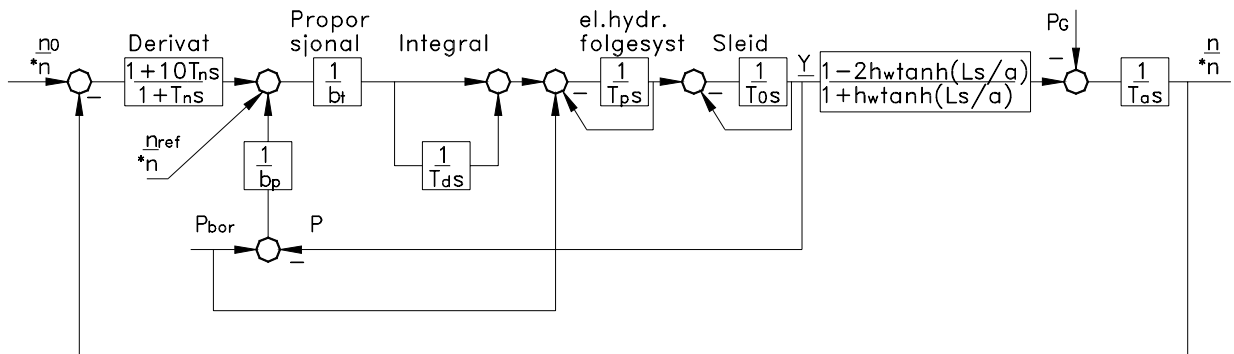
Figur 3.49: Transferfunksjonen  $\hat{\frac{p}{y}}$  i det komplekse plan ( $\frac{L}{a}\omega < 0, 2$ ).

- $Q_n$  = Linearisert forhold mellom volumstrøm og omløpstall
- $Q_\phi$  = Linearisert forhold mellom volumstrøm og løpeskovlvinkel (ved vridbare løpeskovler)
- $Q_y$  = Linearisert forhold mellom volumstrøm og ledeskovlvinkel (nålposisjon)
- $E_n$  = Linearisert forhold mellom effektivitet og omløpstall
- $E_q$  = Linearisert forhold mellom effektivitet og volumstrøm
- $E_\phi$  = Linearisert forhold mellom effektivitet og løpeskovlvinkel
- $K_q$  = Linearisert forhold mellom ledeskovlvinkel (nålposisjon) og servoslag



Figur 3.50: Blokkdiagram for en dobbeltregulert turbin med innflytelse fra turbinkarakteristikkene. (Ref. H. Brekkes Dr. techn. avhandling.)

For spesielt interesserte henvises det til Hermod Brekkes dr. techn. avhandling. Vi skal her nøye oss med å se på vannveiene slik de er beskrevet i figur (3.47). Vi får da blokkdiagrammet i figur (3.51). I figur (3.51) er det vist et komplett blokkdiagram for en forenklet turbin uten innflytelse



Figur 3.51: Blokkdiagram forenklet system.

fra turbinkarakteristikken, virkningsgraden og dobbelt regulering som vist i figur (3.50). Diagrammet for det komplette reguleringsystemet som er vist i figur (3.51) illustrerer imidlertid det vesentlige ved analyse av reguleringsstabiliteten for et vannkraftverk og er tilnærmet korrekt for Pelton turbiner ved små forstyrrelser hvor deflektoren ikke går inn i strålen. Vi ser av diagrammet at referanseinnstillingen ikke går gjennom derivatleddet som omtalt tidligere i dette kompendiet.

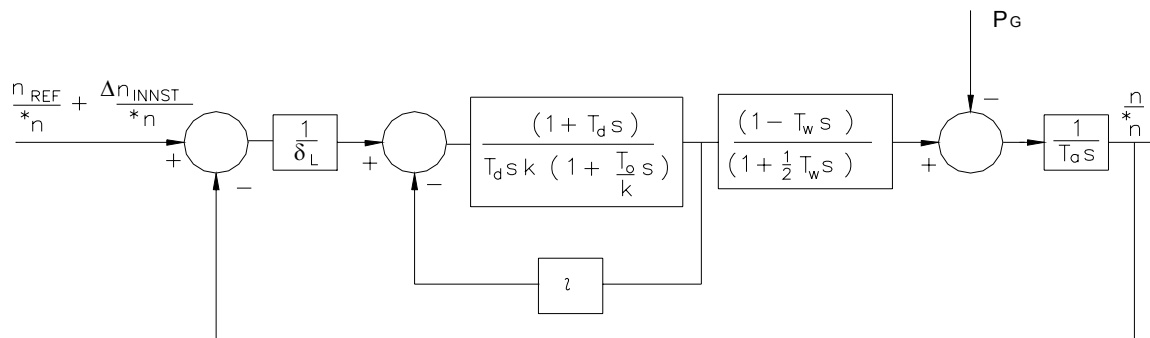


# Kapittel 4

## Stabilitetsberegninger

### 4.1 Blokkdiagram

Vi skal i dette kapitlet vise analyser og reguleringsprøver fra en turbin med en mekanisk-hydraulisk regulator som ble installert i kraftverket Bøylefoss som eies av Arendal Fossekompani. Regulatoren er som sagt en mekanisk-hydraulisk PI-regulator. Blokkdiagrammet for systemet er vist i figur (4.1). I figuren er den greske bokstaven  $\iota$  benyttet. Statikken blir da  $bp = \iota \delta_L$ . Da



Figur 4.1: Oppbygning av en mekanisk- hydraulisk PI-regulator.

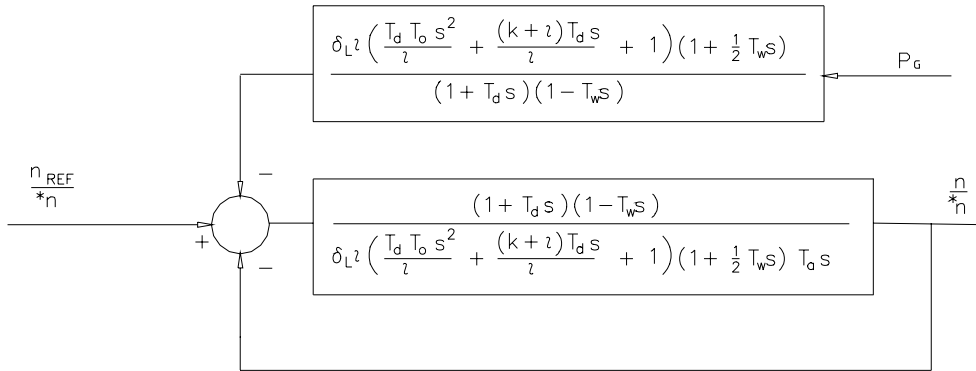
rørledningen er kort er rørfunksjonen beskrevet som uelastisk rør (se kapittel 3).

Oppbyggingen av denne regulatoren er beskrevet tidligere, som et eksempel på en meget god klassisk mekanisk hydraulisk regulator, som kan anvendes for regulering av små turbiner i utviklingsland. Slike regulatorer kan vedlikeholdes og repareres av alle landsbyverksteder som kan overhale mekaniske deler på biler og en vil ikke være avhengig av import av en elektrisk eller digital "black mystery box" som ikke bidrar til den tekniske utviklingen i landet. Blokkdiagrammet i figur (4.1) kan omformes slik at vi kan beregne variasjoner i omløpstallet som en funksjon av en variasjon i generatorbelastningen  $P_G$ . Dette er vist i figur (4.2) hvor en forenkling av blokkdiagrammet er vist for studie av responsen  $((\frac{n}{n^*}) / P_G)$  og  $((\frac{n}{n^*}) / (\frac{n_{REF}}{n^*})) = \frac{n}{n_{REF}}$ .

## 4.2 Stabilitetskriterier

### 4.2.1 Teori

Blokkdiagrammet i figur (4.1) kan forenkles. Vi får da blokkdiagrammet i figur (4.2).



Figur 4.2: Forenkling av blokkdiagram.

Vi setter

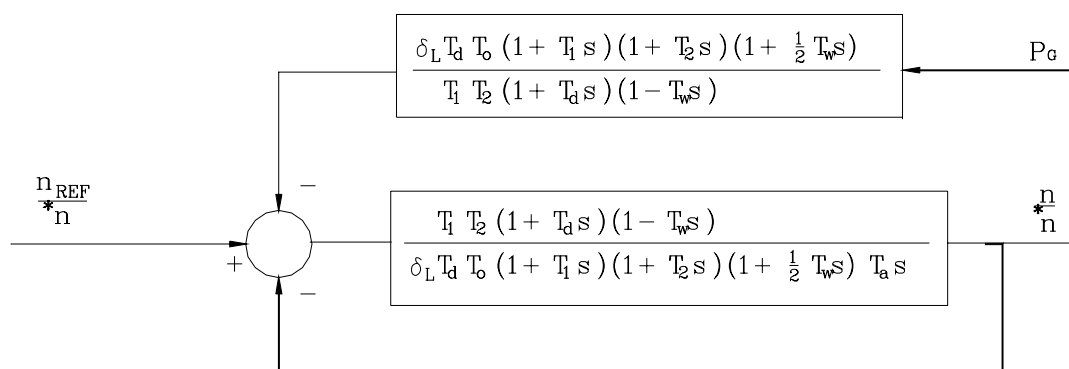
$$T_1 = \frac{1}{\frac{K+l}{2T_0} + \sqrt{\left(\frac{K+l}{2T_0}\right)^2 - \frac{l}{T_0 T_d}}} \quad (4.1)$$

og

$$T_2 = \frac{1}{\frac{K+l}{2T_0} - \sqrt{\left(\frac{K+l}{2T_0}\right)^2 - \frac{l}{T_0 T_d}}} = \frac{T_0 T_d}{l} \left[ \frac{K+l}{2T_0} + \sqrt{\left(\frac{K+l}{2T_0}\right)^2 - \frac{l}{T_0 T_d}} \right] \quad (4.2)$$

Merk at for  $l = 0$  får vi  $T_1 = \frac{T_0}{K}$  og  $T_2 \Rightarrow \infty$  d.v.s.  $\frac{1+T_2 s}{T_2} \Rightarrow s$  og  $A(s) \Rightarrow \frac{1}{\delta_L k T_a s} \frac{(1+T_d s)(1-T_w s)}{T_d s(1+T_w s)}$

Da får vi blokkdiagrammet i figur (4.3).



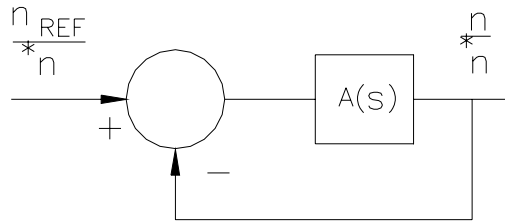
Figur 4.3: Videre forenkling.

Vi setter uttrykket

$$\frac{T_1 T_2 (1 + T_d s) (1 - T_W s)}{\delta_L T_d T_0 (1 + T_1 s) (1 + T_2 s) (1 + \frac{1}{2} T_W s)} \frac{1}{T_a s} = A(s) \quad (4.3)$$

hvor  $A(s)$  er det åpne systems transferfunksjon.

For stabilitetsanalyse regner vi i første fase med at forstyrrelsene kommer inn ved forandringer i  $n_{ref}$  for å undersøke om vi får et dempet innsvingsforløp av omløpstallet. Vi får da blokkdiagrammet i figur (4.4).



Figur 4.4:

Her har vi at:

$$\frac{n}{*n} = \frac{n_{ref}}{*n} \frac{A(s)}{1 + A(s)} \quad (4.4)$$

eller:

$$\frac{n}{n_{ref}}(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)} \quad (4.5)$$

Når stabilitetsanalysen viser at vi har stabilitetsmarginer vil en normalt se på reguleringsavviket i omløpstallet ( $n/*n$ ) ved en forstyrrelse fra generatorbelastningen  $P_G$ . Dette er vist i figur (4.16) i dette kompendiet. Vi skal også senere se på forstillingstiden av turbinytelsen når aggregatet er tilkopleet et stivt nett med konstant frekvens. Dette er vist i avsnitt 4.3.4.

Nå er  $A(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  der  $P(s)$  og  $Q(s)$  er polynomer i  $s$ . Det vil si at:

$$\frac{n}{n_{ref}}(s) = \frac{P(s)}{Q(s) + P(s)} \quad (4.6)$$

Bestemmende for stabiliteten for  $\frac{n}{n_{ref}}$  er hvor i det komplekse plan nullpunktet for uttrykket  $[1 + A(s)]$  er å finne.

Her skal vi ikke gå nærmere inn på beviser og utlendinger av teorien og henviser til kompendiet i Automatiseringsteknikk ved NTH av Finn Haugen eller Automatiseringsteknikk NKI Forlaget 1985, av Arne Tyssø. Vi vil imidlertid berøre de mest sentrale punkter i Nyquists stabilitetsteori.

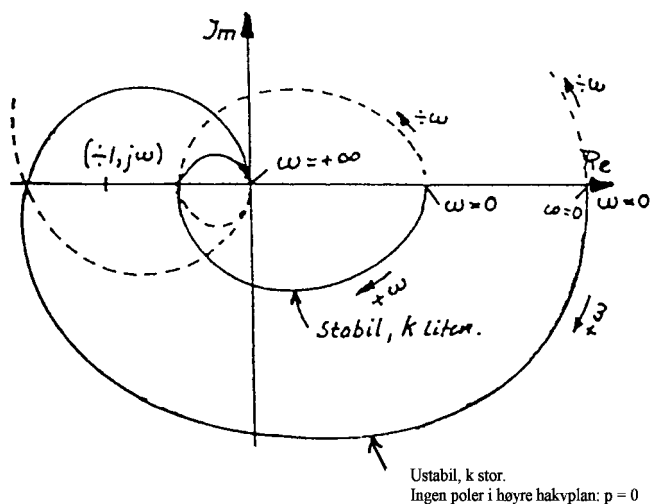
### 4.2.2 Nyquists stabilitetsteori

For alle fysisk realiserbare systemer har vi at det åpne systems transferfunksjon  $A(s)$  må gå mot en konstant eller mot 0 når  $s \rightarrow \pm\infty$ . Når det åpne system kan beskrives av lineære differensialligninger kan vi slå fast følgende for det lukkede system etter Nyquists stabilitetskriterium:

*For at et lukket system skal være stabilt må vektoren  $[1 + A(s)]$  dreie seg en vinkel  $2\pi P$  (i positiv retning) der  $P$  er antall poler i høyre halvplan av det åpne systems transferfunksjon  $A(s)$  når  $s = j\omega$  og  $\omega$  antar alle verdier fra  $-\infty$  til  $+\infty$  rundt høyre halvplan.*

Med dette har vi et kriterium for at systemet er stabilt, men det som interesserer mer, er å få et mål på *graden* av stabilitet. Dette kan gjøres ved å betrakte stedkurven for  $A(s)$  i det komplekse plan og dermed også finne vektoren  $[1 + A(s)]$  som avstanden fra  $(-1, j0)$  til stedkurven for  $A(s)$  for enhver verdi av  $\omega$  når  $s = j\omega$  og  $\omega$  gjennomløper alle verdier fra  $-\infty$  til  $+\infty$ .

Vi vil her se at etter Nyquist er systemet stabilt når vi følger stedkurven med voksende  $\omega$  og alltid har punktet  $(-1, j\omega)$  til venstre for kurven, når  $P = 0$  ( $P =$  antall poler i høyre halvplan), (se figur 4.5). Går stedkurven for  $A(s)$  gjennom punktet  $(-1, j0)$  er systemet akkurat på grensen til ustabilitet om nevneren  $[1 + A(s)] = 0$  for  $A(s) = (-1, 0)$ .



Figur 4.5: Nyquistdiagram for funksjonen  $A(s)$ .

d.v.s. at

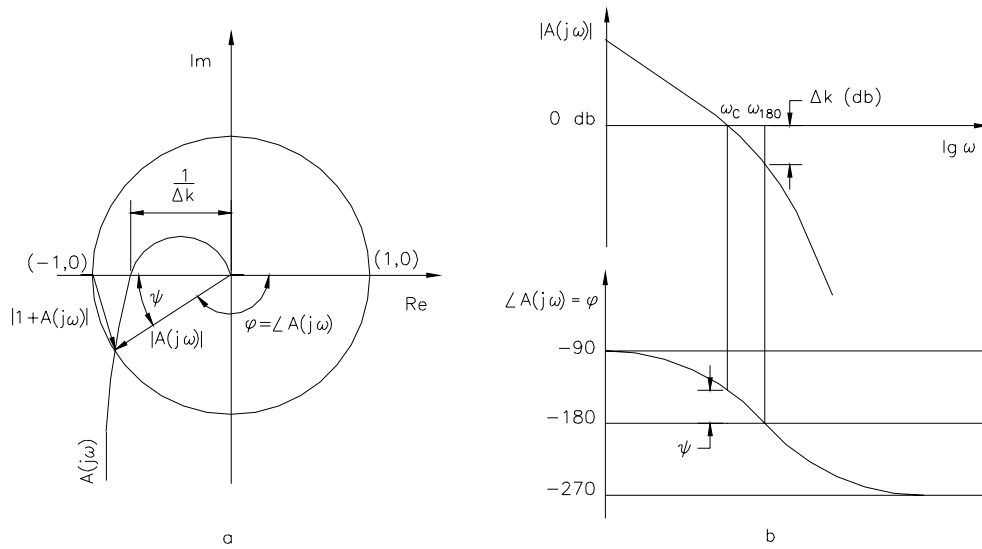
$$\frac{A(s)}{1 + A(s)} = \infty \quad (4.7)$$

se figur (4.6).

### Fasemargin og forsterkningsmargin

I figur (4.5) er vist stedkurven for transferfunksjonen  $A(s)$ :

$$A(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}$$



Figur 4.6: Nyquistdiagram og Amplitude-Fase-Frekvens diagram for åpen sløyfe for en turbinregulator med uelastisk vann og rør.

Vi ser at systemet blir ustabil når konstanten  $K$  blir for stor.

Det lar seg lett bevise at jo lenger bort fra punktet  $(-1, j0)$  stedkurven går (på den rette siden), jo mer stabilt vil systemet være. Ut fra dette er fasemargin og forsterkningsmargin definert.

- Fasemargin  $\psi = 180^\circ - \varphi$  der  $\varphi =$  fasevinkelen til vektoren  $-A(j\omega)$  når modulen  $|A(j\omega)| = 1$  som gir 0 dB.
- Forsterkningsmargin  $\Delta K$  er den inverse verdi av modulen  $\frac{1}{\Delta K} |A(j\omega_{180})| \Rightarrow \Delta K \text{ dB} = -|A(j\omega_{180})|$  dB når fasevinkelen  $\varphi = \angle A(j\omega) = -180^\circ$ .

Dette er vist i figur (4.6a). En kan si at dersom systemets transferfunksjon  $A(s)$  ble multiplisert med  $\Delta K$  ville systemet akkurat bli ustabil.

Dersom en tegner opp  $|A(j\omega)|$  med dB skala og fasevinkelen  $\angle A(j\omega)$  i lineær skala med  $\omega$  langs abscissen, vil vi få et diagram som er meget anvendelig for bestemmelse av fase- og forsterkningsmarginen og dermed *stabilitetsgraden*. Et slikt diagram kalles et amplitude-fase-frekvens diagram (AFF, engelsk: APF, p for phase), og er vist i figur (4.6b). Tilstrekkelig stabilitet har vi normalt i et reguleringsystem når fasemarginen  $\psi = 45^\circ$  og forsterkningsmarginen  $\Delta K \geq 6$  dB. (dB =  $20 \log x$ ).

For turbinregulering viser imidlertid erfaring at en fasemargin på  $30^\circ$  og en forsterkningsmargin på 3 dB ved full ytelse på turbinen er tilstrekkelig når vi regner med at aggregatet er tilkopleet et separat ohmsk nett. Dette fordi en spenningsregulator med frekvens-statikk innenfor et begrenset frekvensavvik "hjelper" den tregere turbinregulatoren slik at stabiliteten forbedres.

### Beregningseksempel

I diagrammene i figur (4.7) - (4.11) er det vist hvordan et komplett AFF diagram er bygget opp ved å superponere (legge sammen) innflytelsen fra de forskjellige elementer i systemet. Vi skal nå vise fremgangsmåten for å analysere stabiliteten av et turbin + rør + generator + regulator system ved hjelp av AFF-diagram. Først studerer vi diagrammene i figur (4.7) - (4.11) og anvender deretter fremgangsmåten på eksempelet for turbinen i Bøylefoss kraftverk hvor vi har følgende verdier for aggregatet og røret:

Vi beregner i første omgang stabiliteten ved halv ytelse, d.v.s.  $T_w = 1/2 T_{w\text{fullast}}$ . Vi har følgende opplysninger:

$$\begin{aligned} T_{w\text{fullast}} &= 2.05 \quad [\text{sek}] \\ T_w &= 1.025 \quad [\text{sek}] \\ \text{og} \\ T_a &= 9.5 \quad [\text{sek}] \\ h_w &= 2.8 \end{aligned}$$

Erfaringsmessig bør vi ha  $T_d > 7T_w$ ,  $T_0$  minst mulig, og  $K$  og  $\delta_L$  så store at vi får  $\psi \geq 45^\circ$  ved 50 % belastning, der  $T_w = 1/2 T_{w\text{fullast}}$ . Følgende størrelser er valgt:

$$\begin{aligned} T_d &= 16 \quad [\text{sek}] \\ K &= 1.5 \quad [\text{sek}] \\ \delta_L &= 0.25 \end{aligned}$$

Videre har vi fra målinger på regulatoren fått en litt stor verdi for  $T_0$ . Dette skyldes at hovedsleiden er litt liten i forhold til servomotorens volum. ( $T_0$  bør være mindre enn 0.3 [sek])

$$T_0 = 0.44 \quad [\text{sek}]$$

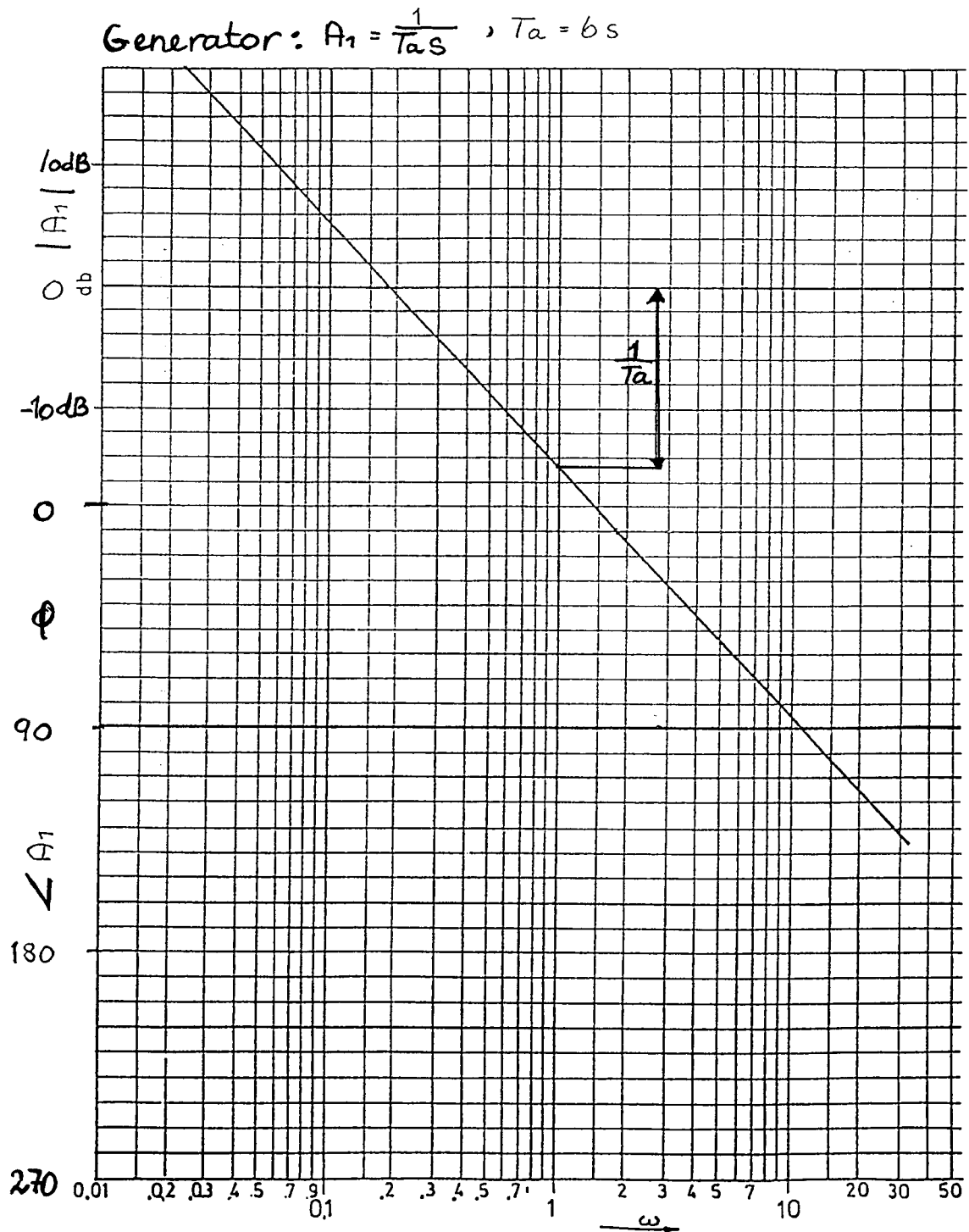
Vi får dermed det amplitude-fase-frekvens (AFF) diagrammet som er vist i figur (4.13).

Dersom det blir nødvendig med bedre stabilitet ved høyere belastninger kan  $K$  og  $\delta_L$  økes ved prøvene under igangsettingen. Om nødvendig kan også  $T_d$  økes ved å skifte kompensansjonsleid eller senke oljetrykket på regulatoren, men dette er noe tvilsomt da også  $T_0$  vil øke og reguleringskraften blir mindre. Se også vedlegg D. Figur (4.15) viser AFF-diagrammet for den lukkede sløyfen:

$$\frac{n}{n_{ref}} = \frac{A(s)}{1 + A(s)} \quad (4.8)$$

Den lukkede sløyfen finnes ved å overføre kurven til et Nicholsdiagram. I figur (4.16) er  $(\frac{n}{*n})/P_G(s)$  tegnet inn.

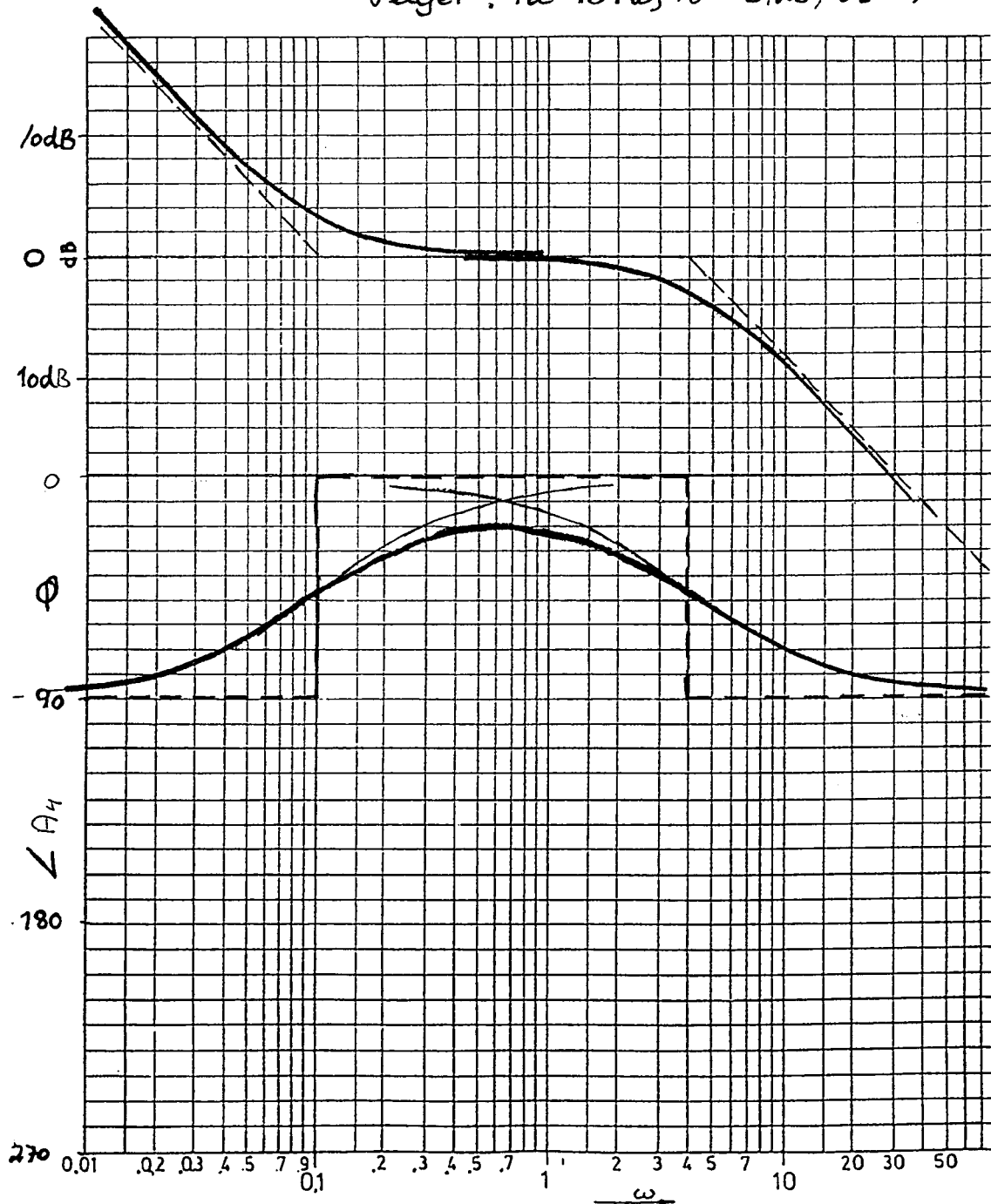
Av de to siste diagrammene kan regulatorens følsomhet finnes.



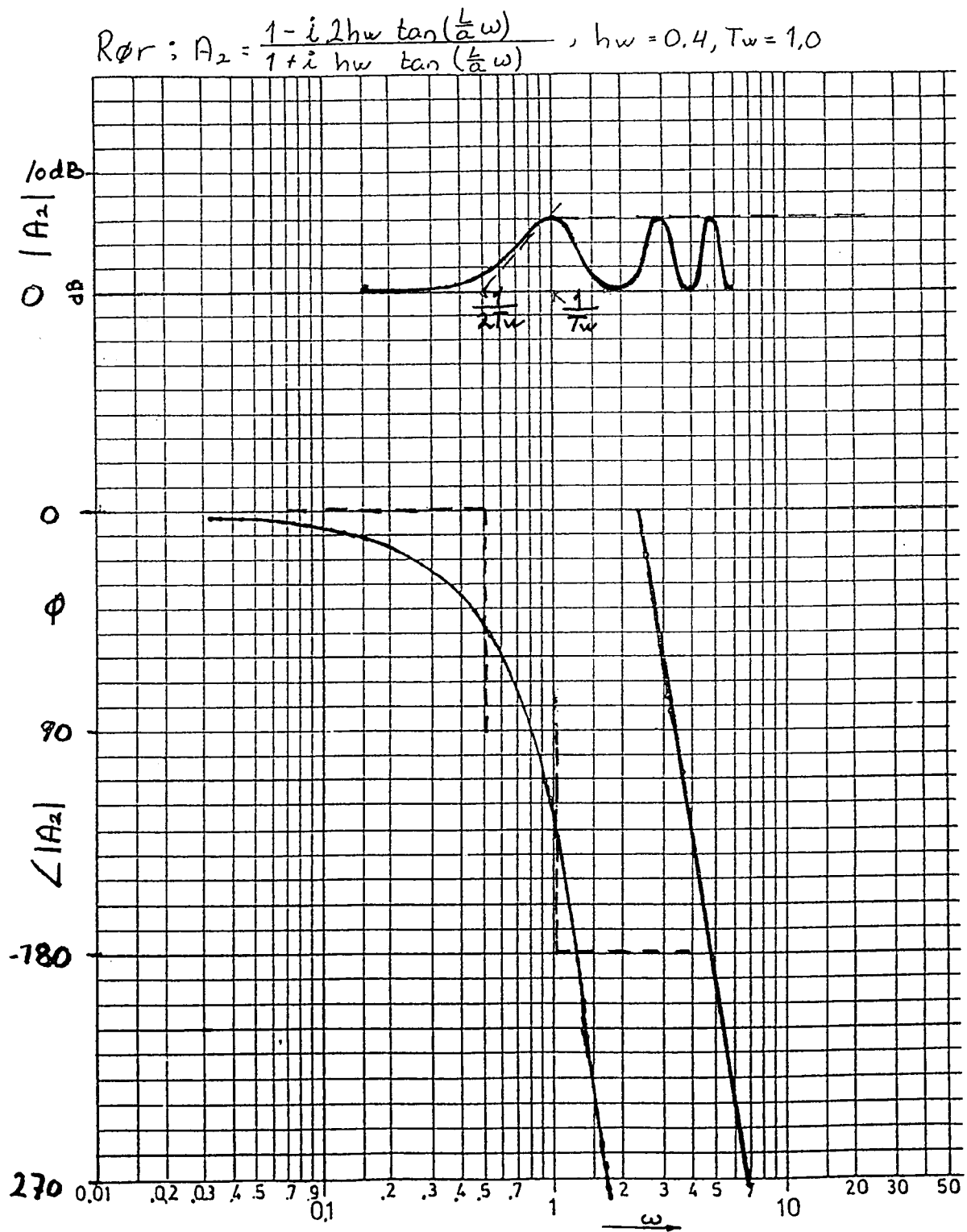
Figur 4.7: Generator.

$$\text{PI-regulator: } A_4 = \frac{1}{bt} \frac{1+T_d s}{T_d s} \frac{1}{1+T_0 s}$$

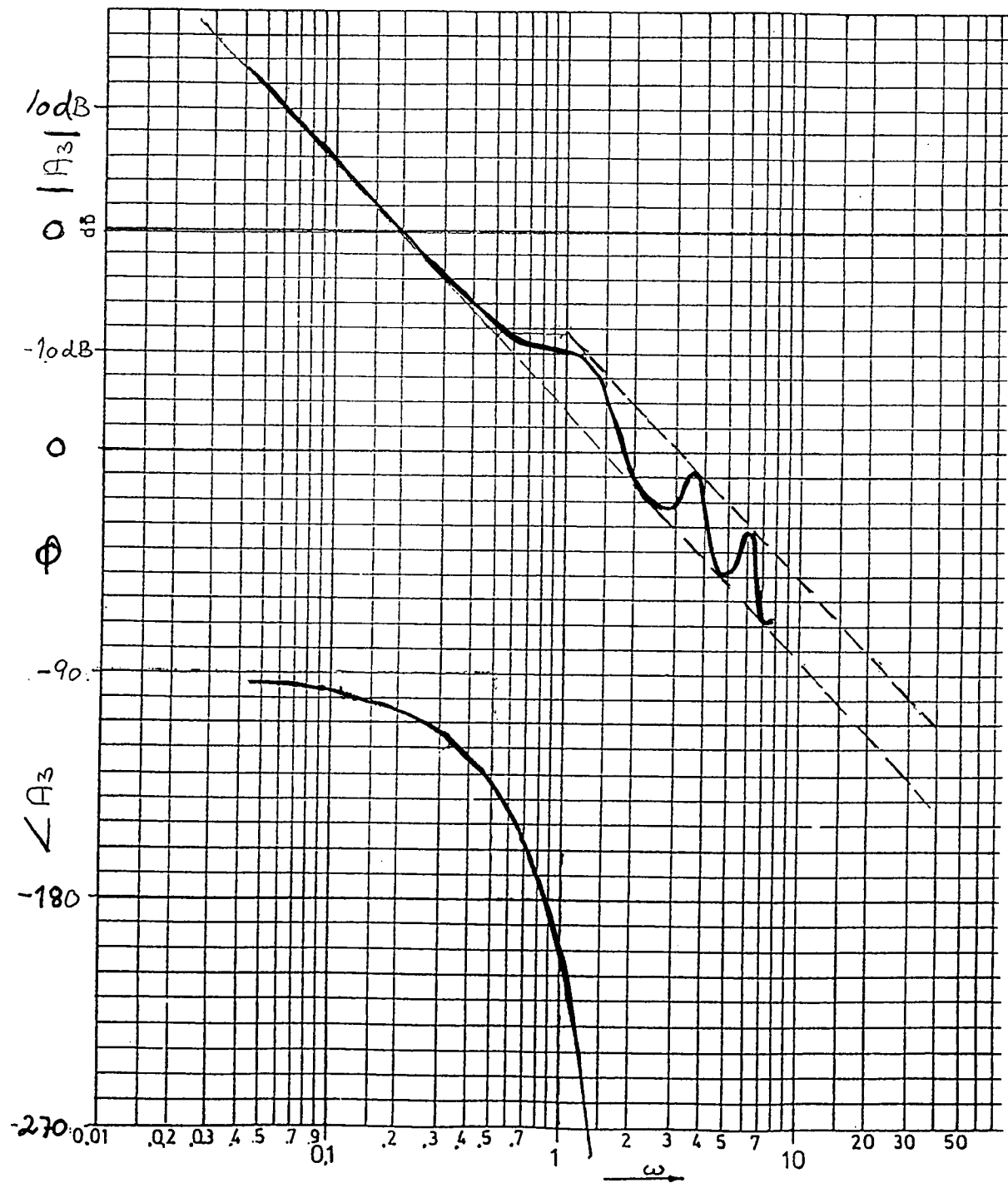
$$\text{Velger: } T_d = 10T_w, T_0 = 0,25, bt = 1,0$$



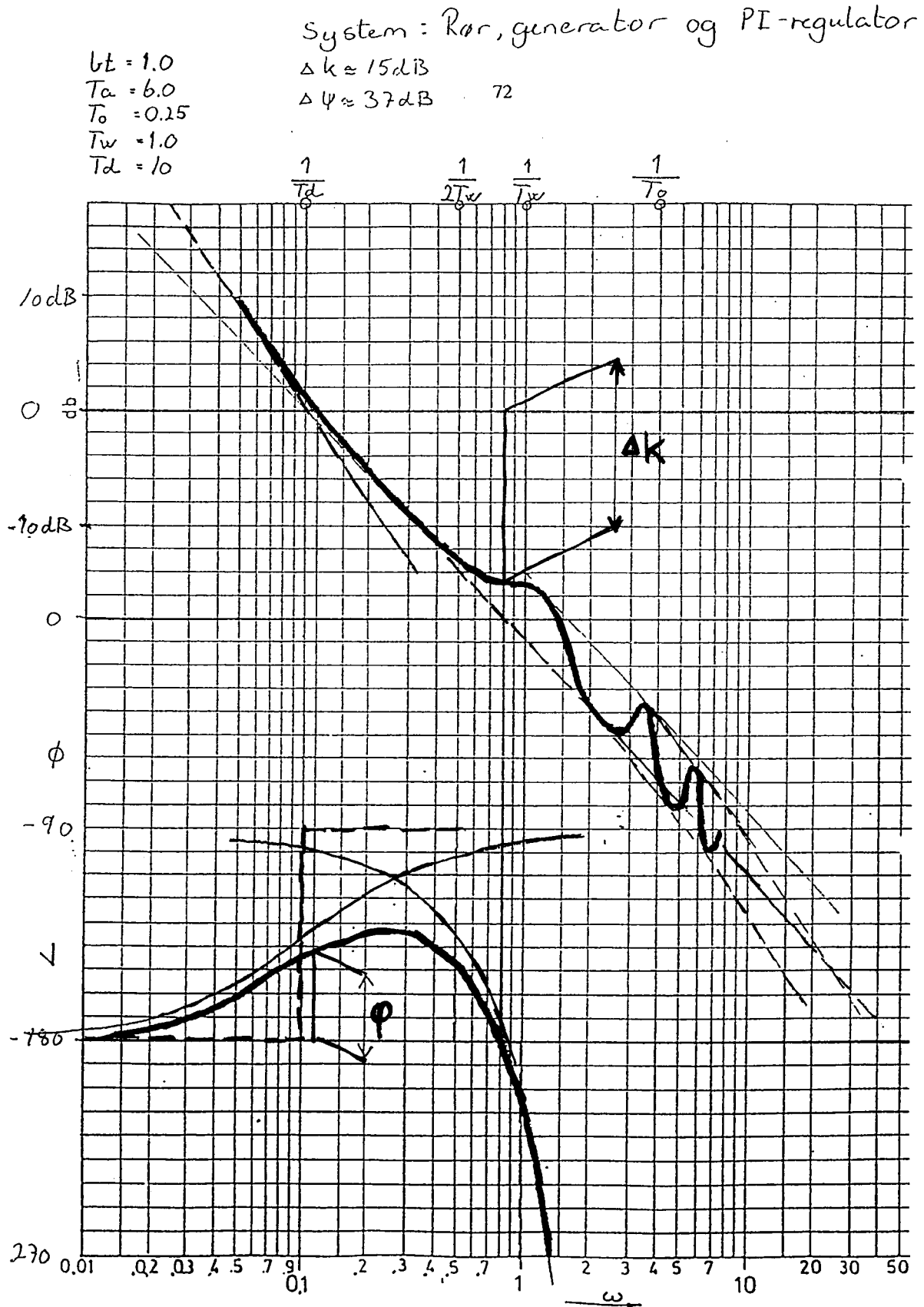
Figur 4.8: PI-regulator.



Figur 4.9: Rør



Figur 4.10: Rør og generator.

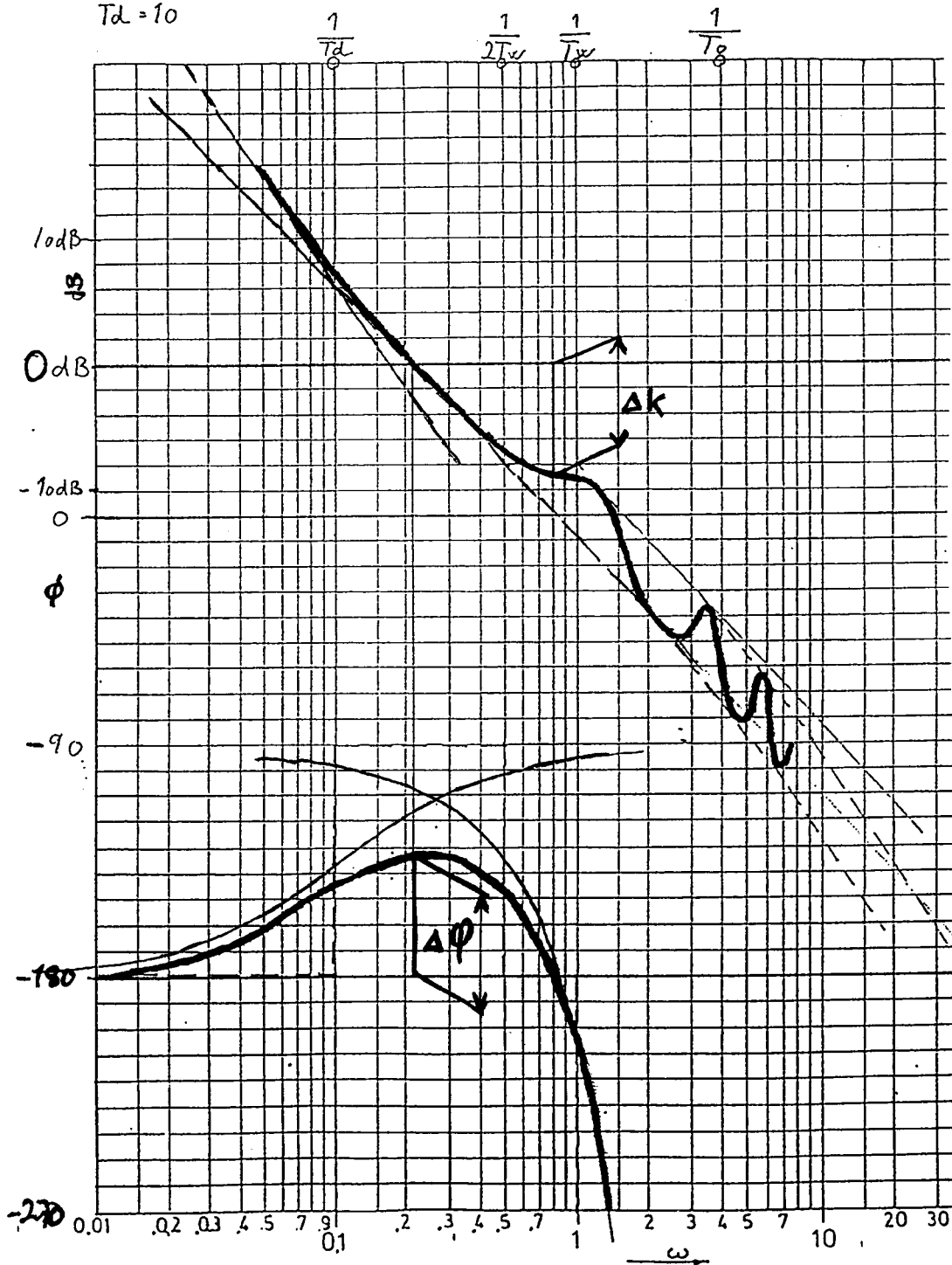


Figur 4.11: Rør, generator og PI-regulator.

System: Rør, generator og PI-regulator:

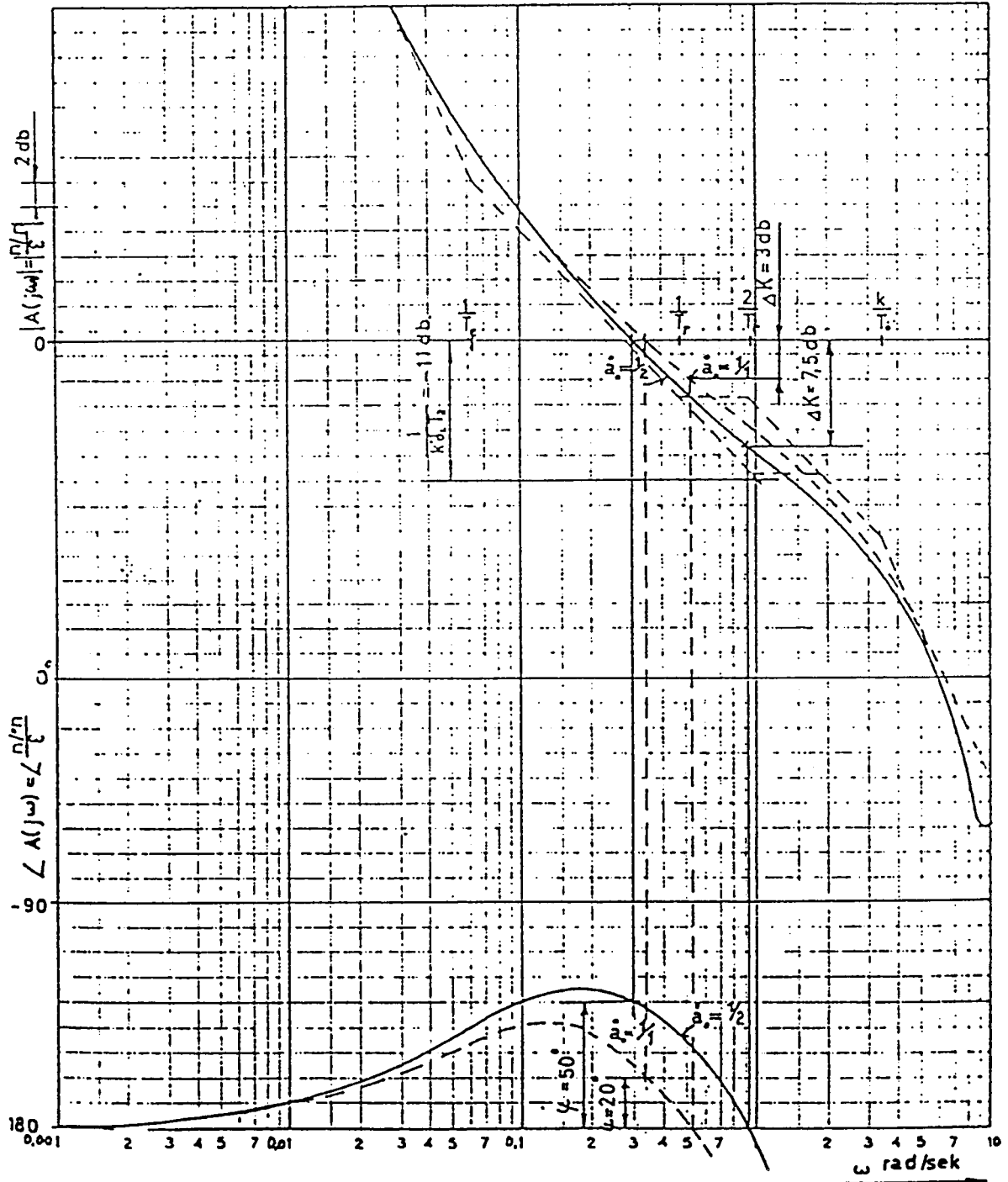
$bt = 0.5$   
 $T_a = 6.0$   
 $T_o = 0.25$   
 $T_w = 1.0$   
 $T_d = 10$

For å få en følsom regulator bør  $bt \leq 0.7$   
 Her er  $bt$  valgt til 0.5 som gir  $\Delta k \approx 8.5 \text{ dB}$   
 og  $\Delta \psi \approx 50^\circ$ . Ved å velge  $bt = 0.5$  flyttes 0-dB  
 linjen 6 dB ned, noe som senker  $\Delta k$  men øker  $\Delta \psi$ .

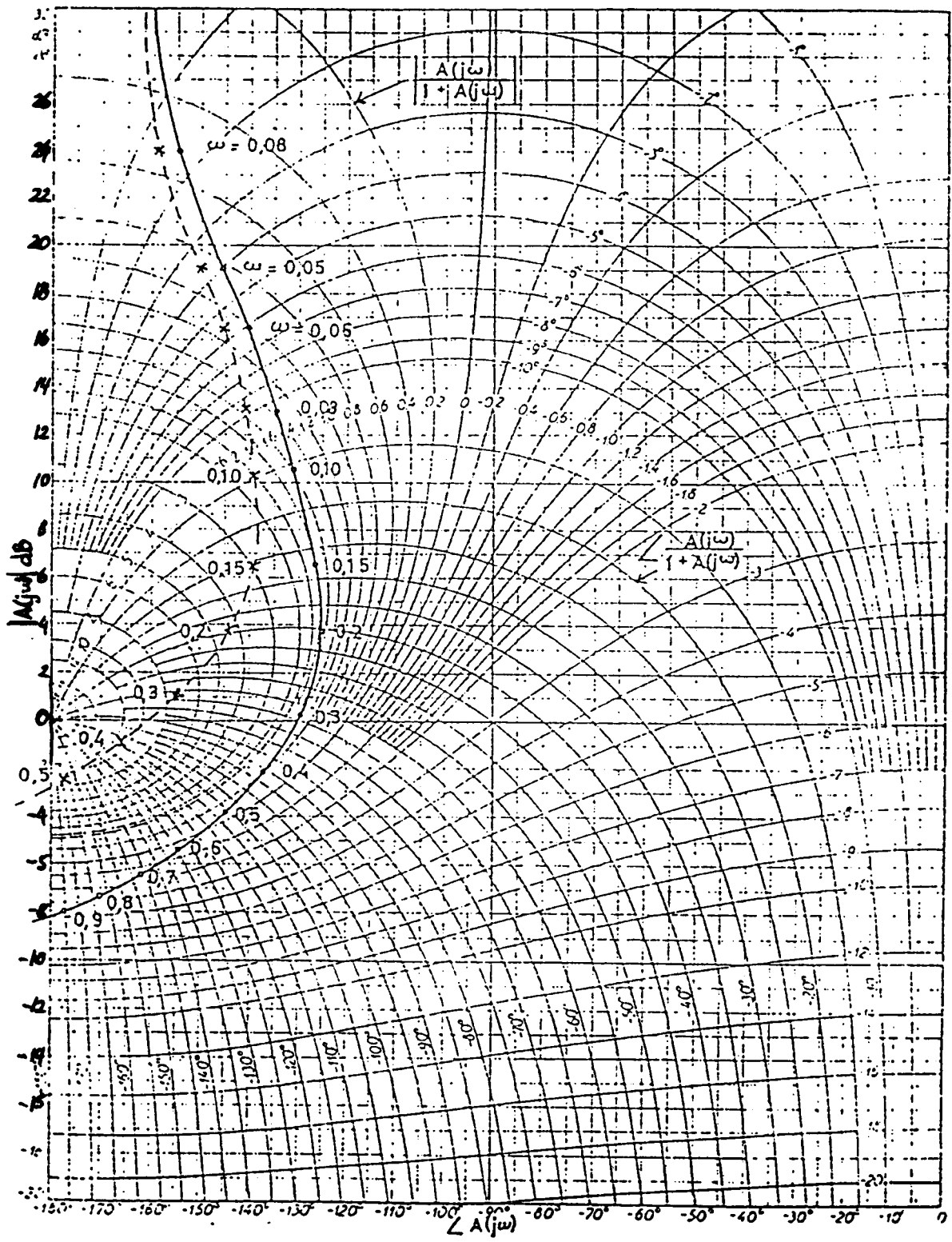


Figur 4.12: Rør, generator og PI-regulator.

$T_1 = 2,05 \text{ sek. } \rho = 2,8$   
 $T_2 = 9,5 \text{ sek}$   
 $T_3 = 0,44 \text{ sek}$   
 $T_4 = 16 \text{ sek}$   
 $k = 1,5$   
 $\xi_1 = 0,25$



Figur 4.13: Diagrammet er satt opp for  $\xi = 1/2$  og  $\xi = 1/1$ . Åpen sløyfe =  $A(s)$ ,  $l = 0$ , dvs. 0% statikk.



Figur 4.14: Nichols-diagram.

$$T_r = 2,05 \text{ sek}, p = 2,8$$

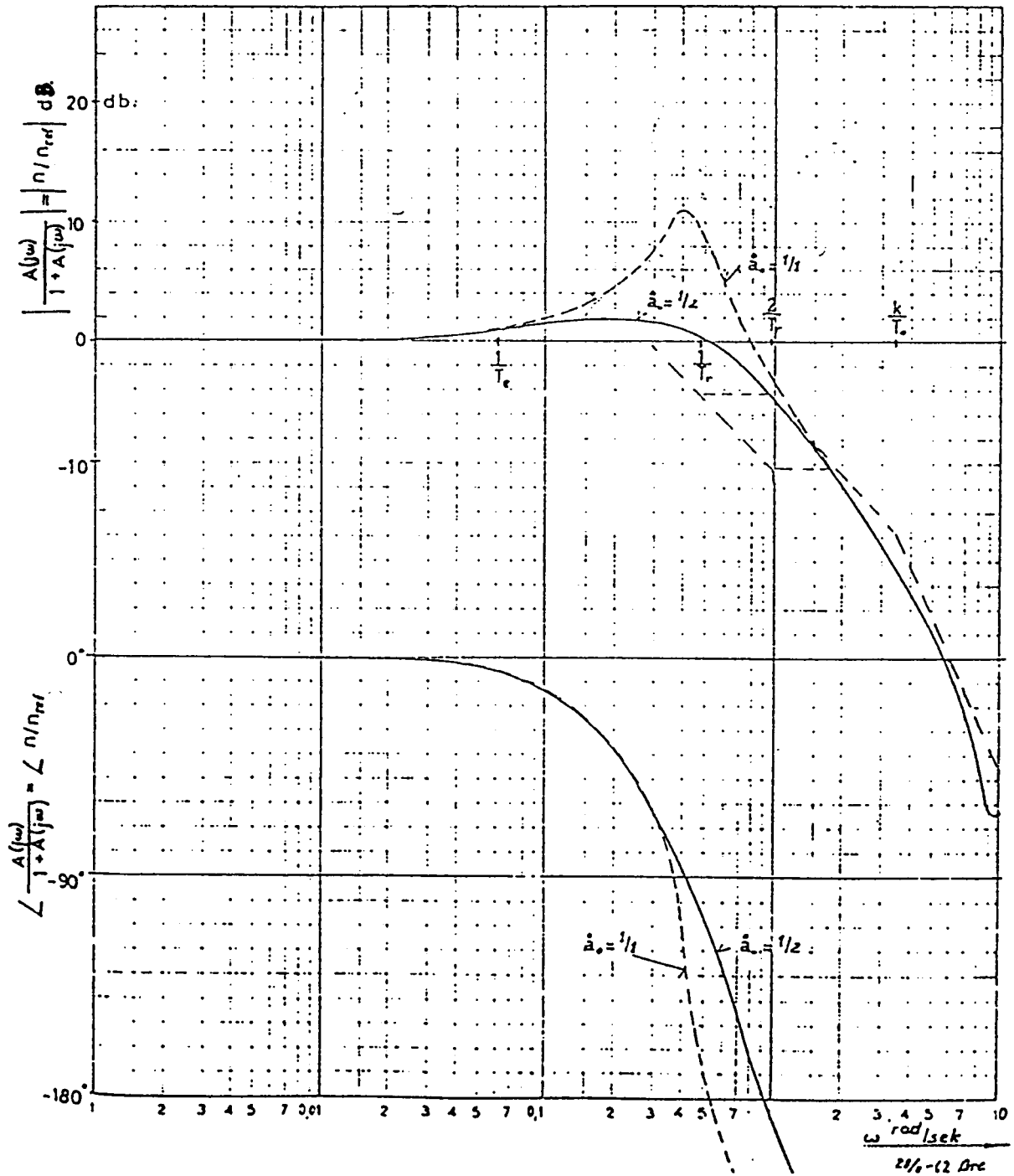
$$T_a = 9,5 \text{ sek}$$

$$T_b = 0,44 \text{ sek}$$

$$T_c = 16 \text{ sek}$$

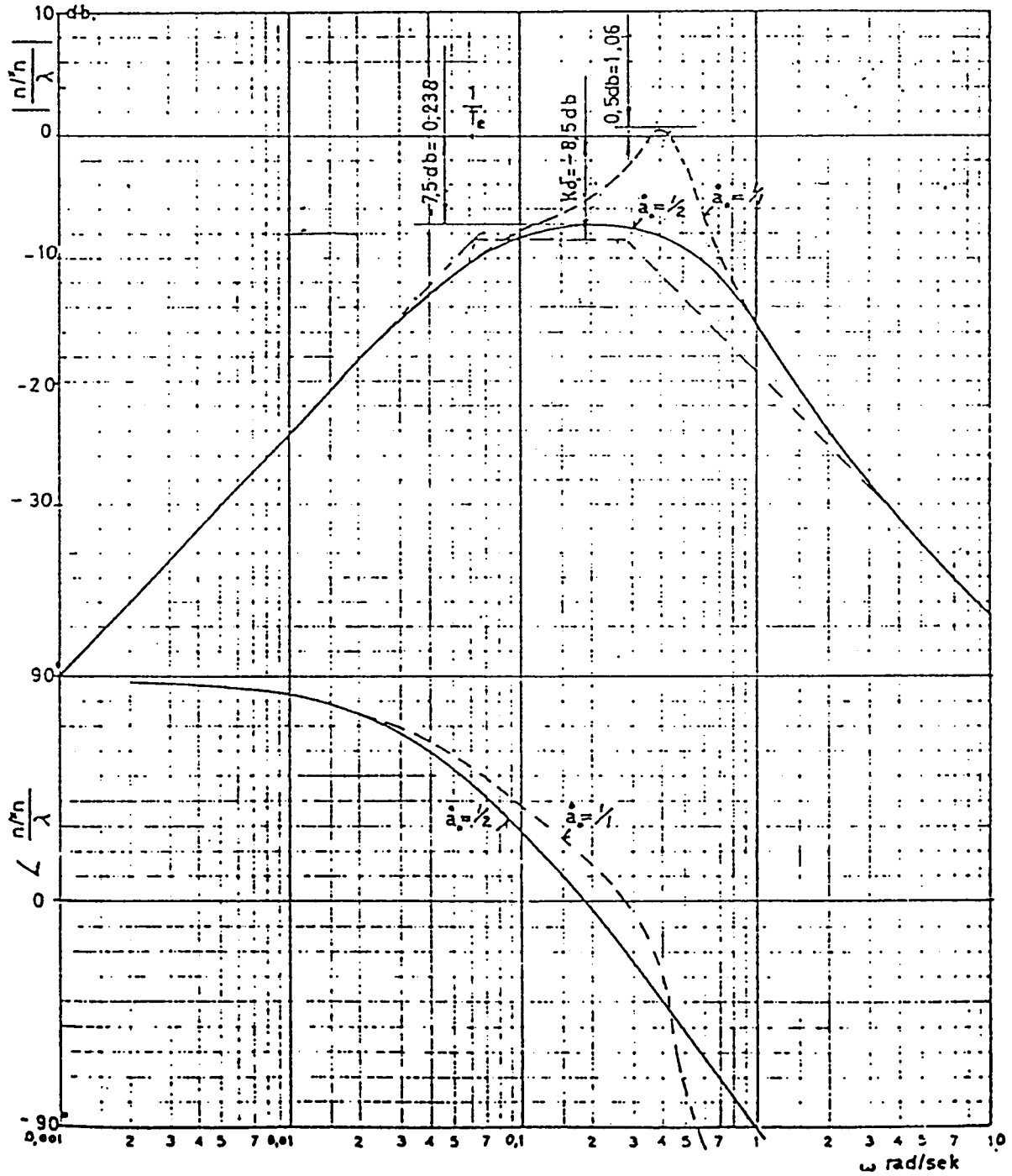
$$K = 1,5$$

$$\delta_z = 0,25$$



Figur 4.15: Diagrammet er satt opp for  $\zeta = 1/2$  og  $\zeta = 1/1$ . Åpen sløyfe, dvs. 0 % statikk.

$T_r = 2,05 \text{ sek. } \rho = 2,8$   
 $T_2 = 9,5 \text{ sek}$   
 $T_b = 0,44 \text{ sek}$   
 $T_e = 16 \text{ sek}$   
 $k = 1,5$   
 $\delta_2 = 0,25$



Figur 4.16: AFF-diagrammet er satt opp for  $\dot{a} = 1/2$  og  $\dot{a} = 1/1$  og viser  $l = 0$ , dvs. 0 % statikk

**Konklusjon etter stabilitetsanalysen for Bøylefoss kraftverk.**

En kan etter betraktninger av AFF- diagrammer for de gitte parametrene  $T_w = 2.05$  [sek], og  $T_a = 9.5$  [sek] for Bøylefoss som eksempel sette opp følgende holdepunkter for overslagsmessig dimensjonering av regulatorer som skal regulere alene på en isolert belastning med et ohmsk nett hvor frekvensen ikke påvirker belastningen. (Merk: Dersom belastningen var motorbelastningen ville lasten gå ned om frekvensen sank og dette ville hjelpe turbinregulatoren).

$$\frac{1}{K\delta_L T_a} \leq \frac{0.65}{T_w} \quad (4.9)$$

Vi begrenser tilbakeføringen for å unngå å få en ufølsom regulator ved å velge:

$$1 \leq K < 1.5$$

pendelets nødvendige følsomhet begrenser pendelfjærens stivhet som gir:

$$\delta_L \leq 0.3$$

for ikke å få for dårlig følsomhet i regulatoren. I spesielle tilfeller kan disse grensene overstiges.

Hvis vi velger  $K = 1.5$  og  $\delta_L = 0.3$  kan vi oppnå stabilitet for:

$$\frac{T_a}{T_w} \geq 3.5 \quad (4.10)$$

men da har vi en lite følsom regulator. Skal turbinen regulere frekvensen bør vi ha:

$$\frac{T_a}{T_w} \geq 4 \quad (4.11)$$

Videre bør vi ha:

$$T_d > 7T_w \text{ og } \frac{T_0}{K} \leq 0.3 \text{ [sek]} \quad (4.12)$$

En må som beskrevet ovenfor være oppmerksom på at en ikke uten videre kan øke fase- og forsterkningsmarginen og dermed stabiliteten ved å øke  $K$  og  $\delta_L$ , fordi dette går utover følsomheten til regulatoren. Økning av generatorens svingmasse eller  $Ta$  vil alltid ha en gunstig virkning, men dette vil gi en dyrere generator og øvre grense ligger normalt på  $Ta = 7.5 - 8.0$  [sek]. Spesielt tilfeller som for Bøylefoss er et unntak da stabilitet var krevet for dette anlegget.

Når en tegner opp AFF-diagram for den lukkede sløyfen og finner

$$\left| \frac{\frac{n}{*n}}{P_G} \right| \quad (4.13)$$

får en frem et mål for følsomheten av regulatorsystemet. (Se figur (4.16)) Jo mindre denne størrelsen er, desto bedre er regulatoren. Vi har nå bygd opp en regulator som skal gi en stabil regulering. Tidskonstantene er delvis beregnede, delvis bestemt empirisk ved forsøk. En regulator kan imidlertid inneholde ulineariteter på grunn av slark, friksjoner eller ulineære armbevegelser som kan beregnes og lett påvises ved prøver.

### 4.2.3 Eksperimentell undersøkelse av regulatorens stabilitetsforhold

Den enkleste og sikreste metoden for å undersøke om en regulator oppfyller de krav som det stilles til den etter de teoretiske beregninger, er å foreta en frekvens-respons undersøkelse.

Teorien skal ikke gjennomgås her, vi skal bare fastslå at dersom vi kjører en sinus svingning med frekvens  $\omega$  inn på et system med transferfunksjon  $H(s)$ , vil vi få ut et sinusformet svar med forsterkning  $|H(j\omega)|$  og faseforskyvning  $\psi = \angle H(j\omega)$  i forhold til inngangssignalet. Ved å kjøre inn signalet med flere forskjellige frekvenser kan vi tegne opp punkter for  $|H(j\omega)|$  og  $\angle H(j\omega)$  for hver frekvens  $\omega$ , i AFF-diagrammet og sammenlikne de målte verdier med de teoretiske kurvene. (I Dr.ing. kurset som bygger på Brekkes Dr. techn. avhandling er flere frekvens responsmålinger fra kraftverk vist og sammenlignet med teoretiske beregninger).

Er overensstemmelsen meget god mellom eksperimentelle målinger og teoretiske beregninger hvor slark og dødbånd er neglisjert, vet vi at regulatoren er uten slark, forstyrrende friksjoner, dødbånd i sleider eller uforutsette ulineariteter.

#### Eksempel på AFF prøver av regulatoren ved Bøylefoss kraftverk.

Vi skal se på et eksempel på en prøve av regulatoren til turbinen ved Bøylefoss kraftverk.

Det ble i dette tilfellet kjørt frekvens-respons undersøkelser for hele regulatoren i verkstedet fordi regulatoren var nyutviklet. Transferfunksjonen for hele PI-regulatoren med statikk innstilling  $b_p = \delta_L l$ .

$$H(s) = \frac{\mu}{\frac{\Delta n}{*n}}(s) = \frac{1 + T_d s}{\delta_L \cdot l \left( \frac{T_0 T_d}{l} s^2 + \frac{K + b_p}{l} T_d s + 1 \right)} \quad (4.14)$$

der

$$\begin{aligned} T_d &= 16 & [sek] \\ T_0 &= 0.44 & [sek] \\ K &= 1.5 \\ l &= 0.24 \\ \delta_L &= 0.25 \end{aligned}$$

Siden  $\delta_L = 0,25$  blir  $b_p = \delta_L \cdot l = 0.06$ , d.v.s. 6% statikk <sup>1</sup>.

Som utgangssignal ble hovedservomotorens bevegelser indikert under prøvene. Inngangssignalet ble indikert på pendelplaten for en mekanisk giver som erstattet pendelet og som ble ”matet” med en sinusbevegelse der frekvens og amplitude kunne velges. Vi fikk dessverre ikke lineære målinger for regulatoren for sammenligning med teorien med frekvenser høyere enn ca. 0.5 rad/sek fordi sleideutslaget nådde metning mot åpning ved denne frekvensen. Årsaken er at åpningstiden er meget lang for regulatoren i dette tilfellet slik at sleidutslaget gikk i metning.

$$\sigma = \frac{1}{20} \frac{d_s}{4} \quad (4.15)$$

Her er  $d_s$  sleidediameteren og  $(d_s/4)$  er det sleideutslaget som gir maksimal åpning =  $\frac{\pi}{4} d_s^2$  Måleresultatene fra prøvene er vist i figur (4.17) og i tabell (4.1). De teoretiske kurvene for regulatoren er

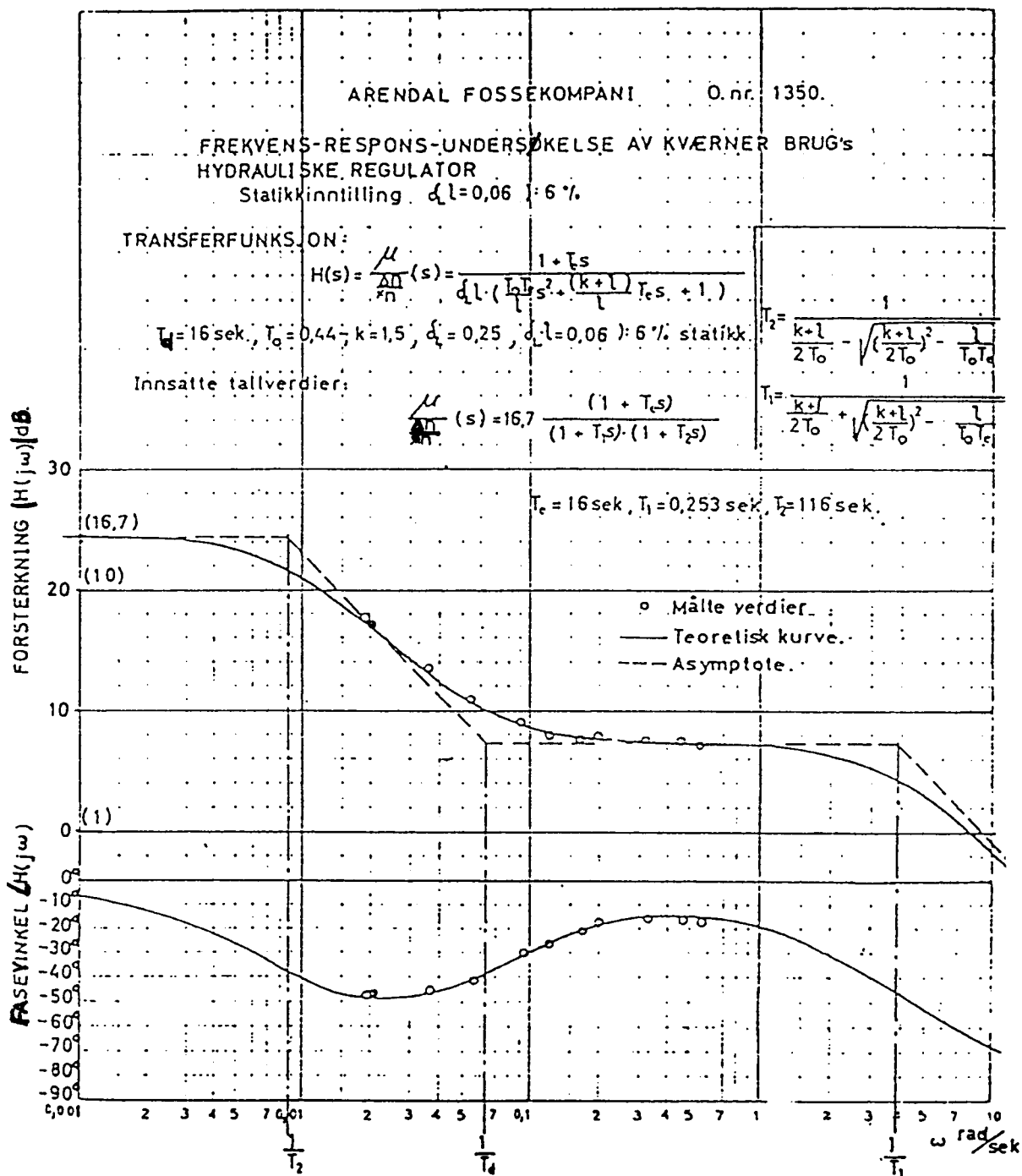
<sup>1</sup>Statikken benevnes  $b_p$  som vi får om signalet for den blivende ujevnhetsgrad (det varige avviket) føres tilbake til summasjonspunktet for omløpstallet. Signalets størrelse blir da  $b_p = \delta_L \cdot l$ , se figur 4.1.

også tegnet inn i diagrammet. Resultatene viser at regulatoren som helhet med statikkmechanisme er meget god uten merkbar slark, ulineariteter, hystereser eller dødbånd. Ut fra disse målingene kan en gå ut fra at beregningene for dimensjonering av regulatorer er sikre nok.

Frekvens, $\omega$ [rad/sek]	Fasevinkel, $\varphi^\circ$	Forsterkning	Forsterkning [dB]
0,0193	46,7	3,420	10,700
0,0918	28,8	1,220	1,700
0,1210	25,6	1,090	0,748
0,2000	17,6	1,080	0,640
0,0550	40,6	1,538	3,740
0,0364	45,5	2,020	6,108
0,1685	20,6	1,055	0,500
0,4610	17,6	1,040	0,340
0,3250	15,8	1,031	0,256
0,5620	17,6	1,000	0,000
0,0205	45,7	3,200	10,040

Tabell 4.1: Frekvens-respons undersøkelser av Kværner Brugs hydrauliske regulator. Statikk 6 prosent.

Vanskeligheten ved regulatoren for Bøylefoss kraftverk, var den store verdien av  $T_d$  som var nødvendig for å oppnå stabilitet. Dette skyldtes den store verdien til  $T_w$ . Det måtte stilles særlige krav til utformingen av integralsleiden, også kalt kompensasjonssleiden, i forstyringen i dette tilfellet. Målingene viste imidlertid at lineariteten for integralsleiden var svært god samtidig som den delvis beregnede og delvis eksperimentelt bestemte verdien av  $T_d$  stemte godt. Se figur (4.17).



Figur 4.17:

### 4.3 Nettets innflytelse på turbinregulatoren

#### 4.3.1 Innflytelse på stabiliteten

Vi har tidligere under oppsetting av transferfunksjonen for et helt reguleringsystem sett bort fra nettets innflytelse. Nettet vil imidlertid påvirke både belastning og akselerasjonstid for systemet.

Vi vil ikke her gå inn på de teoretiske utredninger og undersøkelser som er gjort på dette området, men henviser til en publikasjon utarbeidet av Siv.ing. Magnar Ervik ved EFI.

#### 4.3.2 Nettets akselerasjonstid

Vi skal imidlertid sette opp følgende funksjoner som gjelder når aggregatet er tilkopleet et isolert nett med størstedelen av belastningen som motorbelastning ved konstant dreiemoment. Generatorene henger da synkront sammenkopleet på nettet om vi regner forenklet med et første ordens system, og vi innfører en ny akselerasjonstid som vi kaller nettets akselerasjonstid =  $T_{an}$ . Vi har at:

$$T_{an} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i T_{ai} + \sum_{j=1}^m P_{mj} T_{amj}}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (4.16)$$

der

- $P_i$  = de enkelte aggregaters ytelse
- $T_{ai}$  = de enkelte aggregaters akselerasjonstid
- $P_{mj}$  = de enkelte motorers ytelse
- $T_{amj}$  = akselerasjonstider for motorer tilkopleet nettet, fasekompensator, omformer etc.

Dersom aggregatet går alene på nettet med belastning i form av motorer med konstant dreiemoment får man:

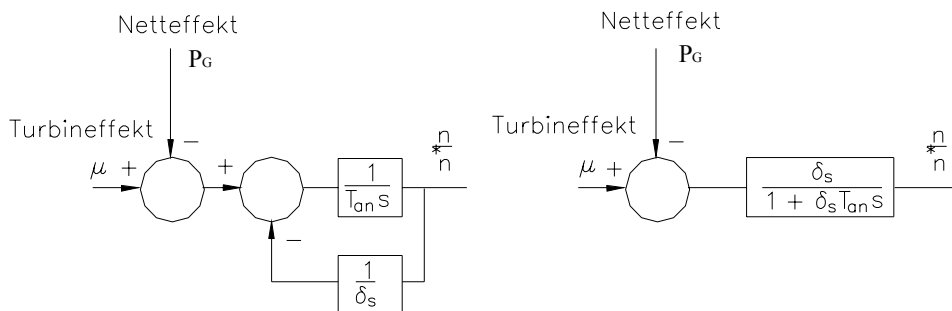
$$T_{an} = T_a + \frac{\sum_{j=1}^m T_{amj} P_{mj}}{P} \quad (4.17)$$

der  $T_a$  = aggregatets akselerasjonstid og  $P$  = aggregatets ytelse. Merk: i et ohmsk nett hvor en turbin går alene vil nettets akselerasjonstid bli lik akselerasjonstiden for turbinaggregatet.

#### 4.3.3 Nettets selvregulering - nettstatikken

Vi kan i korthet si at nettets selvregulerende evne består i at belastningen avtar når frekvensen (som er proporsjonal med omløpstallet på aggregatet som er tilkopleet nettet) synker. Dette kommer av at de fleste motorer som er tilkopleet nettet går med et dreiemoment som er uavhengig av omløpstallet. Når så frekvensen på nettet synker, så synker også omløpstallet på motorene, dreiemomentet er uforandret og ytelsen på motorene går ned, og dermed belastningen på aggregatene som produserer strømmen. I mange tilfeller vil dreiemomentet på motorene også avta når omløpstallet synker, som for eksempel ved pumpedrift. Dette vil virke enda mer stabiliserende på systemet.

Ohmsk motstand er derimot uavhengig av frekvensen, og er den vanskeligste belastningen en kan ha på eget nett. For å hjelpe turbinregulatoren kan spenningsregulatoren på generatoren



Figur 4.18: Blokkdiagram for regulator tilkopleet et nett.

utstyres med frekvensstatikk innenfor et frekvensområde på  $\pm 2$  Hz slik at synkende omløpstall gir avtagende belastningsmoment og økende omløpstall gir økende belastningsmoment. En slik spenningsregulator er fordelaktig og i de fleste tilfeller nødvendig ved regulering på eget nett fordi turbinregulatoren er treg i forhold til en hurtig elektronisk spenningsregulator.

Det kan ut fra disse betraktninger defineres en størrelse som kalles nettstatikken. Nettstatikken viser hvor mye belastningen avtar ved synkende frekvens d.v.s. omløpstall på turbinen. Nettstatikken kan uttrykkes ved følgende ligning:

$$\delta_s = \frac{\frac{\Delta f}{*f}}{\frac{\Delta P_B}{\sum_{i=1}^n P_i}} \quad (4.18)$$

NB! Nettstatikken kan som nevnt foran økes v.h.a. spenningsregulatoren. Her er:

- $\Delta P_B$  = En ytelse- eller belastningsendring som forårsaker en frekvensvariasjon  $\Delta f$  i nettet.  
 $\sum_{i=1}^n P_i$  = Summen av fullasteffekten av de aggregater som er tilkopleet nettet. (Aggregatene er her forutsatt å gå slagbegrenset d.v.s. med fullt pådrag. Dersom aggregatene går fri med statikk vil de bidra til å øke eller minske pådraget slik at reguleringsstyrken i nettet øker ut over det enkelte aggregat som regulerer med null statikk).  
 $\Delta f$  = Variasjon i frekvensen som fremkommer ved belastningsendringen  $\Delta P_B$ .  
 $*f$  = Nettets normale frekvens.

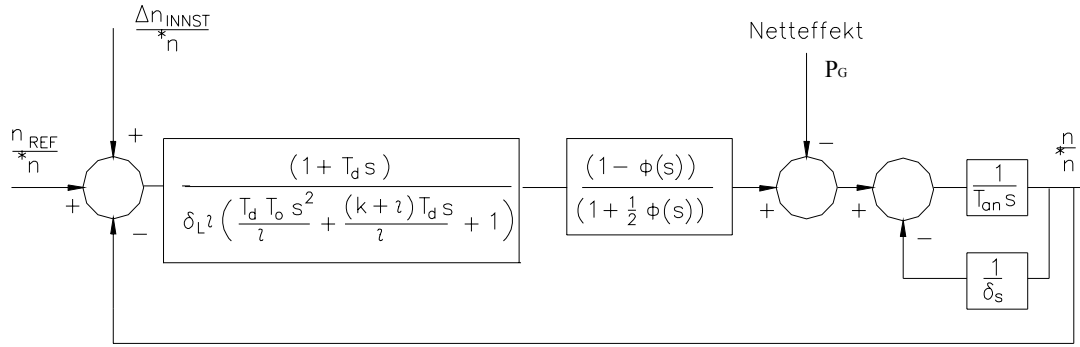
Siden omløpstallet  $n$ , på en generator tilkopleet nettet og nettfrekvensen er proporsjonale, kan vi sette:

$$\frac{\Delta f}{*f} = \frac{\Delta n}{*n} \quad (4.19)$$

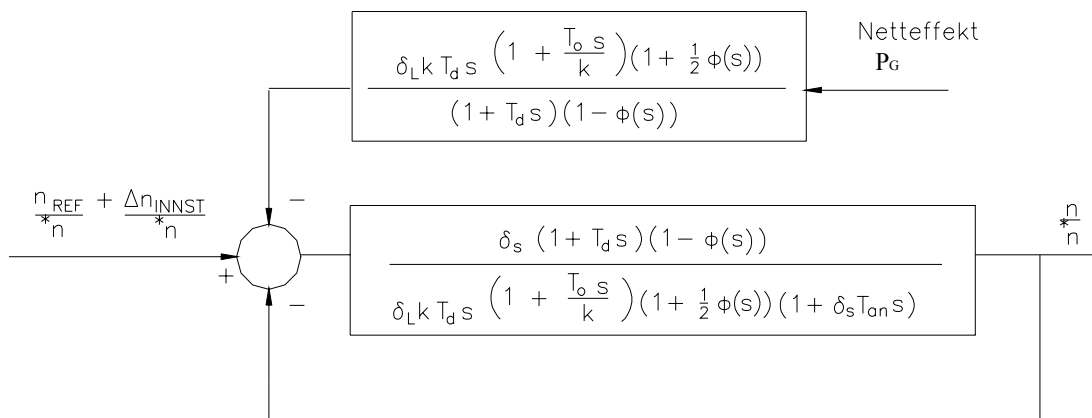
Vi kan så sette opp blokkdiagrammet i figur (4.18) for en regulator tilkopleet et nett i et forenklet første ordens system.

Dersom nettet består kun av ohmsk belastning og aggregatet arbeider alene på nettet, vil vi få:

$$\delta_s = \infty \Rightarrow \frac{1}{\delta_s} = 0 \quad (4.20)$$



Figur 4.19: Blokkdiagram for regulator med statikk.



Figur 4.20: Blokkdiagram når statikken er null.

Samtidig vil vi få  $T_{an} = T_a$  og vi får samme blokkdiagram som oppsatt tidligere.

Dette forholdet kan oppstå for aggregat som går alene og leverer strøm til smelteovner, husholdning med hovedsakelig oppvarming eller papirmaskiner (der motorene har regulatorer som holder konstant omløpstall, og der dreiemomentet er konstant) eller liknende ikke frekvensavhengig belastning. Vannmotstanden er også belastning av denne art.

*Hvis vi tar avleveringsprøver med en vannmotstand som er en ren ohmsk belastning, vil vi få et virkelig mål på regulatorens stabilitet, fordi vi da ikke vil få noen stabiliserende virkning fra nettet. Slike prøver er lite aktuelle i dag da vi har gode analoge verktøy for stabilitetsberegninger slik at prøver på anlegg ikke er nødvendig.*

Hvis vi setter statikken på regulatoren lik null, d.v.s.  $l = 0$ , får vi blokkdiagrammet som er vist i figur (4.20).

En kan ved målinger på nettet finne verdien av  $\delta_s$  og  $T_{an}$ . Slike målinger har EFI gjort på Trøndelagsnettet i 60-årene hvor man fant  $\delta_s \approx 0.5$  og  $T_{an} = 9 - 10$  [sek]. Som regneeksempel kan vi bruke disse verdiene for Bøylefoss kraftverk, som vi har sett på tidligere, men regner nå med et ohmsk nett uten å ta med innflytelsen fra det virkelige nettet da dette er det vanskeligste tilfellet. Vi setter  $T_{an} = 9.5$  sek.

En må være oppmerksom på at  $\delta_s$  og  $T_{an}$  kan få andre verdier for det nettet Bøylefoss-regulatoren skal reguler på, men verdiene vil bli av samme størrelsesorden som for trøndelagsnettet. (Vanligvis er  $1 > \delta_s > 0,5$  og  $8 < T_{an} < 10$  [sek]).

I figur (4.21) er amplitude-fase-frekvensdiagrammet for Bøylefoss-regulatoren med nettets innflytelse inntegnet ved fullast (heltrukne linjer). I diagrammet er det også stiplet inn kurven for regulatoren når den går alene på vannmotstand.

Vi ser at nettet øker fasemarginen fra  $20^\circ$  til  $72^\circ$  og endrer forsterkningsmarginen fra 3 dB til 5.2 dB, når regulatoren tilkoples nettet og konstantene i regulatoren holdes uforandret.

I diagrammet er det så inntegnet en kurve for regulatoren tilkoplek nettet der vi har minsket  $T_d$  fra 16 til 6 [sek] og samtidig er pendelets ujevnhetsgrad øket fra  $\delta_L = 0.25$  til 0.30. Dette vil gi en fasemargin  $\psi = 54^\circ$  og en forsterkningsmargin på  $\Delta K = 6$  dB. I figur (4.21) er det vist et diagram for regulatoren i tomgang vist, med  $\delta_L = 0.3$  og  $T_d = 6$  [sek]. Med tomgang forstår vi her en pådragsåpning  $\hat{a} = 0.214$  (merk at pådrag også blir benevnt  $\mu$  eller  $Y$  tidligere i dette kompendiet).

Vi skal i neste avsnitt se betydningen av å minske  $T_d$  mest mulig for å gjøre lastforstillingen hurtigst mulig.

#### 4.3.4 Beregning av lastforstillingstiden

Vi betrakter regulatoren når denne regulerer med en innstilt statikkverdi  $\delta_L l > 0$  når aggregatet er tilkoplek et stivt nett med tilnærmet konstant frekvens. (Frekvensen holdes konstant av andre aggregat som går med 0 % statikk.)

Når vi betrakter regulatoren på denne måten kan vi regne  $\frac{\mu}{*n} = konst.$  og vi kan nøye oss med å betrakte selve regulatoren med statikkinnstillingen, eller forholdet

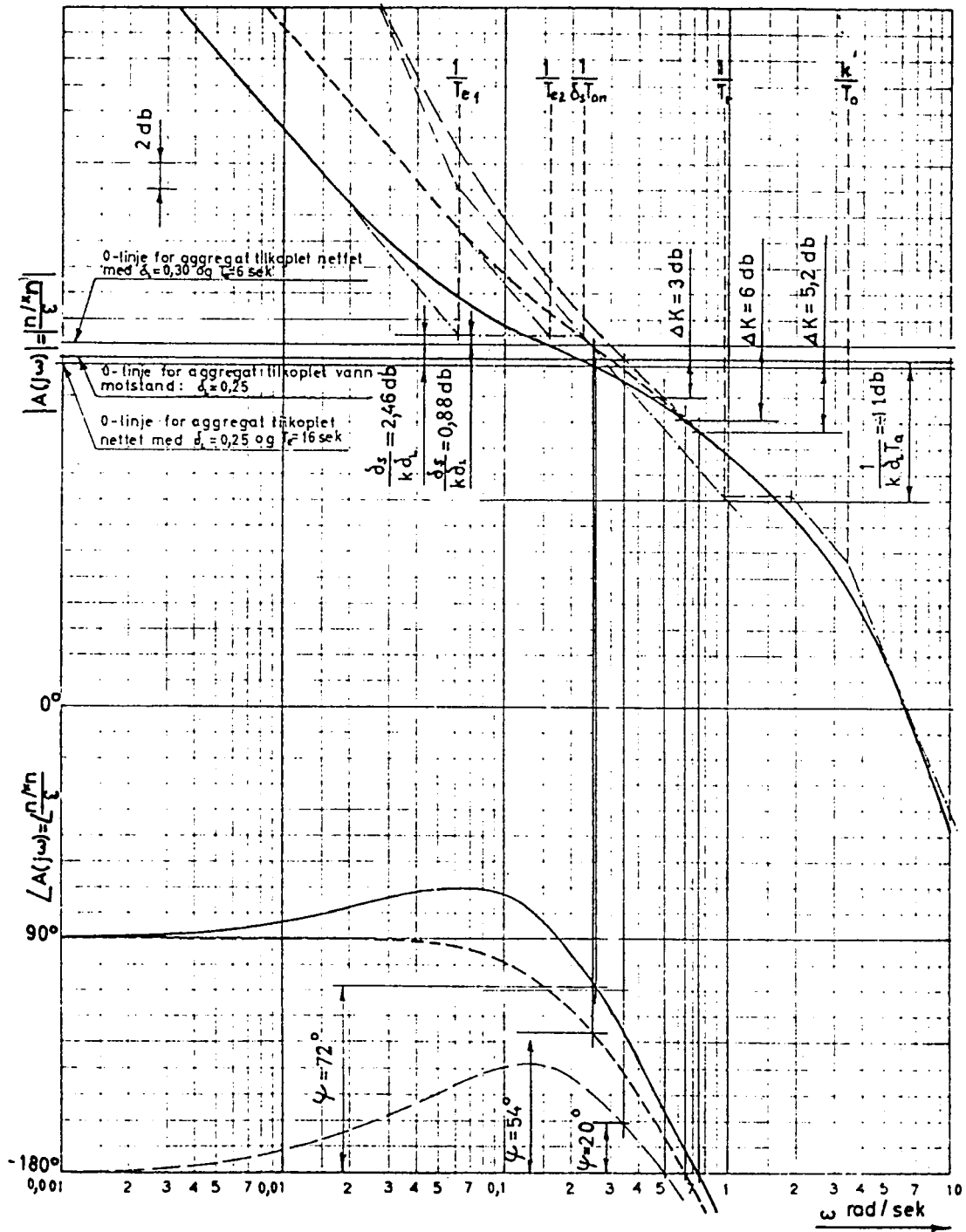
$$\frac{\mu}{\frac{\Delta n_{INNST}}{*n}} \quad (4.21)$$

der  $\mu$  er pådrag fra regulatoren. Vi har følgende verdier for regulatoren ved alternativ 1;  $T_d = 16$  [sek],  $T_o = 0.44$  [sek],  $K = 1.5$  og  $\delta_L = 0.25$ , vi setter statikken  $\delta_L l = 0.06$ . Det vil si

$$l = \frac{0.06}{0.25} = 0.24$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} &= \frac{K+l}{2T_o} + \sqrt{\left(\frac{K+l}{2T_o}\right)^2 - \frac{l}{T_o T_d}} = 3.95 \\ \frac{1}{T_2} &= \frac{K+l}{2T_o} - \sqrt{\left(\frac{K+l}{2T_o}\right)^2 - \frac{l}{T_o T_d}} = 0.00865 \\ \frac{1}{T_d} &= 0.0625 \end{aligned} \quad (4.22)$$



Figur 4.21: Amplitude-fase-frekvensdiagram for Arendal Fossekompani's turbin Bøylefoss  $n/n_{ref}$  og  $n/P_g$  stiplet lange avbrutte strek.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\Delta n_{INNST}}{*n} \frac{\left(s + \frac{1}{T_d}\right)}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)} \frac{1}{\delta_L T_0} \\ &\Downarrow \\ \mu &= \frac{\Delta n_{INNST}}{*n} \frac{1}{0.25 \cdot 0.44} \frac{(s + 0.0625)}{(s + 3.95)(s + 0.00825)}\end{aligned}\quad (4.23)$$

Hvis vi kjører inn et sprang på  $\frac{\Delta n_{INNST}}{*n}$  (et sprang =  $\frac{1}{s}$ ), ved en plutselig forstilling av lasten, får vi responsen  $\mu$  fra pådragsbevegelsen, og uttrykket i (4.23) blir da:

$$\mu = \frac{\Delta n_{INNST}}{*n} 16.7 \frac{1 + 16s}{s(1 + 0.253s)(1 + 116s)} \quad (4.24)$$

I tidsplanet får vi:

$$\mu = \frac{\Delta n_{INNST}}{*n} 16.7 (1 - 0.135e^{-3.95t} - 0.865e^{-0.00865t}) \quad (4.25)$$

I alternativ 2 i figur (4.21), der  $T_d$  er minsket til 6 [sek] får vi;

$T_o = 0.44$  [sek],  $K = 1.5$  og  $\delta_L = 0.3$  og vi setter statikken  $\delta_L l = 0.06$ , d.v.s.

$$l = \frac{0.06}{0.30} = 0.20 \quad (4.26)$$

Dette gir:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{K+l}{2T_0} + \sqrt{\left(\frac{K+l}{2T_0}\right)^2 - \frac{l}{T_0 T_d}} = 3.853$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{K+l}{2T_0} - \sqrt{\left(\frac{K+l}{2T_0}\right)^2 - \frac{l}{T_0 T_d}} = 0.0197$$

$$\frac{1}{T_d} = 0.167$$

$$\mu = \frac{\Delta n_{INNST}}{*n} \frac{1}{0.30 \cdot 0.44} \frac{(s + 0.167)}{(s + 3.853)(s + 0.0197)} \quad (4.27)$$

Kjøres inn et sprang på  $\frac{\Delta n_{INNST}}{*n}$  så får vi:

$$\mu = \frac{\Delta n_{INNST}}{*n} 16.7 \frac{1 + 6s}{s(1 + 0.265s)(1 + 50.8s)} \quad (4.28)$$

I tidsplanet får man:

$$\mu = \frac{\Delta n_{INNST}}{*n} 16.7 (1 - 0.133e^{-3.853t} - 0.887e^{-0.0197t}) \quad (4.29)$$

Vi ser her at den innstillingen vi har i alternativ 2, gir en raskere lastforstilling enn tilfellet i alternativ 1. Tidskonstantene blir  $T_1 = 0.26$  [sek] og  $T_2 = 50.8$  [sek] i alternativ 2, mot  $0.253$  [sek] og  $116$  [sek] i alternativ 1.

Det er av stor betydning å holde tidskonstantene for lastforstillingen så små som mulig. Særlig er dette viktig ved sekundærregulering med nettregulator eller vannstandsregulator som gir impuls til lastforstillingen og forstiller ytelsen via regulatoren. Nå er imidlertid tidskonstantene for en slik sekundærregulering så store at det sjelden er nødvendig å minske tidskonstantene for lastforstillingen på turbinen for å få en tilfredstillende sekundærregulering.

En må være oppmerksom på at en ikke uten videre kan innstille en regulator slik at den gir optimal forstillingshastighet og samtidig god stabilitet i tomgang og på nettet, dersom det er fare for at nettet kan "falle ut". Dette fører til at regulatoren regulerer på en stabil nettdel med større verdi på  $\delta_s$  og mindre verdi på  $T_{an}$ . Regulatoren kan i så fall bli ustabil på den lille nettdelen den får å regulere på etter utkoplingen. Hvis vi risikerer store svingninger i pådraget på turbinen kan dette medføre større trykksvingninger i røret enn ved vanlige avslag (d.v.s. større trykk enn røret er dimensjonert for).

En må derfor ved innstilling av en regulator ta hensyn til det verste tilfelle som regulatoren skal arbeide under og innstille denne slik at vi ikke kan få ustabilitet under driftsforhold selv om dette går utover forstillingstiden.

Nå er det i eksemplet som er beregnet for Arendal Fossekompagni - Bøylefoss særlig lange forstillingstider. Dette kommer av den store verdien på  $T_d$  som er nødvendig for å stabilisere dette anlegget. Forstillingskonstanten her bli ca. 1 [min], mens den for vanlige anlegg på større nett vil ligge på ca. 20 - 30 [sek].

Ved igangsetting kan en prøve å skifte kompensasjonssleid og få den verdi av  $T_d$  som er nødvendig for å få stabilitet under de mest ugunstige forhold regulatoren får å arbeide under og deretter stille inn  $K$  og  $\delta_L$  for å oppnå optimal forstillingshastighet samtidig som stabiliteten er tilstrekkelig god.

## 4.4 Igangsetting

Reguleringsprøvene for Bøylefoss som er beskrevet foran ble foretatt den 10. og 11. nov. 1962. Det var da bare en turbin på rørledningen, slik at vi får å regne med  $T_w = 1.025$  ved fullast. På grunn av nettets innflytelse fant vi å kunne redusere  $T_d$  til 6 [sek] for Bøylefoss regulatoren. Dette ble gjort ved å skifte inn ny kompensasjonssleide med sporbredde 0.6 [mm] (se senere detaljerte beskrivelse av PI-regulatoren). Amplitude-fase-frekvensdiagrammet er vist i figur (4.24).

Regulatoren for Bøylefoss var meget stabil i tomgang og tilkoplett nettet. Tomgangsprøvene og avslagene som er målt i tidsplanet er vist i figur (4.25) - (4.30).

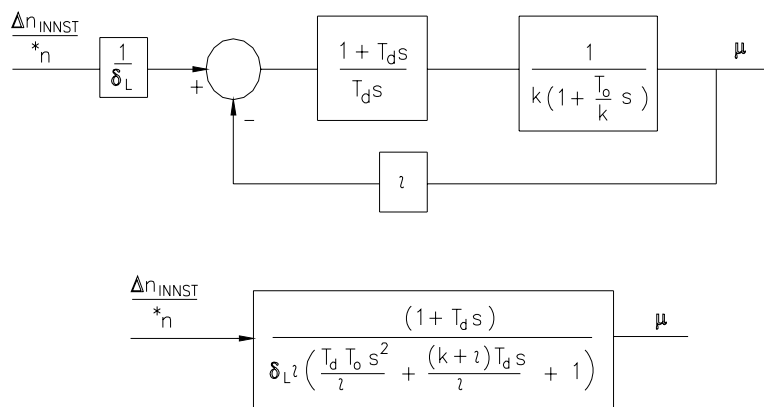
Aggregatet ble også kjørt alene tilkoplett Arendal Smelteverk med *frekvensuavhengig* isolert belastning. Det viste seg at vi fikk store pendlinger i frekvensen med denne belastningen. Dette kom

av at spenningsregulatoren var frekvensuavhengig. Det betyr at den øker magnetiseringen når spenningen synker som følge av reduksjonen i frekvensen. Ved et lite påslag med en påfølgende reduksjon av frekvensen vil spenningsregulatoren øke belastningen og dermed motvirke turbinregulatoren. På grunn av at spenningsregulatoren er svært hurtig sammenlignet med turbinregulatoren vil denne komme på etterskudd og sleiden vil gå i metning på grunn av den lange åpningstiden som beskrevet tidligere. Systemet vil da begynne å pendle og kan bli ustabil dersom utstyringen fra- og regulerings hastigheten på spenningsregulatoren er stor i forhold til turbinregulatoren. Stabiliteten vil forverre seg ved store ytelser også på grunn av ulineariteter i ytelseskurven som gir mindre ytelsesoverskudd fra turbinen ved store pådrag (se figur (4.31)). I tillegg vil utstyringen fra spenningsregulatoren  $\Delta E$  gi større belastningsvariasjoner ved store ytelser fordi strømstyrken ( $I$ ) er stor her, noe som bidrar i negativ retning.

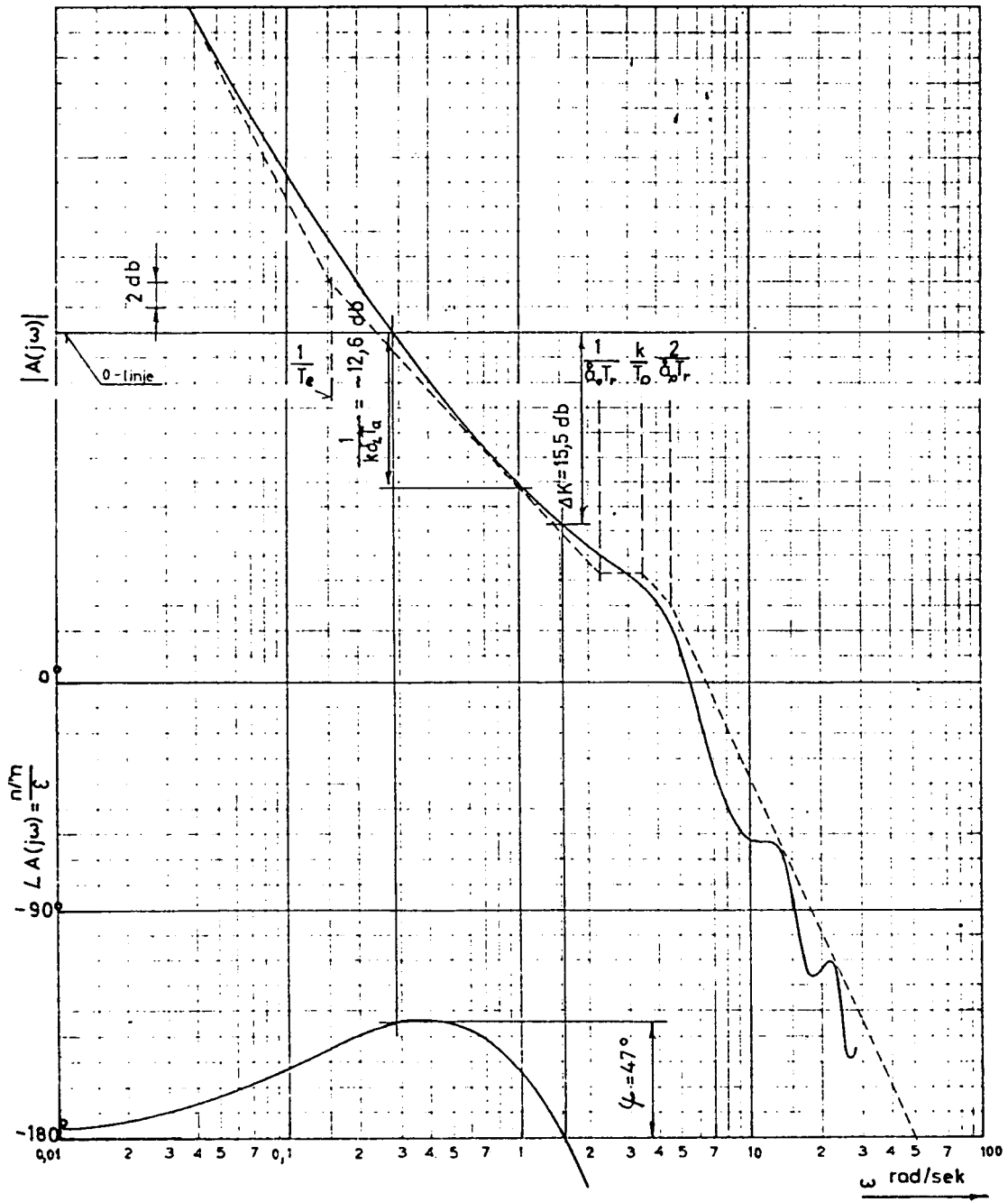
I vårt tilfelle var åpnings- og lukketidene (ved mettet sleidutslag) for turbinregulatoren uvanlig store i forhold til tidskonstantene for spenningsregulatoren ( $T = 25 [sek]$  og  $T_l = 6.5 [sek]$ ). Ved over 250 [mm] regulatorslag, ble reguleringen helt ustabil fordi spenningsregulatoren fra dette pådraget og oppover mer og mer fikk overtaket over turbinregulatoren. (Dette skyldes økningen i strømstyrken ( $I$ ), da vi har:  $\Delta belastning = \cos\phi \cdot \Delta E \cdot I$ ).

Turbinregulatoren åpnings- og lukketider kunne ikke gjøres mindre av hensyn til trykkvariasjonene i røret. Under kjøringen på Smelteverket ble turbinregulatoren dempet ved å skifte inn kompensasjonssleide med  $T_d = 16 [sek]$  og øke tilbakeføringen til  $K = 1,7$  men forholdene ble ikke forbedret, snarere tvertimot fordi turbinregulatoren ble tregere. Spenningsregulatoren ble så utkoplest og spenningen regulert for hånd. Turbinregulatoren kjørte da fin frekvens og stabiliteten var meget god. I figur (4.31) er kurvene som ble tatt ved kjøring på smelteovnen vist sammen med diagrammet over ytelsen på turbinen som funksjon av regulatorslaget.

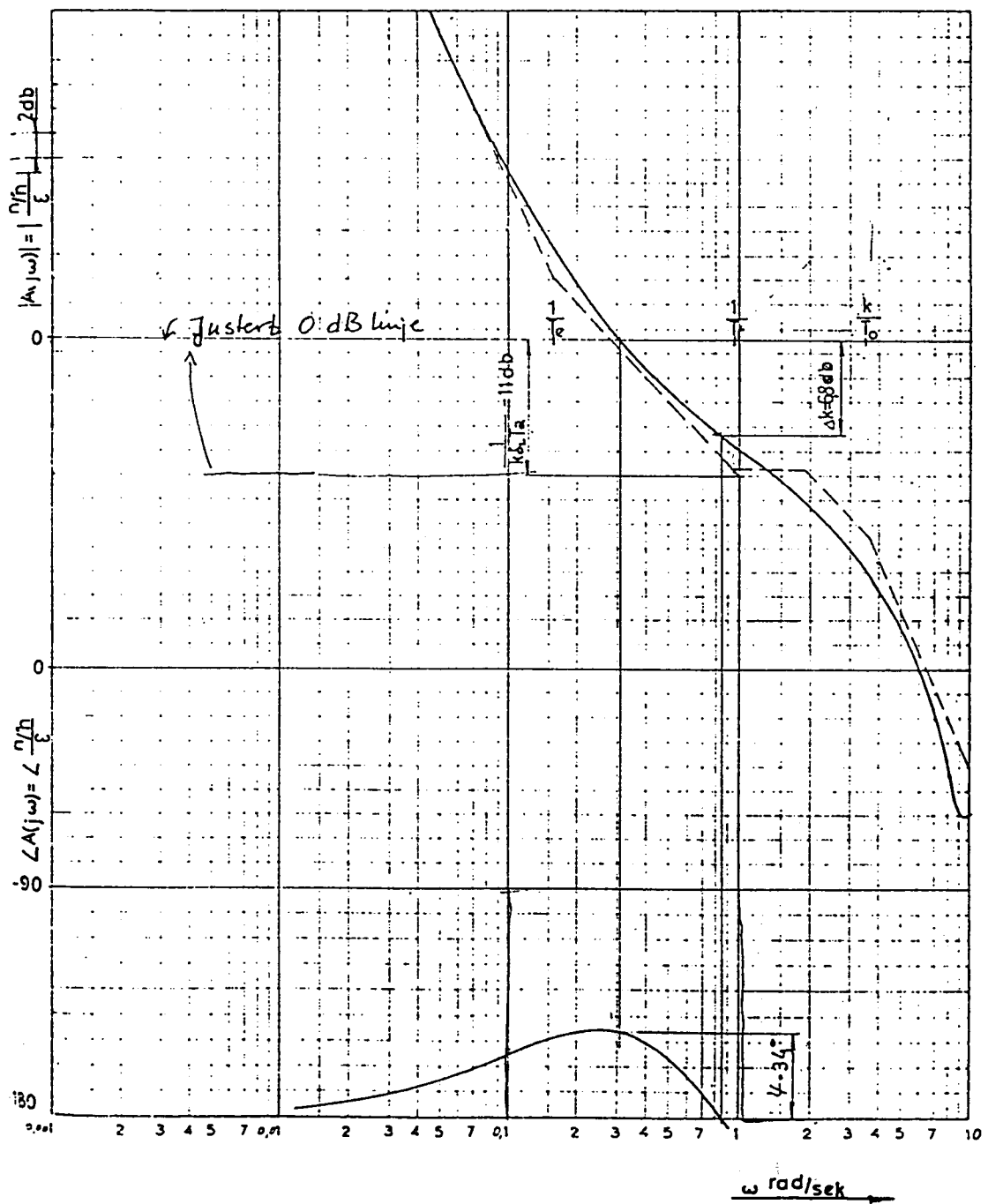
Skal en få tilfredsstillende regulering tilkoplest smelteverk på isolert nett må en ha en frekvensavhengig spenningsregulator, d.v.s. en regulator som holder spenningen proporsjonal med frekvensen og som ikke griper inn og regulerer på spenningsvariasjoner som fremkommer på grunn av små frekvensvariasjoner, innenfor et gitt spenningsavvik på for eksempel  $\pm 2 Hz$  ved denne driftstilstand. Turbinregulatoren vil da ikke blir forstyrret av spenningsregulatoren ved lastvariasjoner fra smelteverket innenfor visse verdier og turbinregulatoren klarer dermed å holde frekvensen tilnærmet konstant og dermed blir også spenningsvariasjonene små. (Se figur (4.31) der spenningsregulatoren er utkoplest).



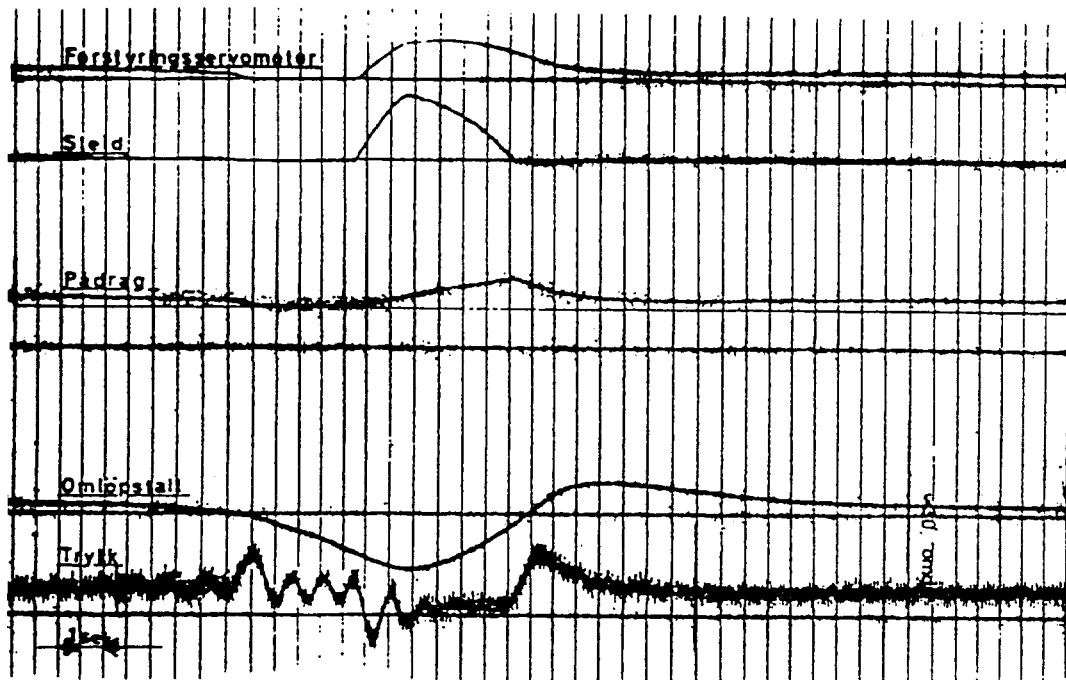
Figur 4.22: Blokkdiagram av regulatoren med statikkinnstilling.



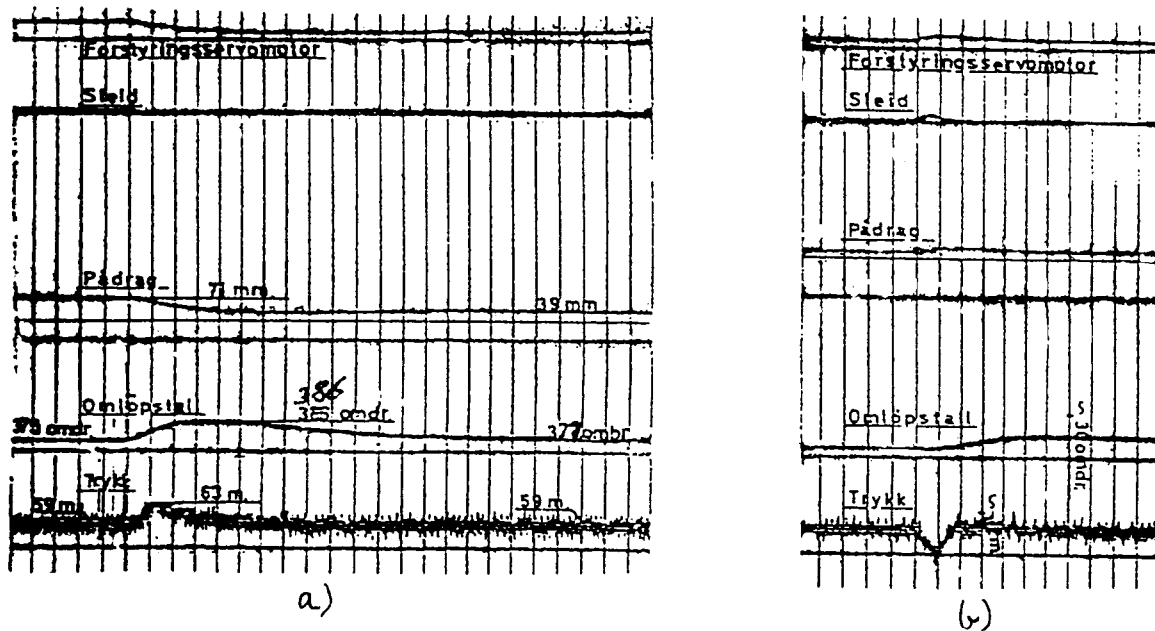
Figur 4.23: Amplitude-Fase-Frekvensdiagram for Bøylefoss. Diagrammet er satt opp for  $\hat{a} = 0.214$  (tomgang). Åpen sløyfe  $A(s)$ .



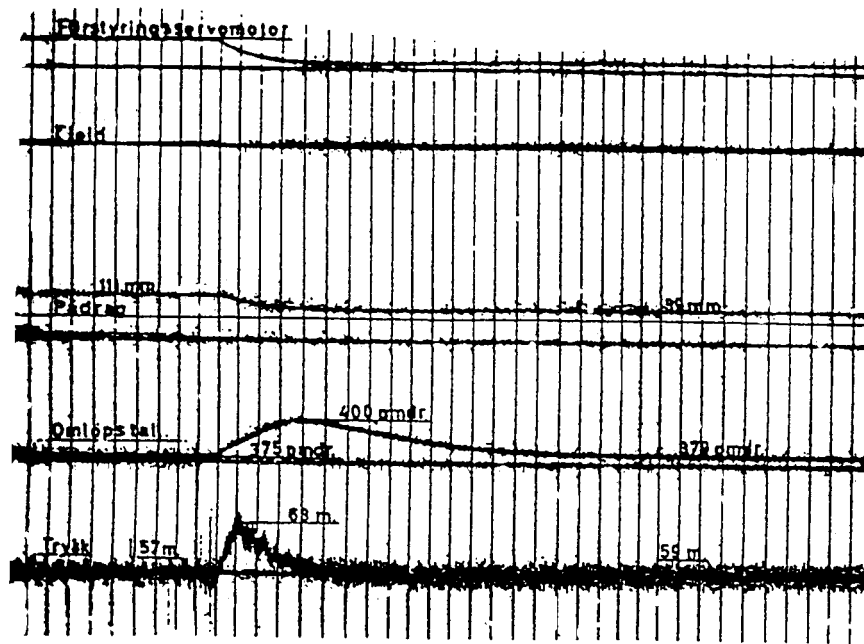
Figur 4.24: Amplitude-Fase-Frekvensdiagram for Bøylefoss. Diagrammet er satt opp for fullt pådrag, og med en turbin på røret. Åpen sløyfe  $A(s)$ ,  $l = 0$ , dvs. null statikk.



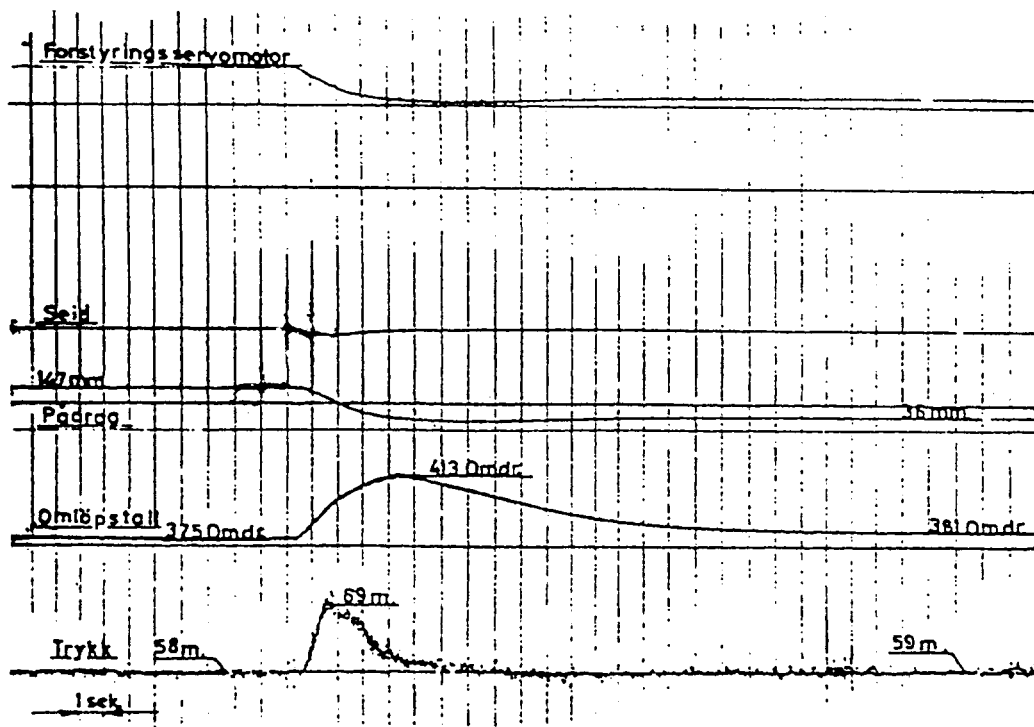
Figur 4.25: Nedpressing av omløpstall med slagbegrenser etterfulgt av rask åpning for undersøkelse av innsvingningsforløpet av regulatoren ved tomgang.



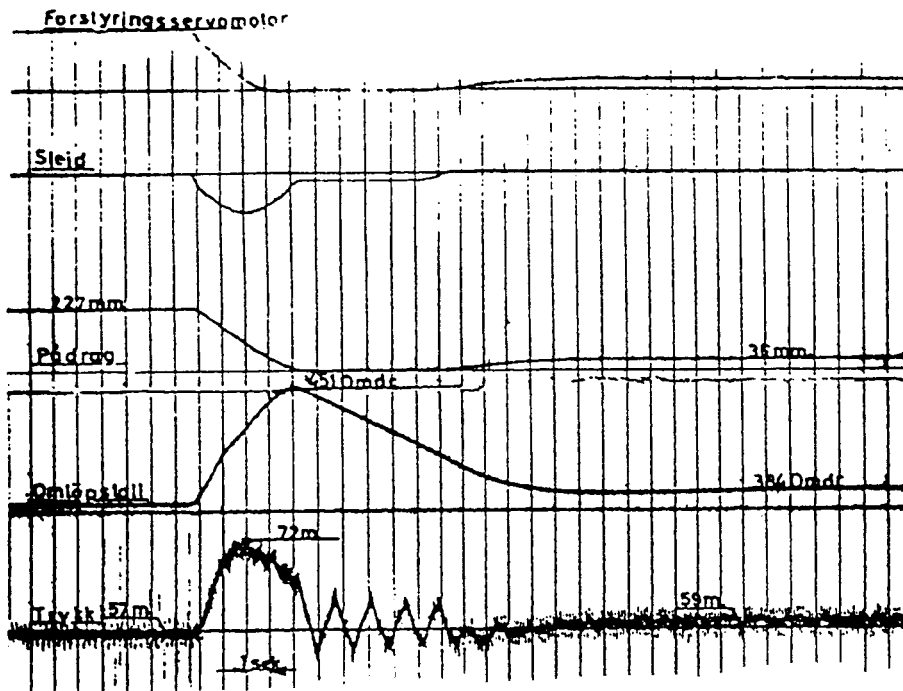
Figur 4.26: a) avslag. Belastning = 1.560 MW. Statikk = 4 %. b) Omløpstallforstilling.



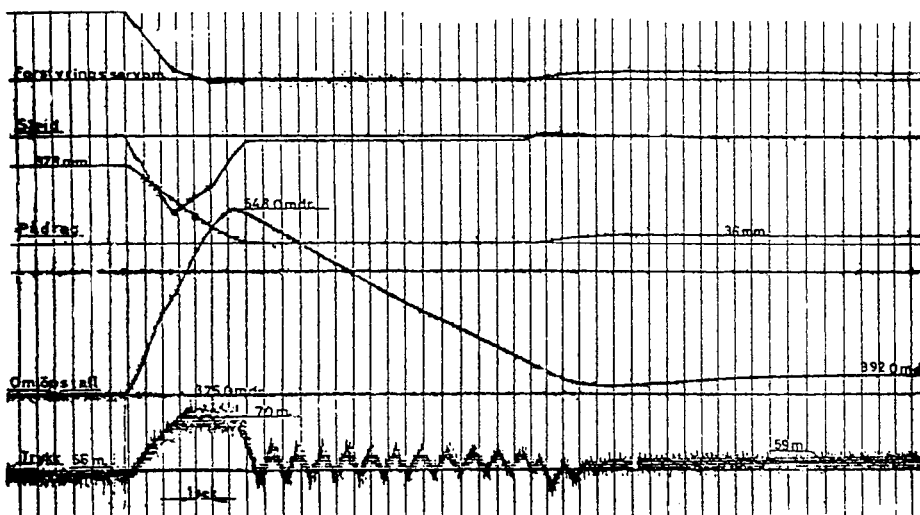
Figur 4.27: Avslag. Belastning = 3.440 MW. Statikk = 4 %.



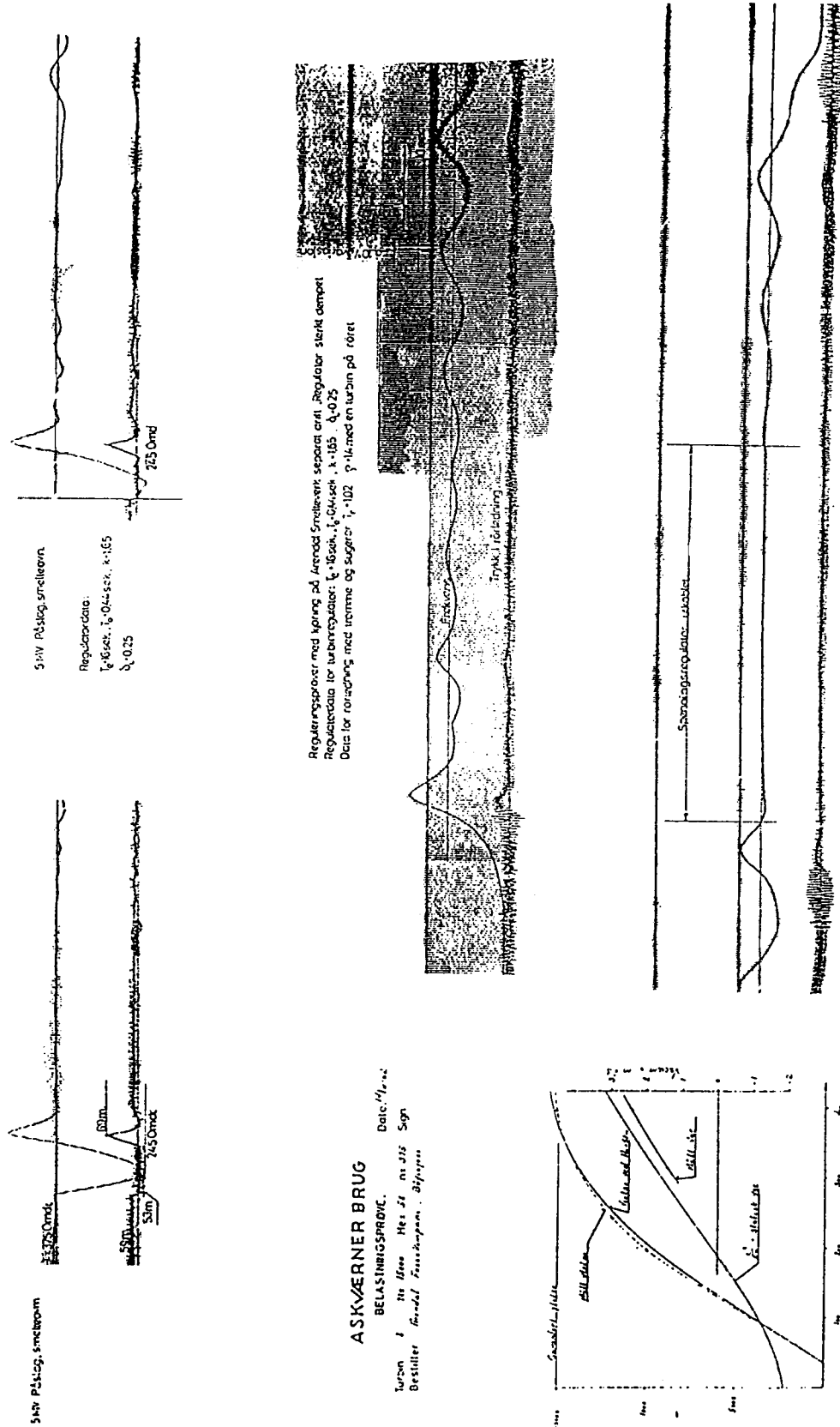
Figur 4.28: Avslag. Belastning = 4.980 MW. Statikk = 4 %.



Figur 4.29: Avslag. Belastning = 8.100 MW. Statikk = 4 %.



Figur 4.30: Avslag. Belastning = 10.720 MW. Statikk = 4 %.



Figur 4.31: Aggregatet på isolert nett med Arendal Smelteverk.



## Kapittel 5

# Løsning av Allievis ligninger i tidsplanet

### 5.1 Karakteristikkmetoden

Allievis ligninger er utledet i kapittel 3.3. Vi tar med rørfriksjonen og neglisjerer helning og konisitet i røret i dette avsnittet. Ligningene er også utledet i tillegg H bakerst i kompendiet. Ligningene kan da skrives som angitt i ligning (5.1) og ligning (5.2) i tidsplanet.

I dette avsnittet (5.1) forutsettes at positiv  $q$  er økende vannstrøm inn i røret på pådragsstedet og positiv  $h$  er økende trykk oppstrøms pådragsstedet. Dette er situasjonen ved at en pumpe ”trykker” vann inn i røret på pådragsstedet, mens vi i de andre avsnittene har definert hastigheten og vannføringen positiv ut av røret på pådragsstedet. Dette avsnittet gjelder da for en pumpe på pådragsstedet.

Ligning for kraftlikevekt uten linearisering av friksjonsleddet (Newtons 2. lov):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = A g \frac{\partial h}{\partial l} - A g D |q| \cdot q \quad (5.1)$$

NB! I dette avsnittet er  $q$  [ $m^3/s$ ] og  $h$  [ $m$  V.S.] absolutte verdier.

$D$  - falltapskoeffisient for en lengdeenhet av røret. (NB!  $D$  er ikke dimensjonsløs)

$D = f / (A^2 d 2g)$  [ $s^2/m^2$ ] der  $f$  = Prandtl's friksjonsfaktor,  $d$  = rørdiameter [ $m$ ]

og  $A$  = rørtverrsnittsareal [ $m^2$ ].

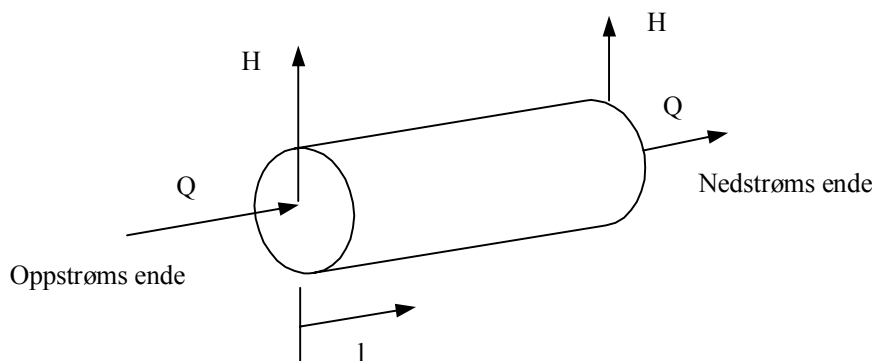
Elastisitetstbetraktning av vann og rør gir følgende ligning for kontinuitet:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{A g} \frac{\partial q}{\partial l} \quad (5.2)$$

Ligningene (5.1) og (5.2) kan skrives på følgende form:

$$-g \frac{\partial h}{\partial l} + \frac{1}{A} \frac{\partial q}{\partial t} + g D |q| q = 0 \quad (5.3)$$

$$-\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{1}{A} \frac{\partial q}{\partial l} = 0 \quad (5.4)$$



Figur 5.1: Positiv retning på trykk og volumstrøm.

Vi vil nå bringe de to ligningene på formen:

$$I \frac{dh}{dt} + J \frac{dq}{dt} + K |q| q = 0$$

Dette kan vi oppnå dersom vi setter  $\frac{dl}{dt} = konst. = \pm a$  som vist i det følgende:

Vi differensierer nå  $h$  og  $q$  og finner uttrykkene for  $\frac{\partial h}{\partial t}$  og  $\frac{\partial q}{\partial t}$ :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial l} dl$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial l} \frac{dl}{dt}$$

som gir:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dt} - \frac{\partial h}{\partial l} \frac{dl}{dt} \quad (5.5)$$

Vi får på samme måte:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial t} dt + \frac{\partial q}{\partial l} dl$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial l} \frac{dl}{dt}$$

som gir:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{dq}{dt} - \frac{\partial q}{\partial l} \frac{dl}{dt} \quad (5.6)$$

Vi setter inn for  $\frac{\partial q}{\partial t}$  og  $\frac{\partial h}{\partial t}$  i henholdsvis ligning (5.3) og (5.4) og ordner ligningene som vist i (5.7) og (5.8).

$$-g \frac{\partial h}{\partial l} + \frac{1}{A} \frac{dq}{dt} - \frac{1}{A} \frac{dl}{dt} \frac{\partial q}{\partial l} + g D |q| q = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{dl}{dt} \frac{\partial h}{\partial l} - \frac{dh}{dt} + \frac{a^2}{g} \frac{1}{A} \frac{\partial q}{\partial l} = 0 \quad (5.8)$$

Vi multipliserer ligning (5.7) med  $\left(\frac{dl}{dt}\right)/g$  og summerer ligningene (5.7) og (5.8) for å eliminere  $\frac{\partial h}{\partial l}$  som da gir oss følgende ligning:

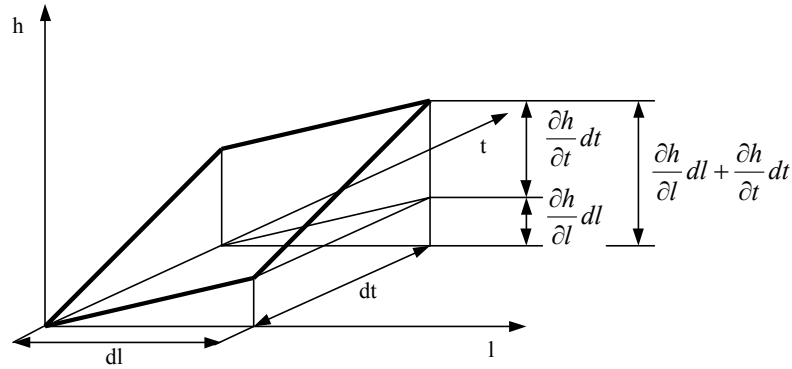
$$-\frac{dh}{dt} + \frac{dl}{dt} \frac{1}{gA} \frac{dq}{dt} - \left( \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 - a^2 \right) \frac{1}{gA} \frac{\partial q}{\partial l} + \frac{dl}{dt} D |q| q = 0 \quad (5.9)$$

Vi ser nå at dersom vi velger verdien  $\frac{dl}{dt} = \pm a = \text{konst.}$  vil vi få følgende 2 par ordinære differensialligninger. Ligning (5.9) gjelder bare for verdier av  $h$  og  $q$  som oppfyller:

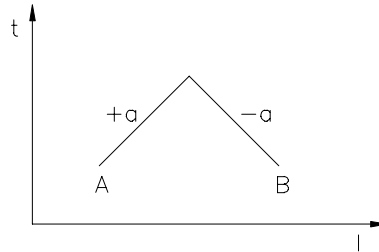
$$\frac{dl}{dt} = +a \text{ bare oppfylt for trykkbølge som går nedover fra inntaket hvor følgende ligning gjelder:} \quad (5.10)$$

$$-\frac{dh}{dt} + \frac{1}{gA} \frac{dq}{dt} + a D |q| q = 0 \quad (5.11)$$

$$\text{videre har vi } \frac{dl}{dt} = -a \text{ oppfylt for trykkbølge som går oppver fra inntaket:} \quad (5.12)$$



Figur 5.2: Illustrasjon av  $t, l$  plan med  $h$  som funksjon av  $t$  og  $l$ .



Figur 5.3: Skjematisk løsning ved hjelp av karakteristikkmetoden.

$$+\frac{dh}{dt} + \frac{1}{gA} \frac{dq}{dt} + aD|q|q = 0 \quad (5.13)$$

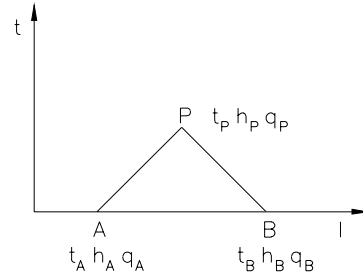
Ligning (5.9) gjelder bare for verdier av  $dh$ ,  $dq$ ,  $dl$  og  $dt$  som oppfyller begge ligningsparene ovenfor.

Da  $(a)$  forutsettes konstant kan de to ligningene (5.10) og (5.12) visualiseres i  $l$ - $t$  planet som to rette linjer.

Vi forutsetter at vi har beregnet og/eller kjenner trykket i to punkter på røret A og B og betrakter det hele i  $t$ - $l$  planet.

Vi integrerer ligning (5.12) som gjelder for en trykkbølge som går nedover fra inntaket med betingelsen i ligning (5.11) vist med karakteristikken fra  $t_A$  til  $t_P$  og ligning (5.13) med betingelse (5.12) fra  $t_B$  til  $t_P$ . Dermed kan vi finne den verdien av  $t_P$ ,  $l_P$ ,  $h_P$  og  $q_P$  som tilfredsstiller begge ligningssettene.

Vi får da følgende ligningssett når avstanden mellom A, P og B er liten slik at friksjonstapet kan refereres til vannføringen i punktene A og B som gjelder for tidspunktet  $\Delta t = (t_P - t_A) = (t_P - t_B)$  tidligere.



Figur 5.4: Karakteristikkmetoden gir løsning i punkt P i tidspunkt  $t_P$  som ligger  $\Delta t$  senere i tid enn tidspunktet for de kjente verdiene i A og B, forutsatt at  $q$  og  $h$  er kjent i punktene A og B ved tidspunkt  $t_A = t_B$  ( $t_P = t_A + \Delta t = t_B + \Delta t$ )

$$C^+ \left\{ \begin{array}{l} l_P - l_A = a(t_P - t_A) \\ \frac{1}{A}(q_P - q_A) - \frac{g}{a}(h_P - h_A) + gD q_A |q_A| (t_P - t_A) = 0 \end{array} \right\} \quad (5.14)$$

$$C^- \left\{ \begin{array}{l} l_P - l_B = -a(t_P - t_B) \\ \frac{1}{A}(q_P - q_B) + \frac{g}{a}(h_P - h_B) + gD q_B |q_B| (t_P - t_B) = 0 \end{array} \right\} \quad (5.15)$$

Merk: Vi har nå  $+a = \frac{l_P - l_A}{t_P - t_B}$  og  $-a = \frac{l_P - l_B}{t_P - t_B}$

For ligning (5.14) har vi at  $\Delta l = a \Delta t$ , mens vi for ligning (5.15) har at  $\Delta l = -a \Delta t$ . Innfører dette og omformer  $\Delta t$ :

$$a = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{(t_P - t_A)} \quad (5.16)$$

Multipliserer med  $a$  og dividerer med  $g$  i uttrykkene, og får  $a \Delta t = a(t_P - t_A) = (l_P - l_A) = \Delta l$  som gir ligningene:

$$C^+ : h_P - h_A + \frac{a}{gA}(q_P - q_A) + \Delta l D q_A |q_A| = 0 \quad (5.17)$$

$$C^- : h_P - h_B - \frac{a}{gA}(q_P - q_B) - \Delta l D q_B |q_B| = 0 \quad (5.18)$$

For å øke oversikten innfører vi:

$$B = \frac{a}{gA} \quad (5.19)$$

$$R = \Delta l D = \Delta l f / (A^2 d 2g) \quad (5.20)$$

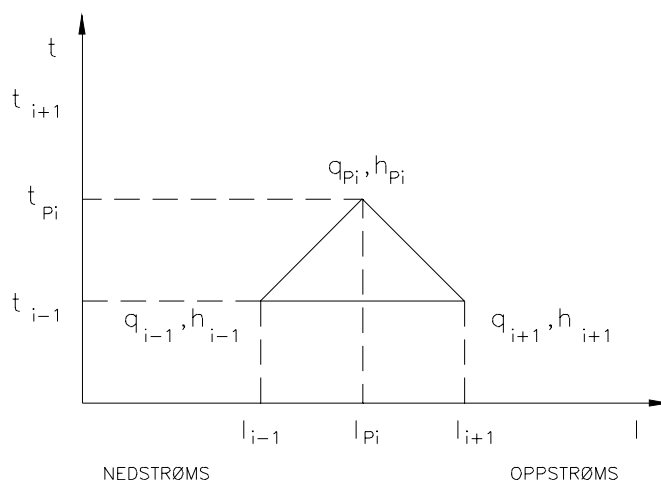
hvor  $f$  er Prandtl's friksjonsfaktor,  $A$  er rørtverrsnittet og  $d$  er rørdiameteren.

og får for ligningene (5.17) og (5.18):

$$C^+ : h_P = h_A - B \cdot (q_P - q_A) - R \cdot q_A |q_A| \quad (5.21)$$

$$C^- : h_P = h_B + B \cdot (q_P - q_B) + R \cdot q_B |q_B| \quad (5.22)$$

Generelt kan vi dele et rør med lengde  $L$  inn i  $N$  deler, slik at  $\frac{L}{N} = l_{pi} - l_{i-1} = l_{i+1} - l_{pi}$ . Videre er  $\Delta t = \frac{\Delta l}{a}$  som gir at  $\Delta t = t_P - t_A = t_P - t_B = t_{pi} - t_{i-1} = t_{i+1} - t_{pi}$ . Ved å bruke en generell notasjon, se figur (5.5), får vi langs  $+a$  karakteristikkene:



Figur 5.5: Generell notasjon ved løsning v.h.a. karakteristikkmetoden.

$$C^+ : h_{pi} = C_P - B_P \cdot q_{pi} \quad (5.23)$$

I ligning (5.23) refererer  $C_P$  til den positive karakteristikken og inneholder data fra  $(i-1)$  i forrige tidsskritt. På samme måte får vi  $C_M$  fra  $(i+1)$  for den negative karakteristikken  $C^-$ :

$$C^- : h_{pi} = C_M - B_M \cdot q_{pi} \quad (5.24)$$

Her er:

$$C_P = h_{i-1} + B \cdot q_{i-1} - R \cdot q_{i-1} |q_{i-1}| \quad (5.25)$$

$$C_M = h_{i+1} - B \cdot q_{i+1} + R \cdot q_{i+1} |q_{i+1}| \quad (5.26)$$

Da blir  $h_{pi}$  og  $q_{pi}$ :

$$h_{pi} = \frac{C_P + C_M}{2} \quad (5.27)$$

$$q_{pi} = \frac{h_{pi} - C_M}{B} = \frac{C_P - h_{pi}}{B} \quad (5.28)$$

Vi ser nærmere på ligning (5.28). Ligningen skrevet fullt ut blir ved å sette inn for  $R = aD$  fra ligning (5.20) og  $B = a/gD$  fra ligning (5.19)

$$q_{pi} = \frac{gA}{2a} (h_{i-1} - h_{i+1}) + \frac{1}{2} (q_{i-1} + q_{i+1}) - AgD \Delta l (q_{i-1} |q_{i-1}| + q_{i+1} |q_{i+1}|) \quad (5.29)$$

De enkelte leddene i ligningen representerer,

1) Kontinuitetsligningen:

$$\frac{1}{2} (q_{i-1} + q_{i+1}) \quad (5.30)$$

2) Elastisitet i rørbiten og vannet. Vannføringen i de to endene av rørbiten på begge sider av punktet  $p_i$  varierer med tiden, d.v.s. med trykkbølgen:

$$\frac{gA}{2a} (h_{i-1} - h_{i+1}) \quad (5.31)$$

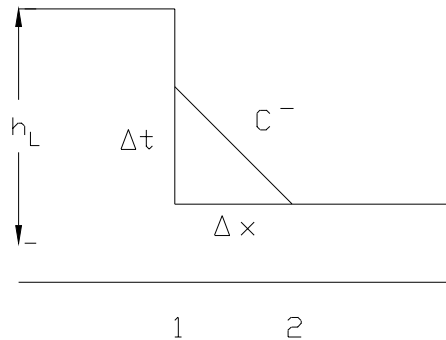
3) Friksjon i rørbiten:

$$\frac{f \Delta l}{2aDA} (q_{i-1} |q_{i-1}| + q_{i+1} |q_{i+1}|) \quad (5.32)$$

Ved hjelp av ligning (5.27) og (5.28) kan vi beregne  $q$  og  $h$  for alle punkter i et rør når vi kjenner  $q$  og  $h$  ved forrige tidspunkt.

### 5.1.1 Randbetingelser for venstre ende

1. Inntaksmagasin med konstant nivå på vannspeil. Grensebetingelsene blir (se figur (5.6)):

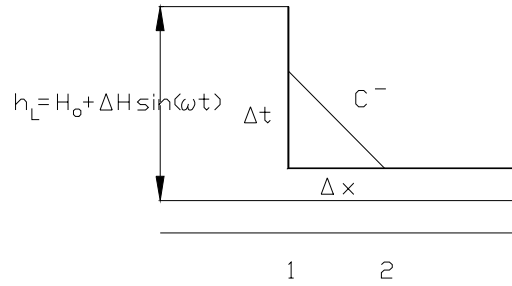


Figur 5.6: Grensebetingelser, inntaksmagasin.

$$h_{P1} = h_L \quad (5.33)$$

$$C^- : q_{P1} = \frac{h_{P1} - C_M}{B} = \frac{h_L - C_M}{B} \quad (5.34)$$

Legg merke til at vi benytter  $C^-$  karakteristikken ved beregning av  $q_{P1}$  da returbølgen går fra venstre ende i følge definisjon som vi velger. "Venstre ende" må bare betraktes som symbolsk og kan tegnes på høyre side i en tegning av systemet, men vil alltid betegne grensebetingelse i en rørende. Ref. figur (5.1).



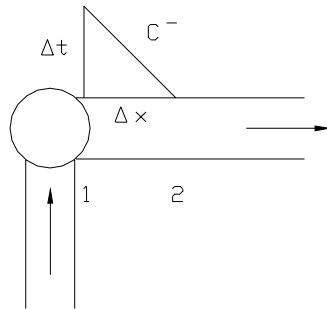
Figur 5.7: Grensebetingelser, svingesjakt.

2. Magasin med svingende vannspeil, svingesjakt. Grensebetingelsene blir (se figur (5.7)):

$$h_{P1} = h_L = H_o + \Delta H \sin(\omega t) \quad (5.35)$$

$$C^- : \frac{q_{P1} - C_M}{B} = \frac{H_o + \Delta H \sin(\omega t) - C_M}{B} \quad (5.36)$$

3. Stempelpumpe som leverer til en ledning. Antar at vi kjenner  $q$  som funksjon av tiden. Grensebetingelsene blir da (se figur (5.8)):



Figur 5.8: Stempelpumpe.

$$q_{P1} = Q_o + \Delta Q \sin(\omega t) \quad (5.37)$$

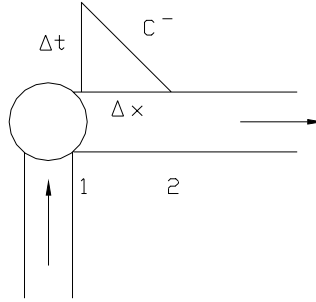
$$C^- : h_{P1} = C_M + B [Q_o + \Delta Q \sin(\omega t)] \quad (5.38)$$

4. Sentrifugalpumpe med kjent pumpekarakteristikk. Se figur (5.9) Antar en pumpekarakteristikk:

$$h_{P1} = H_{ST} + a q_{P1} + b q_{P1}^2 \quad (5.39)$$

Trykket i punkt 1 kan også finnes ved hjelp av  $C^-$  karakteristikken

$$C^- : h_{P1} = C_M + B q_{P1} \quad (5.40)$$



Figur 5.9: Sentrifugalpumpe.

Ved å kombinere disse to ligningene finnes grensebetingelsen  $q_{P1}$

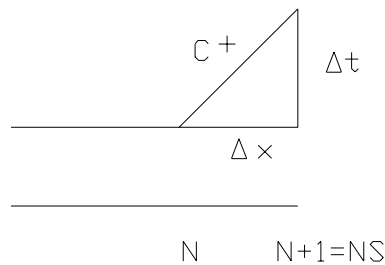
$$\begin{aligned} 0 &= H_{ST} + aq_{P1} + bq_{P1}^2 - C_M - Bq_{P1} \\ bq_{P1}^2 + q_{P1}(a - B) + H_{ST} - C_M &= 0 \end{aligned}$$

$$q_{P1} = -\frac{(a - B)}{2B} + \sqrt{\frac{(a - B)^2}{2B} - (H_{ST} - C_M)b} \quad (5.41)$$

Grensebetingelsen  $h_{P1}$  finnes fra ligning (5.40) når  $q_{P1}$  fra ligning (5.41) settes inn.

### 5.1.2 Randbetingelser for høyre ende

1. Fritt utløp. Grensebetingelser (se figur (5.10)):



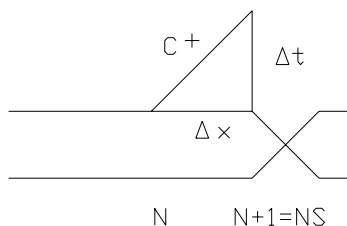
Figur 5.10: Fritt utløp.

$$h_{NS} = 0 \quad (5.42)$$

$$C^+ : q_{NS} = \frac{C_P - h_{NS}}{B} = \frac{C_P}{B} \quad (5.43)$$

2. Ventil i nedstrøms ende.

Antar at ventilen har strupekarakteristikken  $q_o = (C_d A_G)_o \cdot \sqrt{2gH_o}$



Figur 5.11: Ventil.

der  $q_o$  er stasjonær vannføring,  $h_o$  er stasjonært trykk og  $(C_d A_G)_o$  er ventilens åpningsareal multiplisert med en konstant for stasjonær drift. For en annen ventilåpning har vi generelt:

$$q_{PNS} = C_d A_G \sqrt{2g h_{PNS}} \quad (5.44)$$

Definerer den dimensjonsløse ventilåpningen  $\tau$ , som:

$$\tau = \frac{C_d A_G}{(C_d A_G)_o} \quad (5.45)$$

Får da at:

$$q_{PNS} = \frac{q_o \tau \sqrt{h_{PNS}}}{\sqrt{h_o}} \quad (5.46)$$

Stasjonært er  $\tau = 1$ , og ved null vannføring er  $\tau = 0$ .  $\tau$  kan bli større enn 1 ved ytterligere åpning fra stasjonær tilstand. Grensebetingelsen for  $q_{PNS}$  finnes fra  $C^+$  karakteristikken

$$C^+ : q_{PNS} = \frac{C_P - h_{PNS}}{B} \quad (5.47)$$

Ved å eliminere  $h_{PNS}$  fra ligningene (5.46) og (5.47) fås etter litt regning:

$$q_{PNS} = -B \cdot C_v + \sqrt{(B \cdot C_v)^2 + 2C_v C_P} \quad (5.48)$$

Vi bruker + foran rottegnet siden minustegnet ikke gir noen mening. Videre har vi:

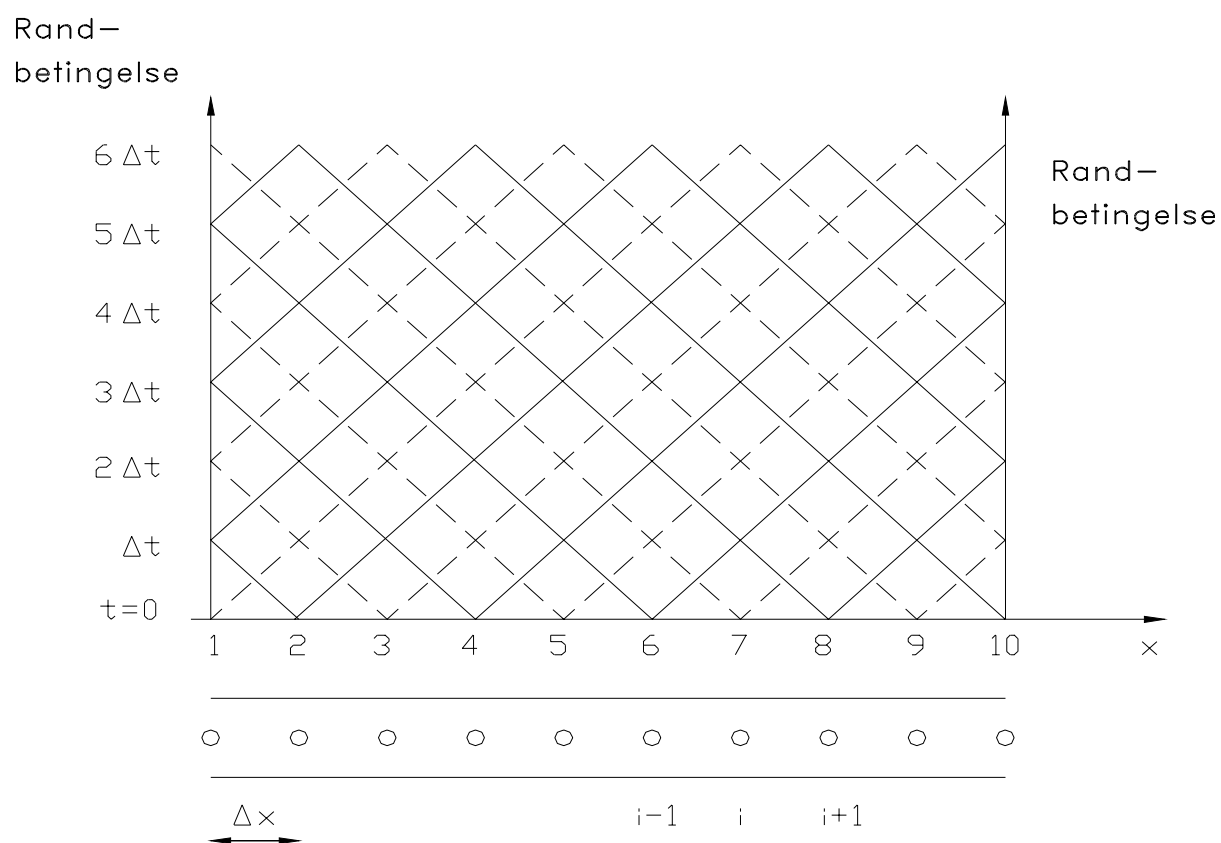
$$C_v = \frac{(q_o \tau)}{2h_o}$$

Og  $B = \frac{a}{gA}$  se ligning (5.19) og  $C_p$  fra ligning (5.25).

Grensebetingelser for  $h_{PNS}$  finnes deretter fra

$$C^+ : h_{PNS} = C_P - Bq_{PNS} \quad (5.49)$$

Ved bruk av karakteristikkmetoden kan løsningen presenteres grafisk. Se figur (5.12).



Figur 5.12: Grafisk presentasjon av løsning ved karakteristikkmetoden.

## 5.2 Grafisk løsning av trykkstøt i elastiske ledninger

Den grafiske metoden som presenteres her er rask og enkel å gjennomføre for overslagsberegninger. Vær oppmerksom på at metoden bygger på endel forutsetninger og at den er noe unøyaktig på grunn av opptegning av trykkforløpet i diagrammet som vises senere i dette avsnittet.

I dette avsnittet vil vi kun ta for oss forhold ved ventilstengning/åpning, men metoden kan også brukes for pumper o.l. tilkoplede rørledninger.

Som utgangspunkt benyttes Allievis ligninger uten friksjon, d.v.s. friksjonsleddet i ligning (5.1) settes lik null.

Kontinuitet:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial q}{\partial l} = 0 \quad (5.50)$$

Kraftlikevekt:

$$g \frac{\partial h}{\partial l} + \frac{1}{A} \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (5.51)$$

Positive retninger er definert ved at vannstrømmen regnes positiv inn i røret og positiv trykkøkning er for økende trykk slik som i kapittel 5.1. Setter nå  $x = l$  og  $v = \frac{q}{A}$  og får:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (5.53)$$

Ligningene kan kombineres ved først å derivere ligning (5.52) m.h.p.  $x$  og deretter derivere ligning (5.53) m.h.p.  $t$ .

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (5.55)$$

Ved å subtrahere ligningene får vi:

$$a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (5.56)$$

Deriverer så ligning (5.52) m.h.p.  $t$  og ligning (5.53) m.h.p.  $x$  og kombinerer:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (5.57)$$

Ligningene (5.56) og (5.57) er begge 2. ordens partielle diff. ligninger som er dekoplet (bølgeligningen). Generell løsning av disse er

1.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (5.58)$$

$$v - v_o = -\frac{g}{a} \left\{ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right\} \quad (5.59)$$

2.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (5.60)$$

$$h - h_o = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (5.61)$$

Funksjonene  $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$  og  $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$  er vilkårlige funksjoner som må tilfredstille grenseverdiene (endetilstandene). De representerer bølger som går i hver sin retning langs rørledningen. Funksjonen  $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$  kan betraktes som en beskrivelse av bølgebevegelsen i pos. x-retning, d.v.s. oppover rørledningen fra en turbin eller en ventil i nedre ende av røret. Tilsvarende kan  $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$  betraktes som en beskrivelse av bølgebevegelsen i neg. x-retning, d.v.s. bølgen starter fra en forstyrrelse i oppstrøms ende av røret.

For en generell behandling er det hensiktsmessig å innføre følgende dimensjonsløse størrelser:

Trykkforholdet:

$$z = \frac{h}{h_o} \quad (5.62)$$

Relativ vannføring:

$$q = \frac{v}{v_o} = \frac{Q}{Q_o} \quad (5.63)$$

Allievis konstant, rørkarakteristikken:

$$h_w = \frac{a v_o}{2g h_o} \quad (5.64)$$

Merk at dette er en annen definisjon enn i tidligere kapitler. Her er  $h_o$  og  $v_o$  henholdsvis stasjonært trykk og stasjonær hastighet. Stasjonært tilstanden er den tilstanden man har før man begynner for eksempel en ventillukking. Vi setter inn de dimensjonsløse størrelsene i løsningen og får:

$$z_{x,t} - z_{x,0} = \frac{1}{h_o} \left\{ F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right\} \quad (5.65)$$

$$q_{x,t} - q_{x,0} = -\frac{1}{2 h_w h_o} \left\{ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right\} \quad (5.66)$$

Vi har fått to ligninger for trykk og vannføring på et vilkårlig sted  $x$  i røret ved tidspunkt  $t$ , som er avhengig av tilstanden i røret ved tidspunkt  $0$ , da bevegelsen av pådraget begynte (d.v.s. da vi har stasjonær tilstand).

Funksjonene  $F$  og  $f$  er generelle funksjoner. Vi kan således inkludere faktoren  $h_o$  i funksjonene og de vil fremdeles være generelle, slik at:

$$z_{x,t} - z_{x,0} = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (5.67)$$

$$q_{x,t} - q_{x,0} = -\frac{1}{2h_w h_0} \left\{ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right\} \quad (5.68)$$

Ligningene (5.67) og (5.68) kan kombineres på en slik måte at  $f$ -funksjonen faller bort. Ved å multiplisere ligning (5.68) med  $-2h_w$  og deretter summere de to ligningene får vi:

$$z_{x,t} - z_{x,0} - 2h_w (q_{x,t} - q_{x,0}) = 2 \cdot F\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (5.69)$$

Tilsvarende har vi ved tidspunkt  $t = t_1$  og lengde  $x = x_1$

$$z_{x_1,t_1} - z_{x_1,0} - 2h_w (q_{x_1,t_1} - q_{x_1,0}) = 2 \cdot F\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right) \quad (5.70)$$

Da  $F$  funksjonen beskriver en bølgebevegelse i pos.  $x$ -retning, har vi for  $F$  funksjonen:

$$\frac{dx}{dt} = a$$

$$\Downarrow$$

$$dt = \frac{1}{a} dx$$

$$\Downarrow$$

$$t - t_1 = \frac{1}{a} (x - x_1) \quad (5.71)$$

$$t - \frac{x}{a} = t_1 - \frac{x_1}{a} \quad (5.72)$$

$$F\left(t - \frac{x}{a}\right) = F\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right) \quad (5.73)$$

Stasjonært er:

$$z_{x_1,0} = z_{x,0} \vee q_{x_1,0} = q_{x,0} \quad (5.74)$$

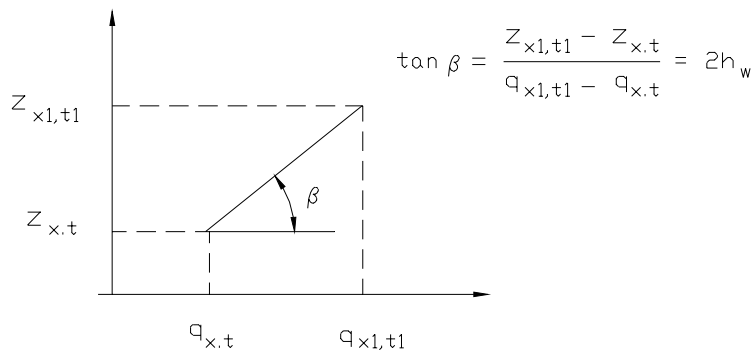
Ved å kombinere ligningene (5.69) og (5.70) får vi:

$$z_{x,t} - z_{x_1,t_1} = 2h_w (q_{x,t} - q_{x_1,t_1}) \quad (5.75)$$

Ligning (5.75) er presentert grafisk i figur (5.13).

På tilsvarende måte som ovenfor kan  $F$ -funksjonen elimineres fra ligningene (5.67) og (5.68). Vi multipliserer ligning (5.68) med  $2h_w$  og summerer:

$$z_{x,t} - z_{x,0} + 2h_w (q_{x,t} - q_{x,0}) = 2f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (5.76)$$



Figur 5.13: Grafisk fremstilling ved trykk-bevegelse i pos. x-retning.

Ved tidspunkt  $t = t_1$  og lengde  $x = x_1$  fås tilsvarende:

$$z_{x1,t1} - z_{x1,0} + 2h_w (q_{x1,t1} - q_{x1,0}) = 2f \left( t_1 + \frac{x_1}{a} \right) \quad (5.77)$$

$f$  funksjonen følger en bølgebevegelse i neg. x-retning. For denne vil vi ha:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a \\ \Downarrow \\ dt &= -\frac{1}{a} dx \\ t - t_1 &= -\frac{1}{a} (x - x_1) \\ \Downarrow \\ t + \frac{x}{a} &= t_1 + \frac{x_1}{a} \\ f \left( t + \frac{x}{a} \right) &= f \left( t_1 + \frac{x_1}{a} \right) \end{aligned}$$

Vi kan nå kombinere ligningene (5.76) og (5.77) når vi i tillegg vet at stasjonært er  $z_{x1,0} = z_{x,0}$  og  $q_{x1,0} = q_{x,0}$ :

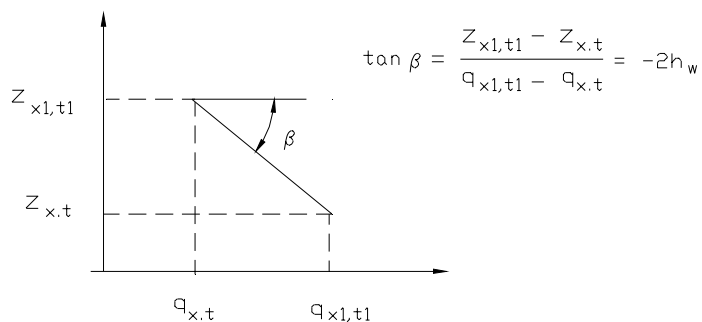
$$z_{x,t} - z_{x1,t1} = -2h_w (q_{x,t} - q_{x1,t1}) \quad (5.78)$$

På tilsvarende måte som tidligere er også denne ligningen presentert grafisk. Se figur (5.14).

Vi har nå kommet fram til to ligninger (5.75) og (5.78) med lineær sammenheng mellom trykk og volumstrøm. Disse sammenhengene skal vi benytte når vi bruker det grafiske diagrammet i figur (5.15).

Det grafiske diagrammet er tegnet opp med utgangspunkt i hvordan kinetisk energi omsettes til trykkenergi ved ventillukking. Vi tar utgangspunkt i figur (5.16).

Vi gjør om verdiene til dimensjonsløse størrelser:



Figur 5.14: Grafisk presentasjon ved trykk-bevegelse i neg. x-retning.

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{Q}{Q_0} \\
 Z &= \frac{H}{H_0} \\
 v &= \sqrt{2gH} \\
 Q &= v \cdot Y = Y\sqrt{2gH} \\
 &\Downarrow \\
 q &= Y\sqrt{Z}
 \end{aligned}$$

eller:

$$\boxed{Z = \left(\frac{q}{Y}\right)^2} \quad (5.79)$$

Vi har i figur (5.17) innført åpningsgraden  $y$ . Den er definert som:

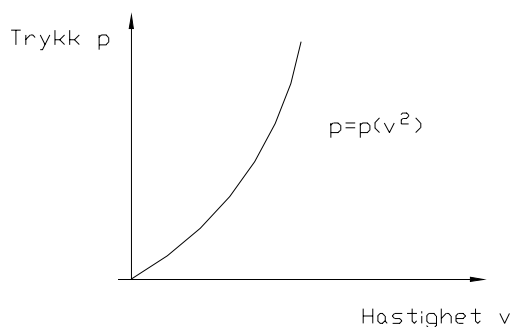
$$\begin{aligned}
 y &= 1 : \text{Fullt åpen} \\
 y &= 0 : \text{Lukket}
 \end{aligned}$$

Diagrammet som brukes ved den grafiske metoden er en kombinasjon av figurene (5.13), (5.14) og øverste del av figur (5.17) (stiplet utsnitt i figuren). I tillegg er det nederst på arket tegnet inn et diagram for lukning-/åpningsforløp.

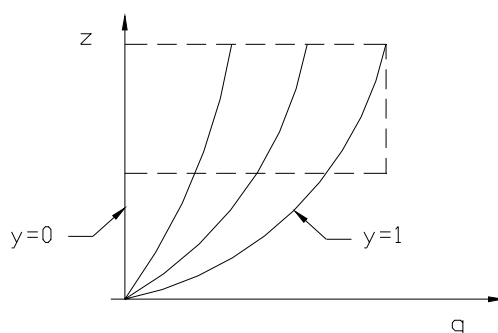
**Beregningseksempel.** Vi har:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 100 \text{ [m]} \\
 g &= 10 \text{ [m/s}^2\text{]} \\
 a &= 1000 \text{ [m/s]} \\
 v_0 &= 0.6 \text{ [m/s]}
 \end{aligned}$$





Figur 5.16: Omsetting av kinetisk energi til trykkenergi ved ventillukking.



Figur 5.17: Omsetting av kinetisk energi til trykkenergi for dimensjonsløse størrelser.

Allievis konstant:

$$h_w = \frac{a v_0}{2g h_0} = 0.30$$

$$2h_w = 0.60$$

I diagrammet i figur (5.18) har vi følgende konstanter:

$$\rho = h_w : \text{Allievis konstant}$$

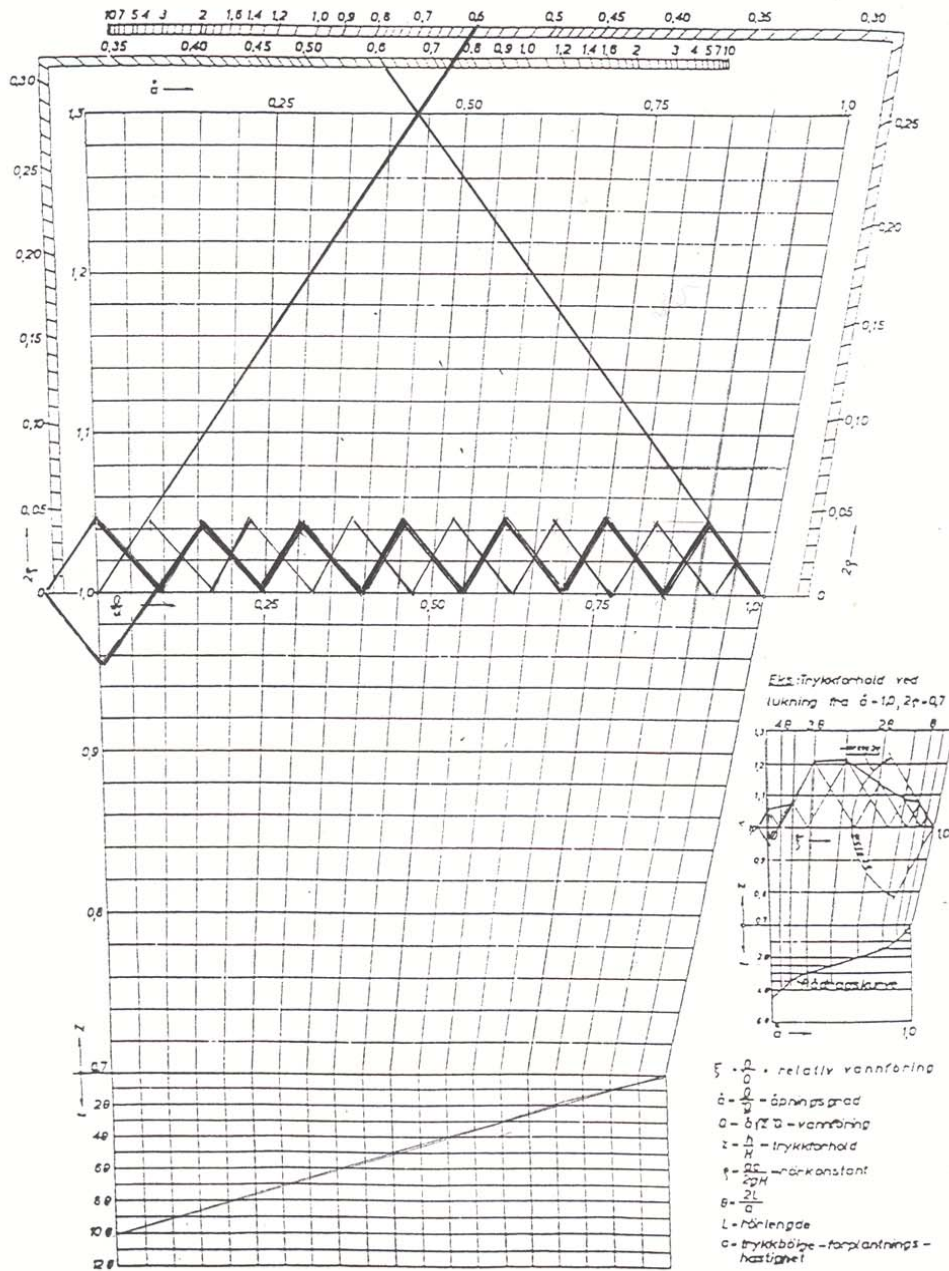
$$z = \frac{h}{h_0} : \text{Trykkforhold}$$

$$\text{\AA} = y : \text{\AA}pningsgrad$$

$$\xi = \frac{v}{v_0} : \text{Relativ vannf\u00f8ring}$$

Ved opptegning starter man helt til h\u00f8yre i diagrammet med en helning lik  $2\rho = 2h_w = 0.60$  (ytterste skala). Denne f\u00f8lger man til  $t = \theta = 2\frac{L}{a}$ , som finnes fra det nederste diagrammet som viser ventilstengingen. Deretter f\u00f8lger man igjen en helning lik  $2\rho = 2h_w = 0.60$  til  $z = 1$ , f\u00f8r man igjen f\u00f8lger den f\u00f8rste karakteristikken til  $t = 2\theta$ . Man fortsetter p\u00e5 tilsvarende m\u00e5te til  $t = 6\theta$  og ventilen er stengt. Da f\u00e5r man en trykksvingning som pendler mellom  $z = 1.04$  og  $z = 0.96$ . Legg merke til at vi her kun finner  $z$  og  $\xi$  ved ventilen i de enkelte tidspunktene  $t = \theta$ ,  $t = 2\theta$ ,  $t = 3\theta$  o.s.v.

Vi har her regnet friksjonsfritt. I et virkelig tilfelle ville trykkforholdet avtatt etterhvert som tiden ( $t$ ) \u00f8kte, og svingningene n\u00e5r  $t = 6\theta$  og ventilen er helt stengt ville etter hvert blitt dempet ut.



Figur 5.18: Lineær ventillukking over  $t = 6\theta$ .



Det er mulig til en viss grad å ta hensyn til friksjonen. Det kan gjøres ved å endre basislinjen for  $z = 0$  som vist i figur (5.19).

### 5.3 Analytisk løsning av trykkstøt i elastiske ledninger

I dette avsnittet vil vi se på de maksimale trykkendringene vi får ved ventilstengning/åpning. Vi vil utlede uttrykk for hvilken lukketid/åpningstid på ventilen som gir maksimal trykkvariasjon, og videre undersøke om de største trykkvariasjonene forekommer i direkte eller indirekte støtperiode.

Innvirkningen fra turbinkarakteristikkene er neglisjert i denne beregningsmåte og vannføringen er antatt å være en ren funksjon av pådragsbevegelsen i henhold til Bernoullis ligning d.v.s.  $Q = Y\sqrt{2gH}$  ( $Y =$  pådrag,  $H =$  trykk).

#### 5.3.1 Allievis ligninger

Som utgangspunkt benyttes Allievis ligninger uten friksjon for dimensjonsløse størrelser. Pr. definisjon har vi:

Relativt trykkforhold:

$$z = \frac{H}{H_0} = \frac{H_0 + \Delta H}{H_0} \quad (5.80)$$

Relativ vannføring:

$$q = \frac{Q}{Q_0} = \frac{Q_0 + \Delta Q}{Q_0} \quad (5.81)$$

Allievis konstant:

$$h_w = \frac{a \cdot c_0}{2gH_0} = \frac{aQ_0}{2gH_0A} \quad (5.82)$$

$A =$  rørtverrsnittet

Allievis ligninger gir da:

Kontinuitet:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - 2ah_w \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (5.83)$$

Kraftlikevekt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2h_w}{a} \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (5.84)$$

Se forøvrig ligningene (5.1) og (5.2), der:

$$2ah_w = \frac{a^2Q_0}{gH_0A} = 2a \left( \frac{ac_0}{2gH_0} \right)$$

$$\frac{2h_w}{a} = \frac{Q_0}{gH_0A} = \frac{2}{a} \left( \frac{ac_0}{2gH_0} \right)$$

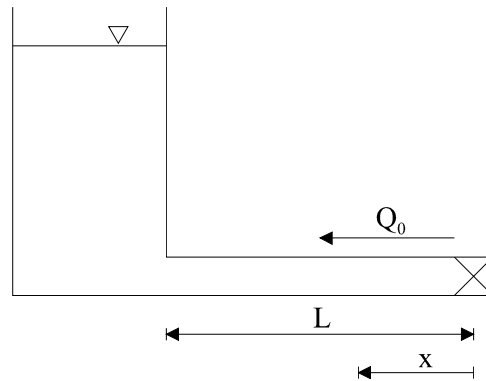
Løsning av ligningene (5.83) og (5.84) blir tilsvarende som i ligningene (5.67) og (5.68):

$$z_{x,t} - z_{x,0} = F \left( t - \frac{x}{a} \right) + f \left( t + \frac{x}{a} \right) \quad (5.85)$$

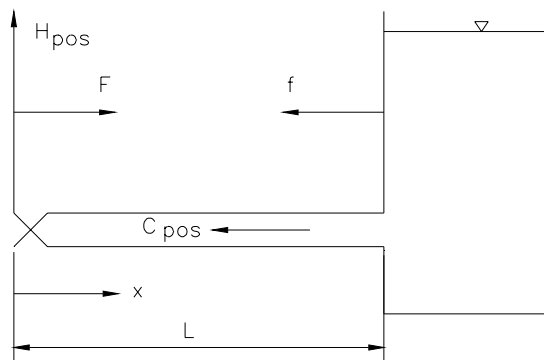
$$q_{x,t} - q_{x,0} = -\frac{1}{2h_w} \left\{ F \left( t - \frac{x}{a} \right) - f \left( t + \frac{x}{a} \right) \right\} \quad (5.86)$$

Stasjonært er  $z_{x,0} = 1$  og  $q_{x,0} = y_0 \sqrt{z_{x,0}} = y_0$ . Vannføringen gjennom ventilen er  $q = y\sqrt{z}$ , hvor  $y$  er åpningsgraden. Stasjonært er åpningsgraden  $y_0$ . Vi har at:

$$y = \frac{Y}{Y_0} = 1 + \frac{\Delta Y}{Y_0} = \frac{Y_0 + \Delta Y}{Y_0} \quad (5.87)$$



Figur 5.20: Rørsystem fra overvann til ventil.



Figur 5.21: Rørsystem fra ventil til undervann.

Grensebetingelser for ligningene:

1. Ved rørinntaket er  $x = L$  og  $z_{x,t} = 1$  (se figur (5.20)). Vi får:

$$1 - 1 = F\left(t - \frac{L}{a}\right) + f\left(t + \frac{L}{a}\right)$$

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) = -f\left(t + \frac{L}{a}\right)$$

Vi innfører en ny tid  $t'$  :

$$t' = t + \frac{L}{a}$$

Da får vi:

$$F\left(t' - \frac{2L}{a}\right) = -f(t') \quad (5.88)$$

Dette betyr at  $F$  har samme verdi med motsatt fortegn som  $f$  hadde for  $\frac{2L}{a}$  sekunder siden.

2. Nederst i røret, ved ventilen eller foran turbinen (se figur (5.20)) er  $x = 0$ ,  $z_{0,t} = z$  og  $q_{0,t} = y\sqrt{z}$ . Vi får

$$z - 1 = F(t) + f(t) \quad (5.89)$$

$$y\sqrt{z} - y_0 = -\frac{1}{2h_w}(F(t) - f(t)) \quad (5.90)$$

Gjennom ventilen antar vi at vannføringen kan uttrykkes ved  $q_{x,t} = y\sqrt{z}$ . Ser nærmere på grensebetingelsene:

- Første intervall

Vi har tidsintervall  $0 < t_1 \leq \frac{2L}{a}$  som kalles direkte støtperiode fordi returbølgen ikke har nådd ventilen. Ønsker å beregne trykket ved slutten av perioden, d.v.s for  $T_1 = t_1 = \frac{2L}{a}$ :

$$z_1 - 1 = F(t_1) \quad (5.91)$$

$$y_1\sqrt{z_1} - y_0 = \frac{1}{2h_w}F(t_1) \quad (5.92)$$

Kombinerer ligningene ved å eliminere  $F(t_1)$  og får:

$$\boxed{z_1 - 1 = 2h_w(y_0 - y_1\sqrt{z_1})} \quad (5.93)$$

- Andre intervall

Vi har  $\frac{2L}{a} < t_2 \leq \frac{4L}{a}$  som kalles indirekte støtperiode.

$$z_2 = 1 + F(t_2) + f(t_2) \quad (5.94)$$

Vi benytter sammenhengen fra (5.89),  $F\left(t - \frac{2L}{a}\right) = -f(t)$  og får:

$$z_2 = 1 + F(t_2) - F(t_1) \quad (5.95)$$

og

$$y_2\sqrt{z_2} = y_0 - \frac{1}{2h_w} [F(t_2) - f(t_2)] \quad (5.96)$$

på samme måte:

$$y_2\sqrt{z_2} = y_0 - \frac{1}{2h_w} [F(t_2) + F(t_1)] \quad (5.97)$$

Ligningene har en tidsforskjell på  $\frac{2L}{a}$  som er refleksjonstiden for en trykkbølge, som går fra ventil til inntak og tilbake igjen. Vi kombinerer nå ligningene fra første og andre intervall: Vi setter inn for  $F(t_1) = z_1 - 1$  fra ligning (5.91) i ligning (5.95) og får:

$$z_1 + z_2 = 2 + F(t_2) \quad (5.98)$$

Vi kombinerer ligning (5.92) og ligning (5.97) på samme måte og får:

$$y_1\sqrt{z_1} - y_2\sqrt{z_2} = \frac{1}{2h_w} F(t_2) \quad (5.99)$$

Kombinerer så ligningene (5.98) og (5.99) ved å eliminere  $F(t_2)$  :

$$\boxed{z_1 + z_2 - 2 = 2h_w (y_1\sqrt{z_1} - y_2\sqrt{z_2})} \quad (5.100)$$

Vi har nå kommet frem til to ligninger (5.93) og (5.100) for direkte og indirekte støtperiode. Disse skal vi benytte videre når vi skal beregne den lukke-/åpningstiden på ventilen som gir de største trykkvariasjonene.

Trykkstigning for  $n$ 'te støtperiode kan utledes ved å erstatte  $z_1$  med  $z_{n-1}$  og  $z_2$  med  $z_n$  i ligning (5.100). Vi har samme forhold mellom  $F(t_2)$ ,  $F(t_1)$  som mellom  $F(t_n)$ ,  $F(t_{n-1})$  og  $f(t_2)$ ,  $f(t_1)$  og  $f(t_n)$ ,  $f(t_{n-1})$  :

Vi kan derfor skrive:

$$\boxed{z_{n-1} + z_n - 2 = 2h_w (y_{n-1}\sqrt{z_{n-1}} - y_n\sqrt{z_n})} \quad (5.101)$$

Ordner ligningen med  $z_n$  på venstre side og  $z_{n-1}$  på høyre side og adderer og subtraherer ledd på begge sider. Ordner deretter på formen  $x^2 + Ax + B = 0$ , slik at vi kan løse ligningen med hensyn på  $\sqrt{z_n}$ :

$$z_n + 2h_w y_n \sqrt{z_n} + (z_{n-1} - 2h_w y_{n-1} \sqrt{z_{n-1}} - 2) = 0$$

$$(\sqrt{z_n} + h_w y_n) = \pm \left[ (h_w y_n)^2 + (2 - z_{n-1} + 2h_w y_{n-1} \sqrt{z_{n-1}}) \right]^{0.5} \quad (5.102)$$

For fysisk mulige løsninger brukes + foran leddet på høyre side. Denne ligningen kan nå løses med hensyn på  $z_n$  der  $y_n$ ,  $y_{n-1}$  og  $z_{n-1}$  er kjent. Ligningen er egnet til løsning med datamaskin når vi søker trykkøkningen i nedre ende av røret, for et tidsinkrement på  $\frac{2L}{a}$ , som gir  $y_n = y_{n-1} \pm \frac{2L}{a} / T$  og  $q_n = y_n \sqrt{z_n}$ ,  $z = \frac{H}{H_0}$ ,  $q = \frac{Q}{Q_0}$ .  $T$  er den totale pådragstiden.

$$\boxed{z_n = 2(h_w y_n)^2 - 2h_w y_n \left[ 2 - z_{n-1} + 2h_w y_{n-1} \sqrt{z_{n-1}} + (h_w y_n)^2 \right]^{0.5} + 2 - z_{n-1} + 2h_w y_{n-1} \sqrt{z_{n-1}}} \quad (5.103)$$

### 5.3.2 Løsning i direkte støtperiode

Trykkstigningen i direkte støtperiode for  $t_1 < \frac{2L}{a}$ .

Fra ligning (5.93) har vi:

$$z_1 - 1 = 2h_w(y_0 - y_1\sqrt{z_1})$$

Eller:

$$\frac{\Delta H}{H} = 2\frac{a^0 C}{2gH}(y_0 - y_1\sqrt{z_1})$$

Hastighetsforandringen i røret i løpet av tiden 0 - t, blir:

$$\Delta C = {}^0 C (y_0 - y_1\sqrt{z_1})$$

Dette gir oss følgende ligning:

$$\Delta H = \frac{a\Delta C}{g} \quad (5.104)$$

Trykkstigningen i slutten av direkte støtperiode har vi fra ligning (5.93) som kan omformes og sette  $z_1 = z$ :

$$\frac{z - 1}{2h_w} = y_0 - y_1\sqrt{z} \quad (5.105)$$

Vi får sammenhengen mellom trykkstigningen  $z$  og pådragsbevegelsen fra  $y_0$  til  $y_1$  ved å uttrykke ligningen eksplisitt på  $y$ :

$$y_1 = \frac{1 - z}{2h_w\sqrt{z}} + \frac{y_0}{\sqrt{z}} \quad (5.106)$$

Trekker så fra  $y_0$  på begge sider og ordner ligningen:

$$y_1 - y_0 = \frac{1 - z}{2h_w\sqrt{z}} + \frac{(y_0 - y_0\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \quad (5.107)$$

Vi innfører total pådragstid  $T$ , og forutsetter lineær pådragsbevegelse som deles opp i  $\frac{2L}{a}$  tidsenheter. (Tiden  $t = \frac{2L}{a}$  er tiden det tar for en trykkbølge å gå fra ventilen til reservoaret og tilbake til ventilen igjen.) Vi får da:

$$y_1 - y_0 = \frac{t}{T} = \frac{2L}{aT} \quad (5.108)$$

Multipliserer siste ledd i ligning (5.107) for  $y_1 - y_0$  med  $\frac{2h_w}{2h_w}$  og får:

$$y_1 - y_0 = \frac{2h_w y_0 (1 - \sqrt{z}) + 1 - z}{2h_w \sqrt{z}} \quad (5.109)$$

Setter (5.108) = (5.109):

$$\frac{2L}{aT} = \frac{2h_w y_0 (1 - \sqrt{z}) + 1 - z}{2h_w \sqrt{z}} \quad (5.110)$$

Vi innfører sammenhengen:

$$T_w = \frac{2L h_w}{a} \quad (5.111)$$

og får:

$$T = \frac{2T_w \sqrt{z}}{2h_w y_0 (1 - \sqrt{z}) + 1 - z} \quad (5.112)$$

**Løsning i direkte støtperiode (d.v.s. før returbølgen fra inntaket når pådragsstedet).**

$$0 < t \leq \frac{2L}{a}$$

Vi er nå interessert i å finne største trykkvariasjon, d.v.s. å bestemme  $(1 - z)_{max}$ , i direkte støtperiode. Ligning (5.112) løses da m.h.p.  $1 - z$ :

$$1 - z = \frac{2T_w \sqrt{z}}{T} - 2h_w y_0 (1 - \sqrt{z}) \quad (5.113)$$

**Trykkreduksjon ved åpning av ventil:  $z < 1$**  Idet ventilen åpnes vil trykket ved ventilen begynne å synke. Fra ligning (5.113) ser vi direkte at vi får størst trykkvariasjon ved å åpne fra helt stengt ventil, d.v.s. fra  $y_0 = 0$  fordi siste ledd på høyre side blir lik 0.

Åpningstiden som gir størst trykksynking ved slutten av direkte støtperiode finnes da fra ligning (5.112) med  $y_0 = 0$ . Vi betegner den totale åpningstid  $T = T$  som er tiden for full åpning av pådraget fra stengt stilling.

$$T = \frac{2T_w \sqrt{z}}{1 - z} \quad (5.114)$$

Den største trykksynking oppstår etter tiden  $2L/a$ .

**Trykkøkning ved lineær lukking av pådrag:  $z > 1$ .** Når ventilen lukkes vil trykket foran pådraget begynne å øke. For å finne maksimal trykkøkning d.v.s.  $(1 - z)_{min}$ , (d.v.s.  $z = z_{max}$ ) deriveres ligning (5.113) m.h.p..  $z$ .

$$(1 - z)_{min} = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{2T_w \sqrt{z}}{T} - 2h_w y_0 (1 - \sqrt{z}) \right\} = 0 \quad (5.115)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{T_w}{T\sqrt{z}} + \frac{h_w y_0}{\sqrt{z}} = 0 \quad (5.116)$$

Ved ordning av ligningen finner vi den posisjonen pådraget  $y = y_0$  må ha når stengningen starter for å få maksimalt trykk:

$$\boxed{y_0 = -\frac{T_w}{Th_w} = -\frac{2L}{aT}} \quad (5.117)$$

Den maksimale trykkstigningen blir, når vi setter inn for  $y_0$  i ligning (5.113):

$$(1 - z)_{min} = \frac{2T_w \sqrt{z}}{T} + 2h_w \frac{2L}{aT} (1 - \sqrt{z}) \quad (5.118)$$

$$(1 - z)_{min} = \frac{2T_w \sqrt{z} + (2T_w - 2T_w \sqrt{z})}{T} = 2\frac{T_w}{T} \quad (5.119)$$

Finner nå den lukketiden  $T_L = T$  som gir maksimal trykkstigning i direkte støtperiode:

$$\boxed{T_L = \frac{2T_w}{1 - z}} \quad (5.120)$$

Denne ligningen vil gjelde dersom  $2h_w y_0 < 1 + \sqrt{z}$  som er bevist i slutten av dette kapitlet.

### Løsning i indirekte støtperiode

$$t \geq \frac{2L}{a}$$

Som utgangspunkt benytter vi ligningene (5.100) eller (5.101) hvor vi forutsetter at  $z_1 = z_2 = z_{n-1} = z_n = z = konst$ . Dette oppnår vi ved å forutsette lineær lukking (med et "lineært pådrag" der  $q = y$  for  $z = 1, 0$ ), som gir samme trykkstigning i alle støtperiodene dersom vi ser bort fra turbinkarakteristikkene, eller ventilkarakteristikken for en ventil der det ofte er et ulineært forhold mellom pådrag og vannføring, i ligning (5.101).

$$2 \cdot z - 2 = 2h_w (y_{n-1} \sqrt{z} - y_n \sqrt{z}) \quad (5.121)$$

Ordner ligningen:

$$\boxed{y_n - y_{n-1} = \frac{1-z}{h_w \sqrt{z}}} \quad (5.122)$$

Videre setter vi som tidligere at økningen i pådrag ( $y_n - y_{n-1}$ ) er den pådragsbevegelse vi får i refleksjonstiden  $\frac{2L}{a}$  som da er gitt av forholdet  $(\frac{2L}{a})/T_L$  der  $T_L$  er tiden det tar å stenge fra  $y_{max}$  til 0:

$$y_n - y_{n-1} = \frac{2L}{aT_L} \quad (5.123)$$

Ved innsetting for  $(y_n - y_{n-1})$  får vi nå inn den totale stengetid fra  $[100\% - 1] = T_L$  som er en funksjon av  $z$  (eller omvendt):

$$\frac{2L}{aT_L} = \frac{1-z}{h_w \sqrt{z}} \quad (5.124)$$

Den maksimale generelle trykkvariasjonen i indirekte støtperiode finner man ved å ordne uttrykket for  $n$ 'te periode for lukketiden  $T = T_L$ :

$$\boxed{T_L = \frac{2Lh_w \sqrt{z}}{a(1-z)} = T_w \frac{\sqrt{z}}{1-z}} \quad (5.125)$$

### Maksimal trykkøkning

Vi er interessert i å bestemme ved hvilke betingelser den største trykkøkningen forekommer i direkte eller i indirekte støtperiode. Betingelsen for om maksimal trykkøkning forekommer i direkte støtperiode får vi fra relasjoner mellom pådrag og trykkstigning. Dette sammenliknet med tilsvarende uttrykk i motstøtperioden, fremkommer ved utledning av ligning (5.113) der  $y_1 - y_0 = \frac{2L}{aT}$  for den direkte støtperiode.

Vi sammenlikner med pådragsbevegelsen som gir størst trykkstigning i motstøtperioden (indirekte støtperiode) som er gitt i ligning (5.122).

Dersom pådragsendringen i løpet av tiden  $2L/a$  (som skal til for å gi en gitt trykkstigning i den direkte støtperioden) er mindre enn den tilsvarende pådragsendring i motstøtperioden, har vi kriteriet for størst trykkstigning i den direkte støtperiode uttrykt ved følgende ulikhet (se ligningene (5.107) og (5.122)):

$$y_1 - y_0 = \frac{y_0(1-\sqrt{z})}{\sqrt{z}} + \frac{1-z}{2h_w \sqrt{z}} < \frac{1-z}{h_w \sqrt{z}} = y_n - y_{n-1} \quad (5.126)$$

Ordnet får vi betingelsen for at den største trykkstigningen oppstår i den direkte støtperiode fra ulikheten (5.126) uttrykt ved følgende ligning:

$$2h_w y_0 < 1 + \sqrt{z} \quad (5.127)$$

Dette betyr at for  $2h_w y_0 < 1 + \sqrt{z}$ , får vi størst trykkstigning i den direkte støtperioden, og ligning (5.120) er gyldig. I tilfellet der  $2h_w y_0 > 1 + \sqrt{z}$ , får vi den største trykkstigning i indirekte støtperiode, og ligning (5.125) er gyldig. Merk at  $h_w$  beregnes for fullast pådrag, d.v.s. at  $c = c_0 =$  fullast vannføring i røret, og dersom  $y_0 = 1.0$ , som er fullast pådrag, vil vi få størst trykkstigning i motstøtperioden dersom  $h_w > (1 + \sqrt{z})/2$ .

**Sluttbemerkning**

Dette avsnitt angir praktiske ligninger for å bestemme maksimale trykkstigninger ved enkle overslagsberegninger.

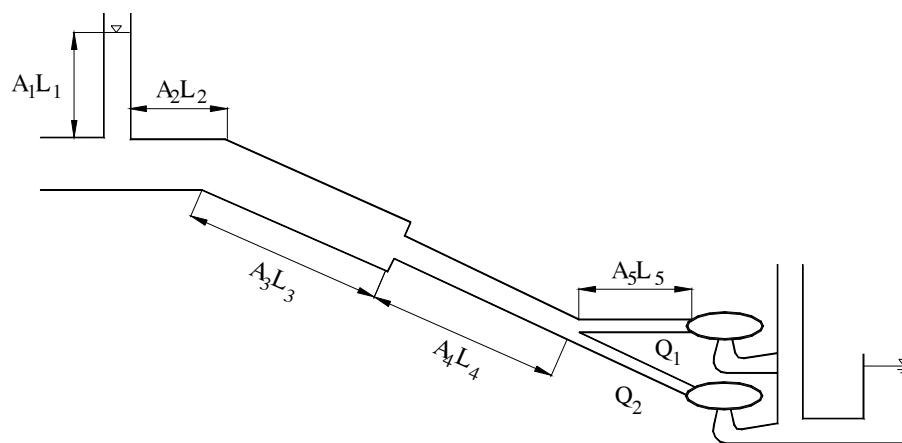
Ligningene viser seg å gi gode nok svar til bruk ved prosjektdiskusjoner ved nye anlegg. Ofte viser det seg at løsningene er gode nok for garantier i kontrakter, særlig for Peltonanlegg der største trykkstigning oftest oppstår i direkte støtperiode. Videre er ligning (5.103) egnet for enkle computerprogram til erstatning for den grafiske metode.



## Kapittel 6

# Overlagsberegninger av reguleringsgarantier

Reguleringsgarantier kan grovt settes opp når tunnelsystemet holdes utenfor og avløpstunnelen utenfor sugerøret kan neglisjeres, se figur (6.1).



Figur 6.1: Tunnelsystem med to turbiner.

Volumstrømmen i trykksjakten er

$$Q = Q_1 + Q_2$$

selv om det ikke går vann i svingesjakten (se figur (6.1)). Hvis svingesjakten er lenger enn 80 - 100 m, så bør en ta med tunnelen oppstrøms svingesjakten, d.v.s. en mer nøyaktig beregning bør gjøres til slutt. Alle lengder fra nærmeste vannspeil tas med.

### 6.1 Stabilitet

Gjennomsnittshastigheten på vannet i sjakten er:

$$c = \frac{\sum \frac{QL_n}{A_n}}{\sum L_n}$$

der  $L_n$  er sjaktstykke nr.  $n$ , med tverrsnittsareal  $A_n$  og volumstrøm  $Q$  (se figur (6.1)). Allievis konstant:

$$h_w = \frac{a \cdot c}{2gH_n}$$

der  $H_n$  er nominelt trykk. Tidskonstanten:

$$T_w = \frac{\sum \frac{QL_n}{A_n}}{gH_n}$$

$T_a$  er generatorens tidskonstant.

For overslagsberegninger har vi følgende erfaringsformler:

$$\begin{array}{ll} h_w \geq 2,0 & \Rightarrow \frac{T_a}{T_w} \geq 2,5 \\ 1,0 < h_w < 2,0 & \frac{T_a}{T_w} \geq 3,0 \\ 0,7 < h_w < 1,0 & \frac{T_a}{T_w} \geq 3,5 \\ 0,5 < h_w < 0,7 & \frac{T_a}{T_w} \geq 4,0 \\ 0,3 < h_w < 0,5 & \frac{T_a}{T_w} \geq 5,0 \end{array}$$

Dersom spenningsregulatoren er utstyrt med spenning-/frekvens statikk og denne stilles på 2-3 Volt/Hz kan de angitte verdier av forholdet  $\frac{T_a}{T_w}$  minskes. For lange tunneler med trangt tverrsnitt kan også verdiene minskes på grunn av friksjonsdempingen.

### 6.1.1 Lukketiden

Definerer trykkstigning  $\Delta H$ , ved avslag:

$$\frac{\Delta H}{H} + 1 = z \quad (6.1)$$

Finner lukketiden ved lineær reduksjon av  $Q$  over reguleringslaget

1)

$$h_w \leq 1$$

Lukketiden,  $T_L$  (negativ)

$$T_L = T_w \frac{2}{1-z} \quad (6.2)$$

der trykkstigningen

$$z = \frac{H + \Delta H}{H} \quad (6.3)$$

2)

$$h_w > 1$$

$$T_L = T_w \frac{\sqrt{z}}{1-z} \quad (6.4)$$

Åpnetiden,  $T_{\hat{a}}$  (positiv)

$$T_{\hat{a}} = T_w \frac{2\sqrt{z}}{1-z} \quad (\text{merk } z < 1) \quad (6.5)$$

settes tilnærmet lik lukketiden.

### 6.1.2 Tilnærmelser

Vi ønsker å finne den maksimale variasjonen i omløpstallet  $n$ .

Endring i vinkelhastighet:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta M}{J} = \frac{\Delta P}{\omega J} \quad (6.6)$$

der  $\Delta M$  er endring i dreiemoment,  $J$  er treghetsmoment og endring i effekt  $\Delta P = \Delta M \cdot \omega$ . Vi får da:

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta P}{J} \quad (6.7)$$

Dividerer på begge sider med  ${}^*\omega^2$ :

$$\frac{\omega}{{}^*\omega} \frac{d{}^*\omega}{dt} = \frac{\Delta P}{{}^*\omega^2 J} \quad (6.8)$$

Vi har videre at:

$$\frac{\omega}{{}^*\omega} = \frac{n}{{}^*n} \quad (6.9)$$

og får for generatoren svingmassenes akselerasjonstid  $T_a$  (omløpstidskonstanten) ved innsetting for nominelt (fullast) dreiemoment  $M_n = \frac{P_n}{{}^*\omega}$  i ligning (6.6):

$$\int_0^{*}\omega d\omega = \int_0^{T_a} \frac{P_n}{J {}^*\omega} dt \quad (6.10)$$

Integrert gir dette:

$$T_a = \frac{J {}^*\omega^2}{P_n} \quad (6.11)$$

der  $P_n$  er nominell effekt. Vi kan også sette:

$$P_t - P_G = \frac{\Delta P}{P_n} \quad (6.12)$$

der  $P_t$  = turbineffekt og  $P_G$  = generatoreffekt. Ligning (6.11) og (6.12) gir nå:

$$\Delta P = (P_t - P_G) \frac{J \cdot \omega^2}{T_a} \quad (6.13)$$

Setter ligningene (6.13) og (6.9) inn i ligning (6.8) og får:

$$\frac{n}{*n} d\left(\frac{n}{*n}\right) = \frac{(P_t - P_G)}{T_a} dt \quad (6.14)$$

Vi integrerer ligning (6.14) og får:

$$\int_{n_1}^{n_2} \frac{n}{*n} d\left(\frac{n}{*n}\right) = \int_0^{T_L} \frac{(P_t - P_G)}{T_a} dt \quad (6.15)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{n^2 - *n^2}{*n^2} \right) = \frac{F}{T_a} \quad (6.16)$$

hvor:

$$F = \int_0^{T_L} (P_t - P_G) dt \quad (6.17)$$

I figur (6.2) er vist definisjonen av  $P_t$ ,  $P_G$ ,  $T_L$  og  $F$ .  $F$  er ytelsesoverskuddet når vi tar hensyn til at virkningsgraden blir 0 ved et relativt stort pådrag ved det høye omløpstall vi får ved avslag. Overskuddsmomentet fra turbinen blir da 0 ved  $t = (1 - Y)T_L$  i stedet for  $t = T_L$ . Verdien for  $Y$  er avhengig av spesifikt omløpstall på turbinene som angis som funksjon av fallhøyden. Verdier av  $Y$  for Francisturbiner er angitt i figur (6.2) og i tabell i slutten av avsnittet.

Vi har altså at omløpstallsavviket  $\varepsilon = \frac{F}{T_a}$ . Fra figur (6.2) ser vi at:

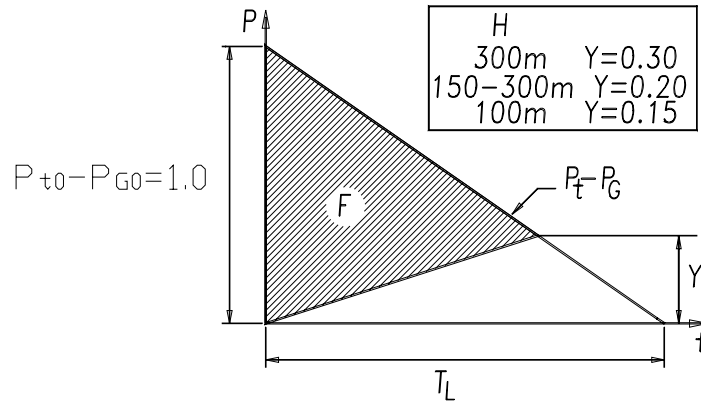
$$\varepsilon = \frac{F}{T_a} = \frac{T_L (1 - Y) (P_t - P_G)}{2T_a} \quad (6.18)$$

Definisjoner:

$$T_a = 0,274 \cdot 10^{-5} \frac{GD^2 n_n^2}{P_n} \quad (6.19)$$

der  $n_n$  er nominelt omløpstall,  $P_n$  er nominell effekt [kW],  $GD^2$  er generator svingmasse i [ $kgm^2$ ].

Har vi den relative trykkstigning  $z$ , så blir omløpstallsavviket:



Figur 6.2:

$$\varepsilon = \frac{F}{T_a} z^{\frac{3}{2}} \quad (6.20)$$

Vi skal så finne hastighetsvariasjonen  $\frac{n-1}{n_n} = \frac{\Delta n}{n}$ . Fra ligning (6.16) får vi:

$$\left(\frac{n}{n_n}\right)^2 - \left(\frac{n_n}{n_n}\right)^2 = \left(\frac{n}{n_n}\right)^2 - 1 = 2\varepsilon \quad (6.21)$$

som gir:

$$\frac{n}{n_n} = \sqrt{1 + 2\varepsilon} \quad (6.22)$$

og

$$\frac{\Delta n}{n_n} = \sqrt{1 + 2\varepsilon} - 1 \quad (6.23)$$

som kan garanteres for turbinen om ikke mere nøyaktige beregninger utføres. En mere nøyaktig beregning gir en litt lavere verdi for Francis turbiner. (De gitte ligninger gjelder ikke for Kaplan turbiner der omløpstallet avhenger av kombinasjonen mellom løpeskovlenes og ledeskovlenes innstilling).

Retningslinjer for å finne  $Y$ :

Pelton turbiner	Formlene brukes ikke når vi har deflektor eller kniv. $\frac{\Delta n}{n} = 16 - 20\%$ garanteres normalt for fullast avslag	
Francis turbiner	Høytrykk, over 300 [m]	$Y = 0,3$
	Mellomtrykk, 150 - 300 [m]	$Y = 0,2$
	Lavtrykk, under 100 [m]	$Y = 0,15$

Kaplan- og rørturbiner er som nevnt ovenfor for kompliserte for enkle beregninger, men  $\frac{\Delta n}{n} = 60\%$  for rørturbiner og 50% for Kaplan er normalt. Dellastavslag tas i prosent av fullast, d.v.s. 1/2 halvpart o.s.v.

# Kapittel 7

## Mekanisk-hydraulisk regulator

Vi skal her se på den prinsipielle oppbyggingen av en mekanisk-hydraulisk regulator beskrevet tidligere i kompendiet. Som eksempel har vi valgt Kværners regulator da det er flest av denne typen i kraftverk rundt om i Norge. Regulatoren er en PI-regulator med statikkinstilling.

### 7.1 Pendelen

Regulatoren kan være utstyrt med sentrifugalpendel drevet med synkronmotor eller rem. Brukes synkronmotor blir denne drevet av en pendelgenerator på toppen av aggregatet og vil følge dennes omløpstall nøyaktig, når en ser bort fra en liten variasjon i etterslepingsvinkelen ved akselerasjoner eller retardasjoner på ca.  $10^\circ$ . Når omløpstallet er så høyt som 1200 - 1500 [omdr./min], vil denne feilen bli neglisjerbar. Ved siden av sentrifugalpendler er også elektriske styrehoder eller elektriske pendler benyttet. Disse blir ofte feilaktig kalt primærregulatorer.

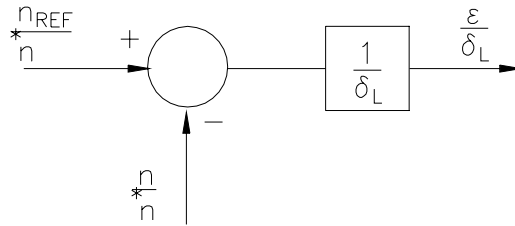
Felles for både sentrifugalpendler og elektriske styrehoder er at en får ut en bevegelse på pendelplaten proporsjonal med variasjonen i omløpstallet. Under beregningene regnes alle størrelser i brøkdeler av maksimal utstyring mot lukking, d.v.s. de verdier vi får ved fullastavslag.

#### 7.1.1 Pendelutslaget

Pendelutslaget  $= \varepsilon/\delta_L$ . Vi definerer følgende:

$\varepsilon = \frac{n_{ref} - n}{*n}$	$n_{ref}$	=	det omløpstallet pendelfjæren er innstilt på
	$*n$	=	normalt omløpstall på turbinen
	$n$	=	det omløpstallet turbinen har i øyeblikket
$\delta = \frac{n_{\hat{a}} - n_u}{*n}$	$\delta$	=	pendelens ujevnhetsgrad/stivhet
	$n_{\hat{a}}$	=	omløpstallet når pendelen når øverste anslag
$\delta_L = \frac{n_{\hat{a}} - *n}{*n}$	$\delta_L$	=	pendelens ujevnhetsgrad/stivhet mot lukking ved avslag
$\delta_{\hat{a}} = \frac{n_u - *n}{*n}$	$\delta_{\hat{a}}$	=	pendelens ujevnhetsgrad/stivhet mot åpning ved påslag
	$n_u$	=	omløpstall når pendelen når nedre anslag

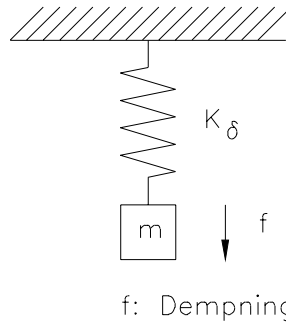
Pendelutslaget kan også settes opp i blokkdiagram som vist i figur (7.1).



Figur 7.1: Blokkdiagram for pendelutslaget.

### 7.1.2 Sentrifugalpendelens dynamiske ligning

Dynamisk kan en pendel betraktes som en masse hengt opp i en fjær, se figur (7.2)



Figur 7.2: Dempet masse/fjærssystem.

Forlengelse av fjæren ut fra likevektspunktet: Kraft på pendelfjær

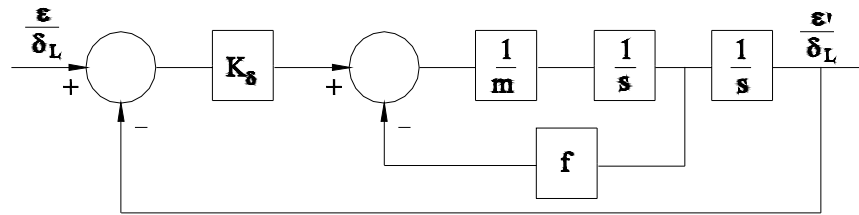
$$P = \left( \frac{\varepsilon_1}{\delta_L} - \frac{\varepsilon_2}{\delta_L} \right) \cdot K_\delta \quad (7.1)$$

der  $K_\delta$  = fjærkonstant for pendelfjær i kg/%. En får følgende ligning for dynamisk likevekt i pendelen ( $f$  er demping):

$$m \frac{d^2 \left( \frac{\varepsilon}{\delta_L} \right)}{dt^2} + f \frac{d \left( \frac{\varepsilon}{\delta_L} \right)}{dt} + K_\delta \frac{\varepsilon}{\delta_L} = 0 \quad (7.2)$$

Settes systemet opp i blokkdiagram der vi bruker Laplace-transformasjon til hjelp ved å løse differensialligningen får vi blokkdiagrammet vist i figur (7.3). Senere skal vi også bruke de Laplace-transformerte ligningene for å bestemme stabilitetskriteriene. Vi trekker sammen blokkdiagrammet og får

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{m}{K_\delta} s^2 + \frac{f}{K_\delta} s + 1} = \frac{K_\delta}{m} \frac{1}{\left[ \left( s + \frac{f}{2m} \right)^2 + \left( \frac{K_\delta}{m} - \frac{f^2}{4m^2} \right) \right]} \quad (7.3)$$



Figur 7.3: Blokkdiagram for pendelens dynamiske ligning.

Dersom vi kjører på en forstyrrelse  $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_1 = \text{konstant}$ , d.v.s. et såkalt sprang, så får vi:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f^2}{4m^2K_\delta}}} e^{-\frac{f}{2m}t} \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{K_\delta}{m} - \frac{f^2}{4m^2}}t + \text{konst.} \right) \right\} \quad (7.4)$$

I pendelen har vi altså en resonansfrekvens med svingetiden

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K_\delta}{m} - \frac{f^2}{4m^2}}} [\text{sek}] \quad (7.5)$$

For Kværners pendel er friksjonen svært liten, slik at vi kan sette  $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_\delta}}$ . En må være oppmerksom på at resonans kan oppstå i systemet, men for Kværners pendel er svingetiden  $T$ , så liten at pendlinger unngås. Liten svingetid oppnås som ligningen viser ved å ha små masser i pendelen og stiv fjær. Dette får vi ved å kjøre med høyt omløpstall. Dermed oppnås også større forstillingskraft.

Forstillingskraften for små variasjoner blir:

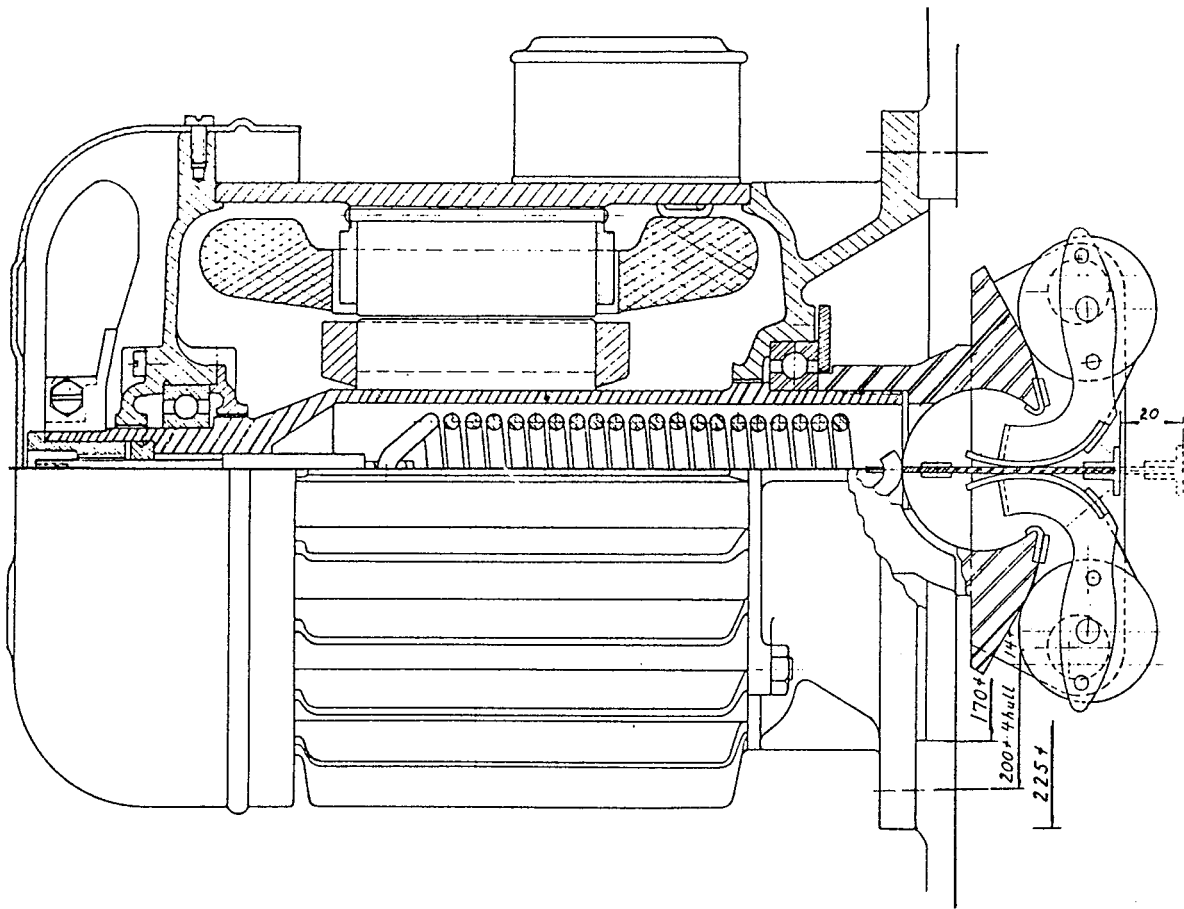
$$P = \text{konst} \cdot \frac{n^2 - *n^2}{*n^2} = \text{konst} \cdot 2 \left( \frac{n - *n}{*n} \right) = \text{konst} \cdot 2\Delta\varepsilon = K_\delta \left( \frac{\varepsilon}{\delta_L} - \frac{\varepsilon}{\delta_L} \right) \quad (7.6)$$

Konstruksjonen er vist i figur (7.4).

## 7.2 Den hydrauliske forstyring, med forstyringsservomotor

Forstyringen er oppbygd som vist i figur (7.5) og er det første element i regulatoren etter pendelen. Følgende komponenter inngår i forstyringen (se figur (7.5)):

- Pendelstempel med munnstykke
- Kompensasjonssleid
- Stempelhus
- Lokk med forstillingsstempel og forstillingsspindel med gjenget hylse for overføring av statikkbevegelse



Figur 7.4: Sentrifugalpendel (Kværner).

### 7.2.1 Proporsjonalvirkningen

Under drift vil munnstykket og pendelstemplet følge pendelplaten på pendelen og kopiere dens bevegelse nøyaktig når en ser bort fra svært hurtige bevegelser, (se senere dynamiske beregninger). Dette oppnås ved at olje med konstant trykk  $= p_0$  passerer en blende før den strømmer inn i stempelhuset på forsiden av pendelstemplet. Herfra strømmer oljen gjennom munnstykket der oljen blir strupet av pendelplaten. På baksiden av pendelstemplet der arealet er dobbelt så stort som arealet av forsiden, står et konstant trykk  $= \frac{1}{3} p_0$ . Dette trykket kommer fra undersiden av forstyringsmotorens stempel som balanserer mot et konstant trykk  $= p_0$  på oversiden. Dette kommer frem ved at stemplets areal på undersiden er 3 ganger større enn på oversiden, se figur (7.6).

Pendelstemplet balanserer nå mellom trykket på forsiden som avhenger av pendelplatens struping av oljestrømmen ut fra munnstykket og konstanttrykket på baksiden. Bli pendelplaten skjøvet mot munnstykket, stiger trykket på forsiden av pendelstemplet og stemplet blir skjøvet over av oljetrykket inntil munnstykket har fjernet seg fra pendelplaten igjen, slik at trykket har sunket på forsiden og likevekten er gjenopprettet.

På denne måten følger pendelstemplet pendelplatens bevegelse. Følgenøyaktigheten er svært god,

da bare et par hundredels millimeter forskyvning av pendelplaten gir ubalanse i trykket foran og bak pendelstemplet.

### 7.2.2 Hovedsleiden med servomotor og tilbakeføring

Forstyringsmotorens utslag overføres til sleiden ved hjelp av reguleringsarmen. Oversetningsforholdet frem til hovedsleiden finnes av figur (7.7).

Oversetningen blir:

$$S_I = Y_L \frac{A_2 a}{A_3 l} \quad (7.7)$$

der:

$$\begin{aligned} Y_L &= \text{Maks. utslag av pendelen og pendelstempelet} \\ S_I &= \text{Utslag på hovedsleiden som tilsvarer maks. utslag} \\ &\quad \text{på pendelen, når en ser bort fra integralvirkningen i forstyringen.} \end{aligned}$$

For Arendal Fossekompani, Bøylefoss har vi:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\pi}{4} (7^2 - 1,4^2) = 36,95 [cm^2] \\ A_3 &= \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 = 19,6 [cm^2] \\ l &= 65 [cm] \\ a &= 45 [cm] \\ Y_L &= 1,5 [cm] \\ &\downarrow \\ S_I &= 1,95 [cm] \end{aligned}$$

#### Definisjon av fullt sleidutslag, $I_\sigma$ av hovedsleiden.

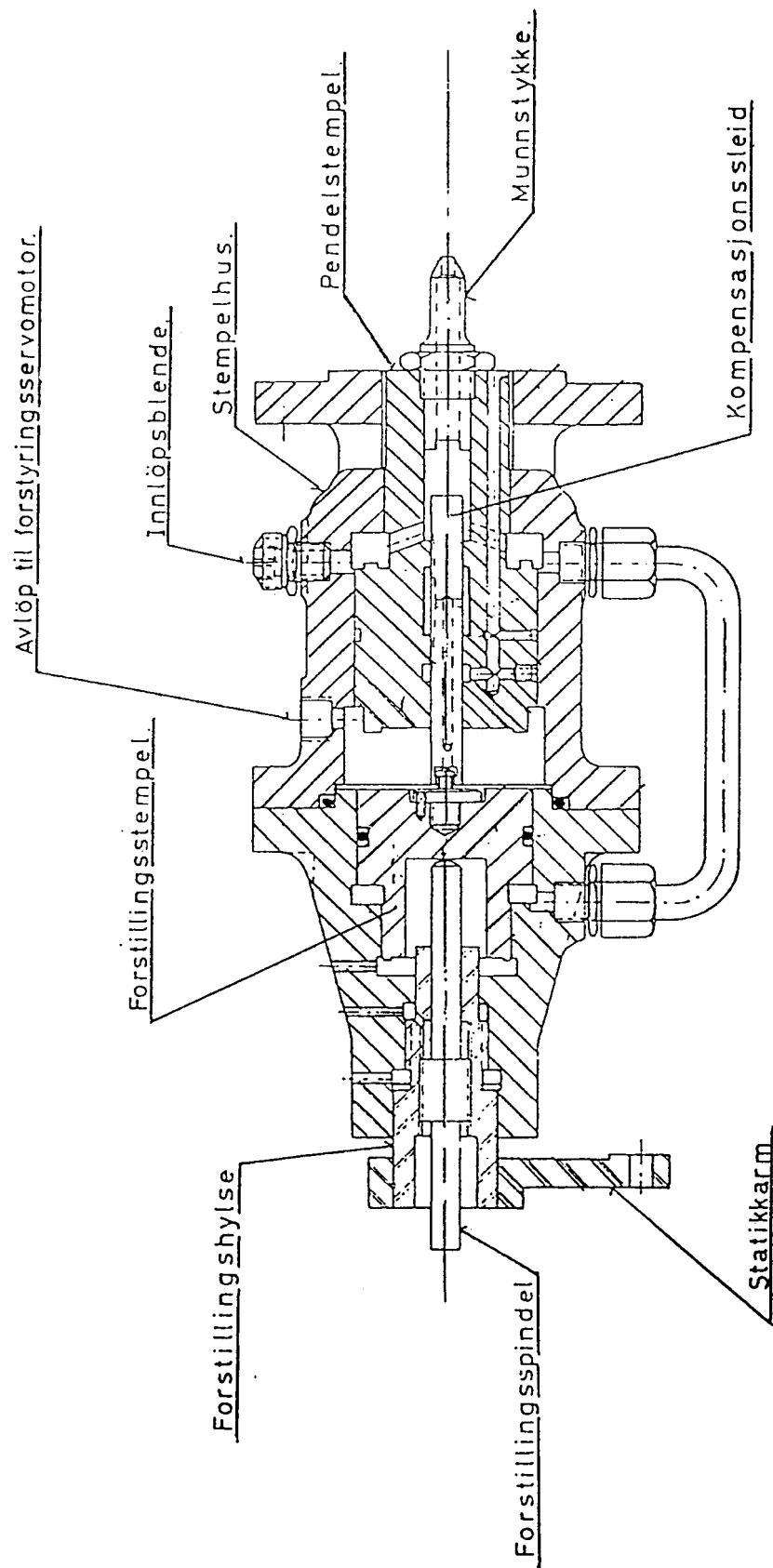
Fullt sleidutslag er det utslag som tilsvarer helt åpent sleidverrsnitt. Settes sleiddiameteren lik  $d$ , får man:

$$\begin{aligned} I_\sigma \pi d &= \frac{1}{4} \pi d^2 \\ I_\sigma &= \frac{d}{4} \end{aligned} \quad (7.8)$$

#### Definisjon av sleidbevegelseskoeffisienten $K_{sb}$

Forholdet mellom det sleidutslaget som tilsvarer fullt pendelutslag, d.v.s.  $S_I$ , og fullt sleidutslag  $I_\sigma$  kalles sleidbevegelseskoeffisienten.

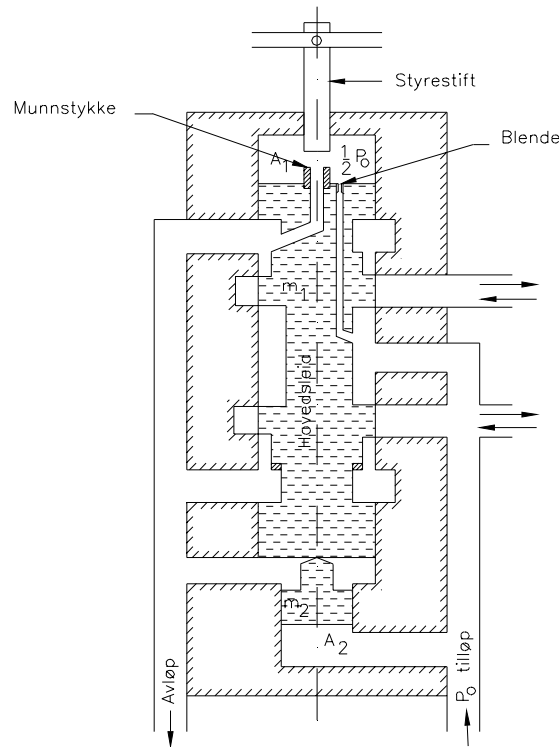
$$K_{sb} = \frac{S_I}{I_\sigma} \quad (7.9)$$



Figur 7.5: Hydraulisk forstyring med PI-funksjon.







Figur 7.8: Hovedsleid med pilotforsterker i form av plate-blende-system (se styrestift, munnstykke og blende i figur 7.5).

$y$  = bevegelsen av hovedsleiden i [cm].

Transferfunksjonen kan skrives:

$$\sigma = \sigma_{st} = \frac{1}{(1 + T'_{st}s)(1 + T''_{st}s)} \quad (7.13)$$

Tidskonstantene i dette systemet vil bli svært små og av samme størrelsesorden som for forstyringen når vi dimensjonerer innløpsblende og munnstykke slik at  $\frac{Ms^2}{A_1 \left| \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right|}$  og  $\frac{D + \left| \frac{\partial p}{\partial Q_m} \right| A_1^2 s}{A_1 \left| \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right|}$  blir av omtrent samme størrelse som forstyringen. Den dynamiske betraktning av hovedsleiden har som for forstyringen bare interesse når det gjelder å få frem vibrasjoner fra pendlet til hovedsleiden, og vi kan derfor regne med at sleiden kopierer styrestiftens bevegelser nøyaktig, d.v.s.:

$$\sigma = \sigma_{st}$$

Disse bevegelser regnes i % av fullt utslag. (se forrige og neste side).

$X$  = relativbevegelse mellom styrestift og munnstykke jfr. beregning av hydraulisk forstyring.

Denne regnes i [cm].

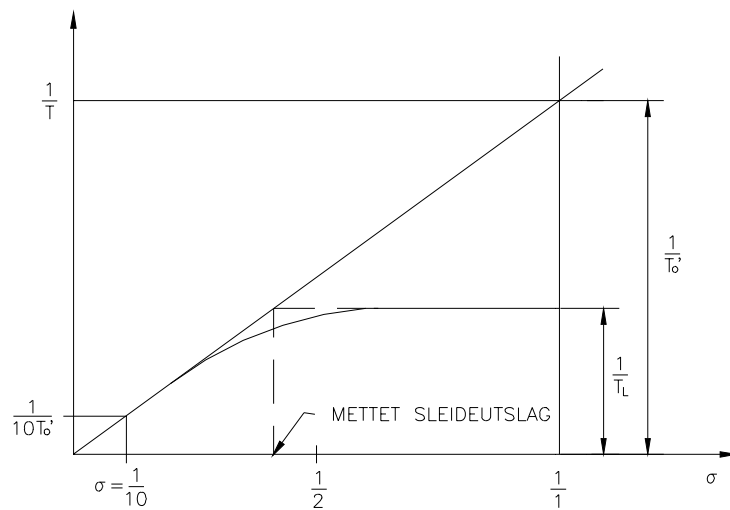
**Bestemmelse av hastigheten eller lukketiden på hovedservomotoren som funksjon av utstyringen av hovedsleiden.**

Hastigheten av servomotoren regnes som den inverse verdi av åpnings- eller lukketiden for et fullt servomotorslag (d.v.s. fra full belastning av aggregatet til tomgang eller omvendt) og benevnes med  $\frac{1}{T}$  ( $\text{sek}^{-1}$ ) eller brøkdeler av fullt slag pr. sek.

$\frac{1}{T}$  kan settes opp som funksjon av sleidutslaget  $\sigma$  (d.v.s. brøkdeler av fullt sleidutslag). Ved små sleidutslag vil hastigheten  $\frac{1}{T}$  bli proporsjonal med sleidutslaget fordi så å si hele strupingen av oljestrømmen, fra trykkakkumulatoren til hovedservomotoren og fra servomotoren til avløp, foregår over sleidutslaget. Hastigheten av servomotoren,  $\frac{1}{T}$ , blir uavhengig av sleidåpningen fordi strupingen over dekningskantene vil bli liten i forhold til den strupingen vi har i ringrommet mellom sleidstammen og sleidhuset der oljestrømmen fra servomotoren til avløpet blir strupet. Vi vil på denne måten fra et bestemt sleidutslag oppnå en maksimal hastighet mot lukking og åpning. Dette sleidutslaget kalles mettet sleidutslag.

Den maksimale lukke- og åpnehastigheten kan bestemmes ved å velge passende diametre på sleidstammen mot avløpet på henholdsvis lukke- og åpningssiden av pådraget. Det er de små sleidutslag der servomotorhastigheten er proporsjonal med sleidutslaget som spiller noen rolle for stabiliteten av regulatoren.

Det relative sleidutslag  $\sigma$  er definert som sleidutslaget i brøkdeler av fullt sleidutslag  $I_\sigma$ . Se figur (7.9).



Figur 7.9: Sleidutslag

Lukkehastigheten  $\frac{1}{T_0}$  er den lukkehastigheten vi ville fått om hastigheten hadde vært proporsjonal med sleidutslaget helt opp til  $\sigma = 1/1$ . (Lukkehastigheten  $\frac{1}{T_L}$  er den hastighet vi har ved mettet sleidutslag).

$\frac{1}{T_0}$  er avhengig av oljetrykket  $p_0$  som regulatoren arbeider med, sleiddiameteren og servomotorvolumet.

**Beregning av  $T_0'$ .** Oljehastigheten gjennom det fulle sleidtværssnitt ved små sleidutslag blir for sleiden: (se G. Sundby forelesning)

$$p_0 = (\zeta_1 + 2\zeta_s) \frac{C^n}{2g} \quad (7.14)$$

$2\zeta_s$  kommer av dobbeltvirkende sleid.

$\zeta_1$  = tapskoeffisienten i oljerørene

$\zeta_s$  = tapskoeffisienten i sleid

For olje kan en sette  $n = 1,8$ .

Med et sleidutslag på  $\sigma = \frac{1}{10}$ ,  $\zeta_1 = 0$ ,  $\zeta_s = 226$  og  $p_0 = 150$  [kg/cm<sup>2</sup>] fåes oljehastigheten i sleidhuset der åpningen = full sleidåpning:

$$C = 1,8 \sqrt{\frac{2gp_0}{2 \cdot 226}} = 1,8 \sqrt{\frac{9,81 \cdot 150}{226}} = 2,85 \text{ [m/sek]} \quad (7.15)$$

Oljehastigheten over dekningskantene i sleiden blir:

$$C_{0,1} = 10 \cdot 2,85 = 28,5 \text{ [m/sek]}$$

Lukketiden med  $\sigma = \frac{1}{10}$  blir  $10 \cdot T'_0$  dersom en regner lukketiden proporsjonal med sleidutslaget

$$10 \cdot T'_0 = \frac{V}{\frac{1}{10} I_\sigma \pi d C_{0,1}} \quad (7.16)$$

Her er  $V$  slagvolumet på servomotoren ved et slag fra fullast til tomgang på aggregatet.

$T'_0$  er den lukketiden vi får ved en løftehøyde på sleiden =  $I_\sigma$  dersom lukkehastigheten er proporsjonal med sleidutslaget. (se fig 7.9.)

$T_0$  er lukkehastigheten ved et sleidutslag som tilsvarer fullt pendelutslag mot lukking =  $S_I$  når vi bare regner med proporsjonalvirkningen i forstyringen og ser bort fra integralvirkningen.

Vi får følgende uttrykk for  $T_0$  :

$$T_0 = \frac{V}{S_I d C_{0,1}} = \frac{1}{K_{sb}} \cdot \frac{V}{I_\sigma d C_{0,1}} \quad (7.17)$$

$$T_0 = \frac{T'_0}{K_{sb}} \quad (7.18)$$

**Beregningseksempel.** For Arendal Fossekompani får vi følgende verdier for  $T_0$  :

$$V = 50 \text{ [dm}^3\text{]}$$

$$d = 0,65 \text{ [dm]}$$

$$I_\sigma = \frac{d}{4} = 0,1625 \text{ [dm]}$$

$$S_I = 0,195 \text{ [dm]}$$

$$C_{0,1} = 285 \text{ [dm/sek]}$$

Dette gir:

$$T'_0 = 0,53 \text{ [sek]}$$

$$K_{sb} = \frac{S_I}{I_\sigma} = 1,2$$

$$T_0 = \frac{T'_0}{K_{sb}} = 0,44 \text{ [sek]}$$

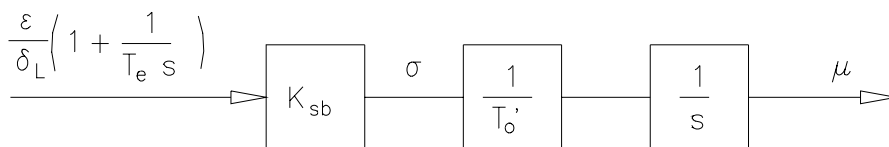
Servomotorslaget blir regnet i brøkdeler av fullt servomotorslag og har fått betegnelsen  $\mu$ . Vi får da:

$$\sigma \frac{1}{T_0'} = \frac{d\mu}{dt} \quad (7.19)$$

eller:

$$\mu = \frac{1}{T_0'} \int_0^t \sigma dt \quad (7.20)$$

En sleid med en servomotor blir altså et såkalt integrerende element (se beskrivelsen av forstyringen). Transformerer ligningen og kan sette opp blokkdiagrammet i figur (7.10).



Figur 7.10: Blokkdiagram for sleidbevegelsen fra en PI-regulator vist i figur 7.5.

## Tillegg A

# Stabilitetsberegninger - trykkregulering av pumper

Pumperegulering skjer ved å variere omløpstallet ved at en PID regulator øker motoreffekten. Et forenklet blokkdiagram kan settes opp om en antar at motoreffekten er proporsjonal med regulatorens utstyring. Her er

$$h_{ref} = \frac{H_{ref}}{H_o} \quad (\text{A.1})$$

og

$$h = \frac{H_{ref} + \Delta H}{H_o} \quad (\text{A.2})$$

Innvirkningen fra pumpekararakteristikken er illustrert i figur (A.1).

Og vi får blokkdiagrammet i figur (A.2).

I blokkdiagrammet er:

$$\Phi = 2h_w \frac{z}{s} \tanh\left(\frac{L}{a}z\right) \quad (\text{A.3})$$

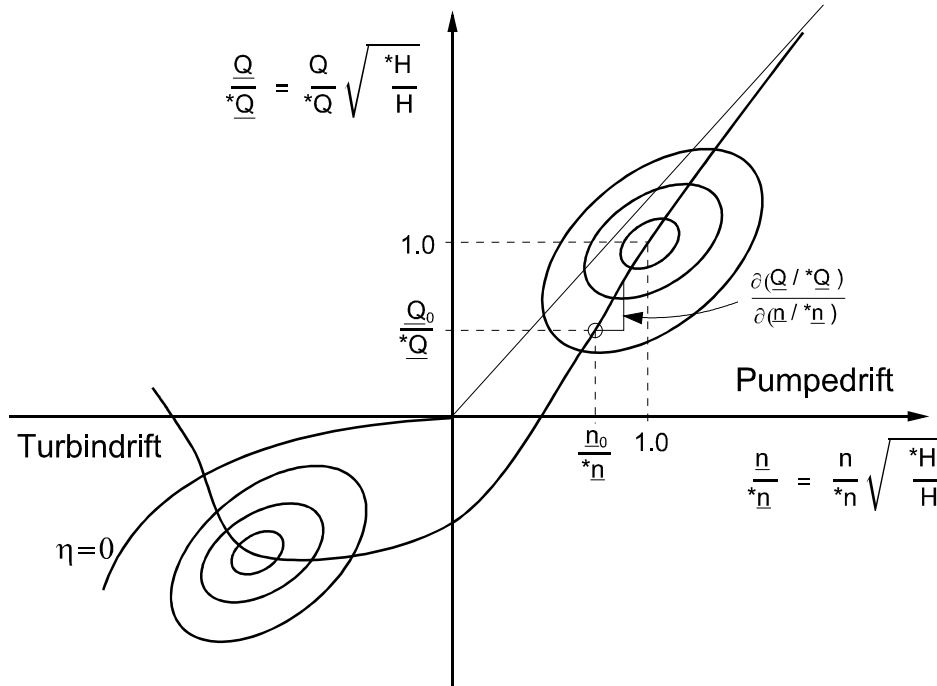
$$z = \sqrt{s^2 + ks} \quad (\text{A.4})$$

$Q_n$  er konstant og viser vannføringsøkning som funksjon av omløpstall. Diagrammet viser såkalte reduserte relative verdier  $\frac{n}{*n}$  og  $\frac{Q}{*Q}$ . I figur (A.2) er  $\phi = 2h_w \tanh j\left(\frac{L}{a}\omega\right)$  der vannføringen er positiv inn i røret og stigende trykk er positivt slik det er definert ved utvikling av karakteristikkmetoden. Forenkler blokkdiagrammet, og får blokkdiagrammet i figur (A.3) forenklet til figur (A.6).

Pumpe og rørfunksjonen kan forenkles slik:

$$\frac{\frac{\Phi Q_n}{1 + \frac{1}{2}\Phi}}{1 + \frac{\frac{1}{2}\Phi Q_n}{1 + \frac{1}{2}\Phi}} = \frac{\Phi Q_n}{1 + \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2}\Phi Q_n} = \frac{\Phi Q_n}{1 + \frac{1}{2}\Phi(1 + Q_n)} \quad (\text{A.5})$$

Blokkdiagrammet kan da skrives på formen i figur (A.4).



Figur A.1: Pumpekarakteristikk i 4 kvadranter.

Ordner blokkdiagrammet slik at vi får trykkresponseren  $\frac{h}{h_{ref}}$  som gir oss avviket  $h = H_{ref} + \frac{\Delta H}{H_0}$  i forhold til innstilt trykk  $h_{ref} = \frac{H_{ref}}{H_0}$ .

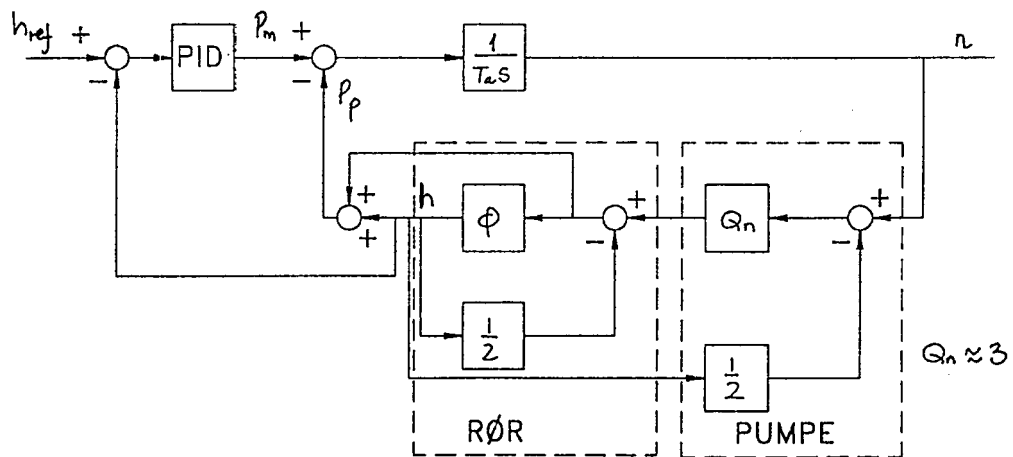
Vi husker at:

$$\Phi = 2h_w \frac{z}{s} \tanh\left(\frac{L}{a}z\right) \quad (\text{A.6})$$

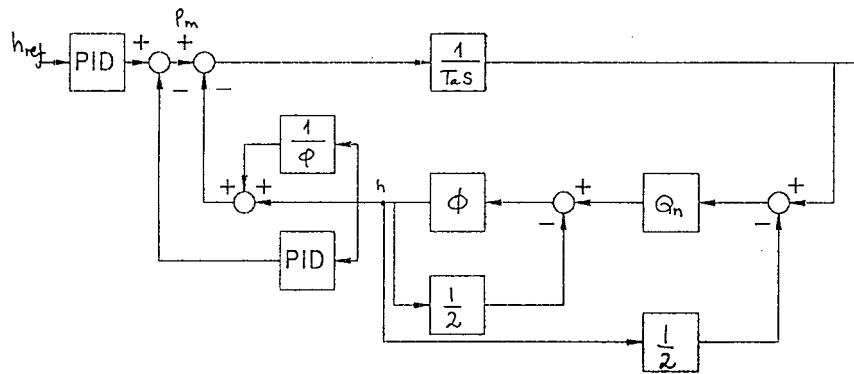
$$\text{hvor } z = \sqrt{s^2 + ks}$$

For korte rør uten friksjon, d.v.s.  $z = s$ , har vi  $\Phi = T_w s$ . Vi får da for korte rør et forenklet andre ordens system

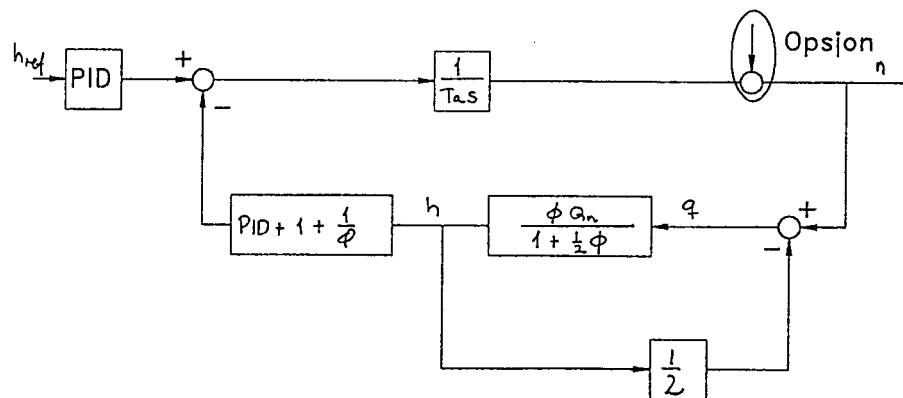
$$\frac{h}{h_{ref}} = \frac{PID \cdot Q_n T_w s}{\frac{1}{2}(1 + Q_n) T_a T_w s^2 + [Q_n (PID + 1) T_w + T_a] s + Q_n} \quad (\text{A.7})$$



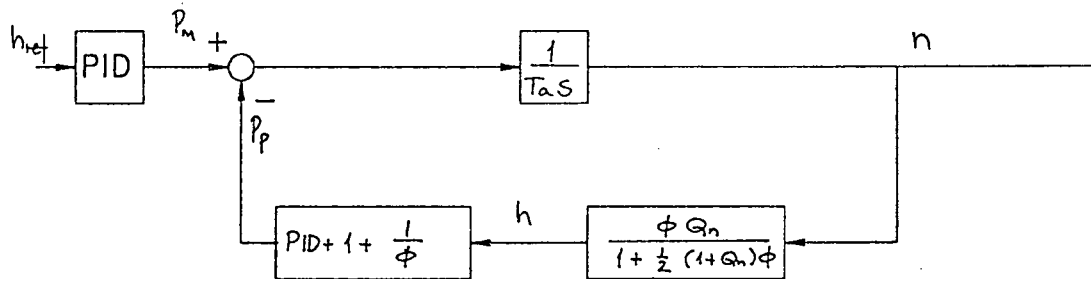
Figur A.2:



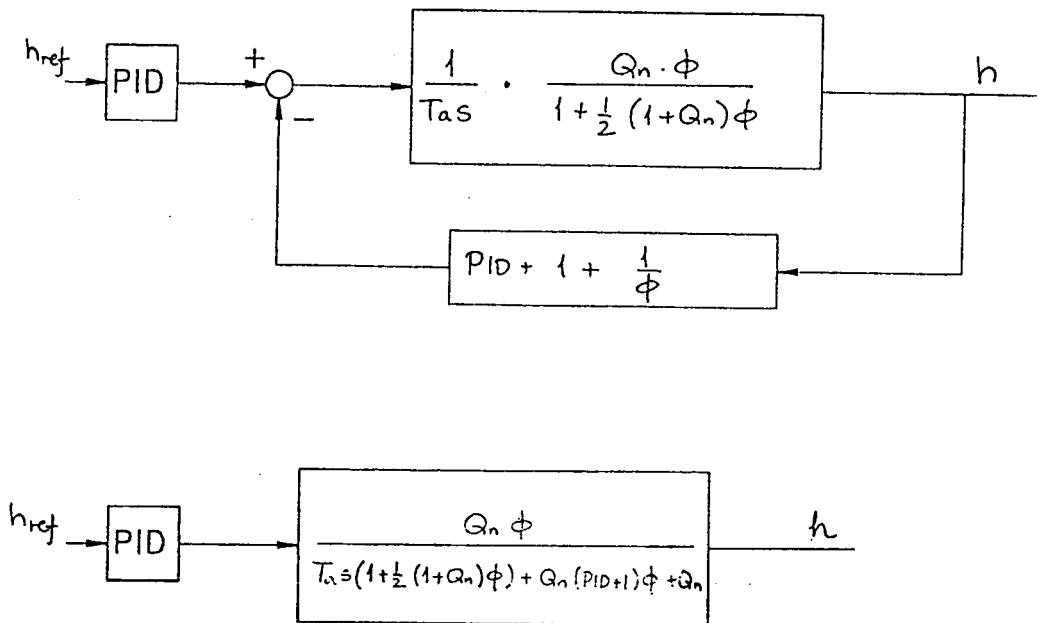
Figur A.3:



Figur A.4:



Figur A.5:



Figur A.6:

## Tillegg B

# Svingesjakt

Vi har følgende symboler for systemet beskrevet i dette avsnittet:

$F$  = Overflateareal av vannspeilet i svingesjakten

$f$  = Tverrsnitt tunnel

$L$  = Lengde tunnel

$k$  =  $\frac{\lambda L |Q|}{d F^2 2g}$

$\lambda$  = falltapakoeffisient, Prandtl konst.

$d$  = diameter sirkulært tverrsnitt

$\frac{Q}{f}$  =  $c$  (Strømningshastighet)

NB:

$\frac{\lambda}{d}$  =  $\frac{f_d}{R_h}$

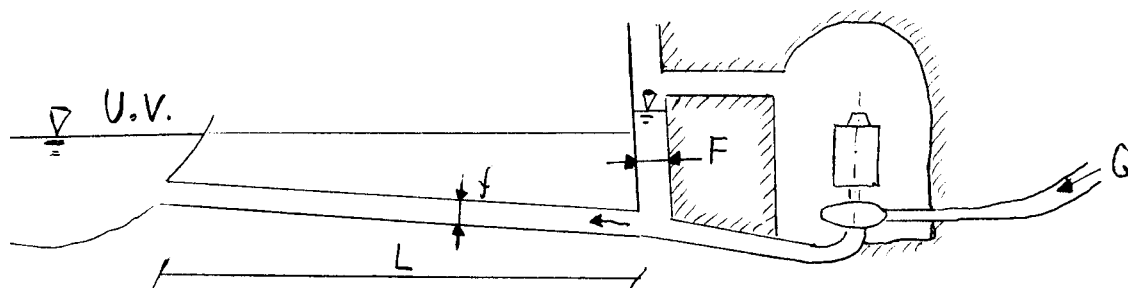
$f_d$  = Darcy-Weissbach's konstant

$R_h$  = hydraulisk radius

$\rho$  = tetthet [ $kg/m^3$ ]

$\Delta Q$  = forandring i vannføring.

Vi har følgende turbin med avløpstunnel og svingesjakt:

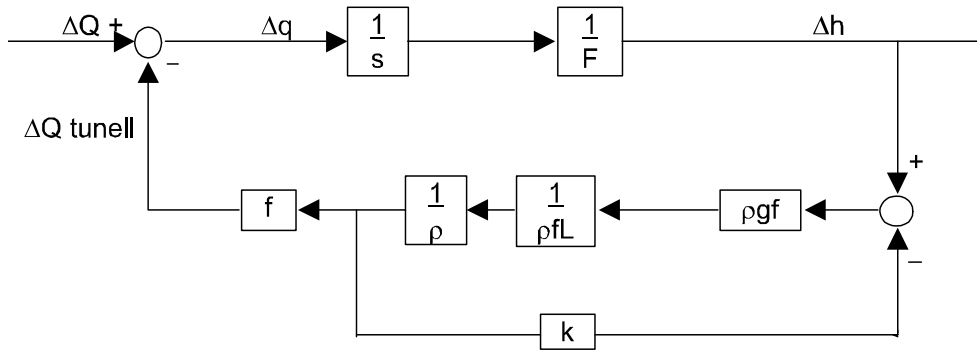


Figur B.1: Avløpstunell med svingesjakt i et kraftverk.

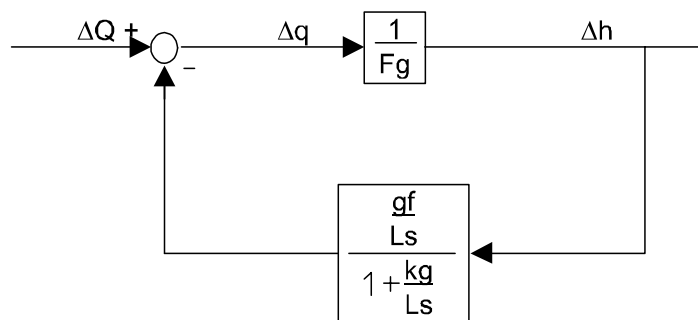
Systemet vist i figur (B.1) kan beskrives med følgende blokkdiagram:

Redusering av blokkdiagrammet i figur (B.2) gir nytt blokkdiagram i figur (B.3):

Fra blokkdiagrammet får vi:



Figur B.2: Blokkdiagram for fig. B.1.



Figur B.3: Forenklet blokkdiagram.

$$\frac{\Delta h}{\Delta Q} = \frac{1}{F} \frac{s + \frac{k}{L}g}{\left(s^2 + \frac{k}{L}g \cdot s + \frac{fg}{LF}\right)}$$

Innfører:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{gk}{2L} \\ \beta &= \sqrt{\frac{fg}{FL} - \left(\frac{gk}{2L}\right)^2} \\ \beta_o &= \alpha^2 + \beta^2 = \frac{fg}{FL} \\ a_o &= 2\alpha = \frac{gk}{L} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta Q} = \frac{1}{F} \frac{s + a_o}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Setter på et sprang (dividerer med s):

$$\frac{\Delta h}{\Delta Q} = \frac{1}{F} \frac{s + a_o}{s \left[ (s + \alpha)^2 + \beta^2 \right]} \quad (\text{B.1})$$

I tidsplanet:

$$\frac{\Delta h}{\Delta Q} = \frac{1}{F} \left( \frac{a_o}{\beta_o^2} + \frac{1}{\beta \cdot \beta_o} \sqrt{(a_o - \alpha)^2 + \beta^2} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \Psi) \right) \quad (\text{B.2})$$

Settes  $\Psi = 0$ ,  $a_o = 2\alpha$

$$\frac{\Delta h}{\Delta Q} = \frac{1}{F} \left( \frac{2\alpha}{\beta_o^2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta \cdot \beta_o} \cdot e^{-\alpha t} \sin \beta t \right) = \frac{1}{F} \left( \frac{2\alpha}{\beta_o^2} + \frac{1}{\beta \cdot \sqrt{\beta_o}} \cdot e^{-\alpha t} \sin \beta t \right) \quad (\text{B.3})$$

Innsatt for  $\alpha$  og  $\beta$

$$\frac{\Delta h}{\Delta Q} = \frac{1}{F} \left( \frac{2 \frac{gk}{2L}}{\left(\frac{fg}{FL}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{fg}{FL} - \left(\frac{gk}{2L}\right)^2}} \cdot e^{-\frac{gk}{2L}t} \sin \left( \sqrt{\frac{fg}{FL} - \left(\frac{gk}{2L}\right)^2} t \right) \right) \quad (\text{B.4})$$

$k = 0 \Leftrightarrow$  tilnærmet for første oppsving (ugunstig beregnet særlig for kort tunnel).

$$\frac{\Delta h}{\Delta Q} = \sqrt{\frac{L}{fFg}} \sin \left( \sqrt{\frac{fg}{FL}} t \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta Q} = \sqrt{\frac{L}{fFg}} \sin \left( \sqrt{\frac{fg}{FL}} t \right) \quad (\text{B.6})$$

For

$$\begin{aligned} F &= 25 [m^2] \\ f &= 25 [m^2] \\ \Delta Q &= 39 [m^3/s] \\ L &= 100 [m] \end{aligned}$$

$$\Delta c = \frac{\Delta Q}{f} = \frac{39}{25} = \underline{1,56} [m/s]$$

$$\Delta h_{max} = 1,56 [m/s] \sqrt{\frac{100}{9,81}} [s] = \underline{5} [m]$$

Svingetiden ( $T$ ) finnes ved hjelp av ligning (B.5)

$$\begin{aligned} T \sqrt{\frac{fg}{FL}} &= 2\pi \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{fL}{Fg}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{100}{9,81}} = \underline{20,1} [s] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dersom  $F = 8 [m^2]$

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot 1,8 = \underline{11,3} [s] \\ \Delta h_{max} &= 39 \sqrt{\frac{100}{25 \cdot 8 \cdot 9,81}} = \underline{8,8} [m] \end{aligned}$$



## Tillegg C

# Dynamiske sleidkarakteristikker

Dersom en sleidventil blir utstyrt vil tilførselstrykket akselerere oljen til en hastighet  $c$  og en oljestrøm  $Q$  ut i oljerørene som er forbundet med servomotoren. Oljestrømmen vil bevege stempelet med en hastighet  $V$ . Den kraften stempelet drives med vil bli minkende med økende oljestrøm og stemplehastighet på grunn av strømmingstap i selve sleidventilen og rørene. Dette gjør at vi får størst kraft på stempelet ved stempelhastighet = 0 og stempelkraft = 0 ved maksimal stempelhastighet.

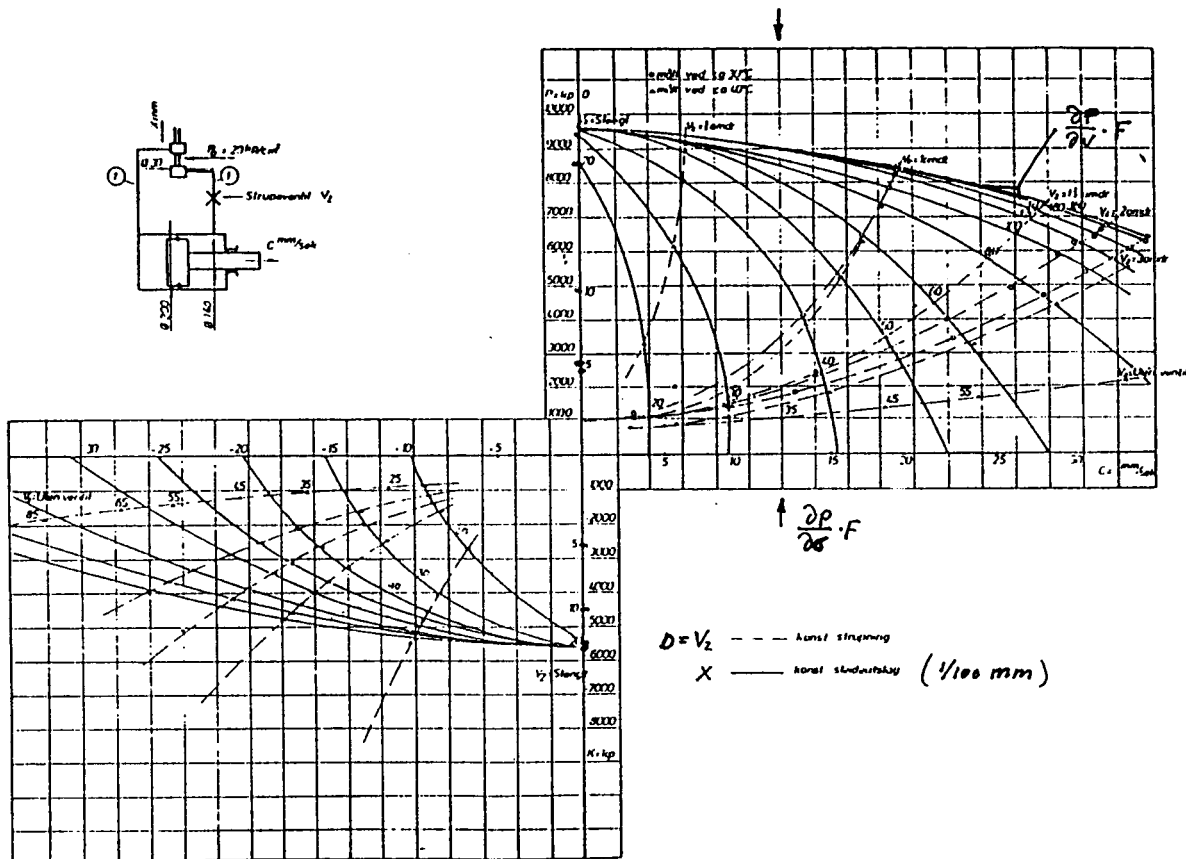
Et eksempel på en dynamisk sleidkarakteristikk er vist i figur (C.1) som er målt ved Kværner.

På grunnlag av den dynamiske sleidkarakteristikken kan en sette opp et blokkdiagram for de dynamiske ligninger for sleid- servomotor systemet. Den dynamiske karakteristikken er vist i figur (C.2).

En skal merke seg at massen  $M$  i systemet består både av stempel og reguleringsring for turbin-regulering og ikke minst av oljen i rørene hvor hastigheten er størst. Dersom stempelareal  $A_s$  og rørtverrsnitt  $A_R$  legges til grunn får vi:

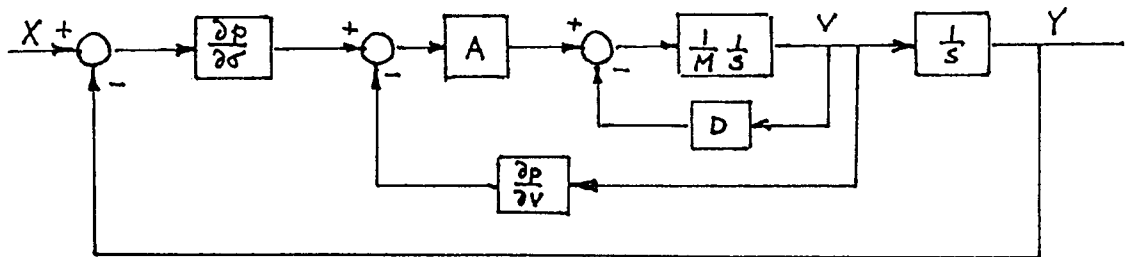
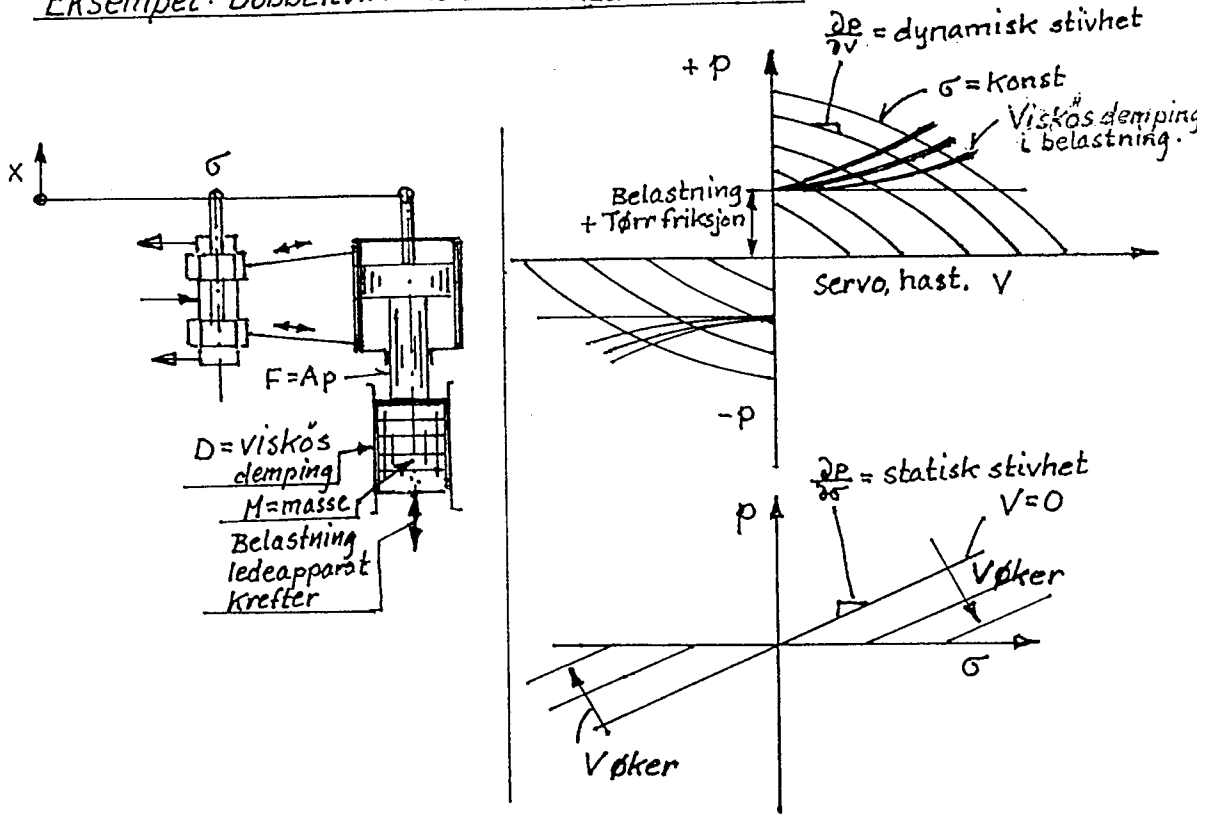
$$M = M_{stempel} + olje \ i \ servo \cdot A_s + olje \ i \ rr \left( \frac{A_s}{A_R} \right)^2 + reguleringsring$$

Ofte vil vi finne at massen av oljen i rørene gir det største bidraget dersom oljerørene har for små tverrsnitt. Den dynamiske analysen viser at servomotor systemet egentlig er et annen ordens system med to tidskonstanter og ikke et første ordens system med en tidskonstant, som oftest blir brukt. Det må likevel tilføyes at oftest vil det være nok å ta i betraktning den største tidskonstanten og regne systemet forenklet med en tidskonstant. En annen viktig vurdering som må tas i betraktning er at servomotoren har tilstrekkelig overskuddskraft slik at lukkehastighetene ikke blir begrenset pga. at oljetrykket ikke har overskudd nok til å oppnå en tilstrekkelig liten tidskonstant. Dette er illustrert i neste avsnitt der den nødvendige servomotorkraft er vist i forhold til de hydrauliske krefter og friksjonskrefter fra ledeskovlene.



Figur C.1: Sleidkarakteristikk for en dobbeltvirkende sleid.

Eksempel: Dobbeltvirkende sleid med servomotor.



$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{\frac{M}{A} \frac{\partial p}{\partial \sigma} s^2 + \frac{D + \frac{\partial p}{\partial \sigma} A}{A \frac{\partial p}{\partial \sigma}} s + 1} = \frac{\frac{A}{M} \left( \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial \sigma}} \right)}{s^2 + \frac{D + \frac{\partial p}{\partial \sigma} A}{M} s + \frac{A}{M \frac{\partial p}{\partial \sigma}}}$$

Figur C.2: Dynamisk karakteristikk med blokkdiagram for et servomotor system med styreventil. Med belastning, masse og friksjonsdemping.



## Tillegg D

# Dimensjonering av servomotorer for Francisturbinregulering

### D.1 Bestemmelse av nødvendig overskytende trykk for regulerings hastigheten

Stabilitetsberegning gjennomføres uten å ta hensyn til tidskonstantene for lukketid og åpnetid av hovedseid/servomotor for 1/4, 1/2 og 1/1 last som reduseres fordi servomotoren må overvinne hydrauliske krefter og friksjonskrefter i reguleringsring og ledeskovler.

Fra Bode Nyquist diagrammet finnes den størrelsen av  $\frac{K}{T_o}$  som er nødvendig uten at man mister mer enn  $10^\circ$  av fasemarginen. Som retningslinje kan man sette opp følgende forutsetning:

$$\frac{T_o}{K} \geq 0,2T_w, \text{ når } h_w > 1,0 \quad (\text{D.1})$$

Her er  $K$  tilbakeføringskoeffisienten og  $T_o$  tidskonstanten for hovedsleiden.

#### D.1.1 Bestemmelse av nødvendig drivende trykk ved statisk betraktning

(etter professor Sundbys forelesninger, NTH 1940)

$$P_o = (\zeta_l + 2\zeta_s) \frac{c^n}{2g}$$

$P_o$  = det drivende oljetrykk

$\zeta_s$  = tapskoeffisient i sleid

$\zeta_l$  = tapskoeffisient i oljerør

$c$  = oljehastighet man ville fått gjennom sleidens fulle tverrsnitt når sleiden er utstyrt 1/10 av fullt sleideutslag.

$V$  = servomotor volum ved et fullt stempel slag

Etter forsøk er  $\zeta_s$  og  $n$  bestemt empirisk.

$$\zeta_l = 0, \zeta_s = 226 \text{ og } n = 1,8$$

$$P_o = (0 + 2 \cdot 226) \frac{c^{1,8}}{2 \cdot 9,81} \quad (\text{D.2})$$

Finner nå den ønskede verdi for  $c$ .

$$T_o' = k_{sb}T_o$$

der  $T_o$  er bestemt fra Nyquist diagram, se over.

- $K$  = Tilbakeføringskonstanten for hovedsleiden
- $K_{sb}$  = Oversetningsforholdet, dvs. det sleideutslaget som tilsvarer forstyringsservoens maksimale proporsjonalutslag dividert med  $\frac{d}{4}$  ( $d$  = sleiddiameteren)

Servomotorvolum velges ut fra betraktning over nødvendige reguleringskrefter for eksempel i lukket stilling.

Sleidediameter velges: ( $V$  = oljevolum i et 100% servomotorstempel slag [ $m^3$ ],  $T_o$  = tidskonstant [ $s$ ])

$c$  bestemmes på følgende måte:

Hastigheten over strupekant på sleid:

$$c_{0,1} = \frac{T_o \frac{\pi}{4} d^2}{V} \quad (D.3)$$

Hastigheten i fullt åpen sleidåpning:

$$c = 0,1c_{0,1} \quad (D.4)$$

$c$  settes inn i ligning (D.2) og  $P_o$  er funnet for  $= 1/4, 1/2$  og  $1/1$  belastning.

Bestemmelse av tilgjengelig servomotor kraft under åpning over tomgang med krav om stabil omløpstallsregulering (gjelder turbiner uten sikkerhetsventil). For å oppnå stabil regulering må lukkehastigheten ( $= \frac{K}{T_o}$ ) være stor nok til at vi ikke mister mer enn  $10^\circ$  fasevinkel, d.v.s. økende  $\frac{K}{T_o}$  for økende pådrag.

### D.1.2 For dobbeltvirkende servomotor

$$\begin{aligned} \text{Åpne kraft} &= K_{\text{statisk}} - K_{\text{reg.}} = F_{pne} (P_{o,tot} - P_o) \\ \text{Lukke kraft} &= K_{\text{statisk}} - K_{\text{reg.}} = F_{lukke} (P_{o,tot} - P_o) \end{aligned}$$

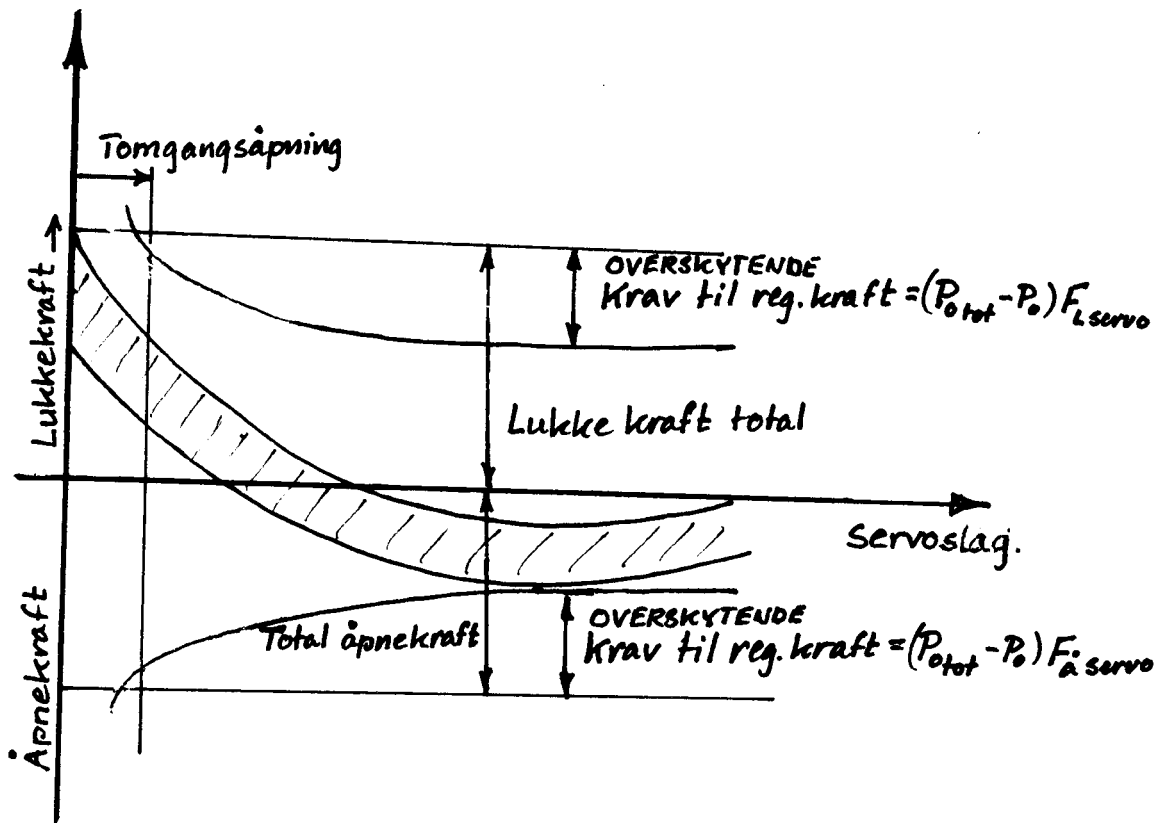
$P_{o,tot}$  er maksimalt trykk man statisk kan få over stempelet når akkumulatoren har sitt fulle driftstrykk.  $P_o$  er det nødvendige overskytende reguleringsstrykk som er beregnet over.

### D.1.3 For enkeltvirkende servomotor

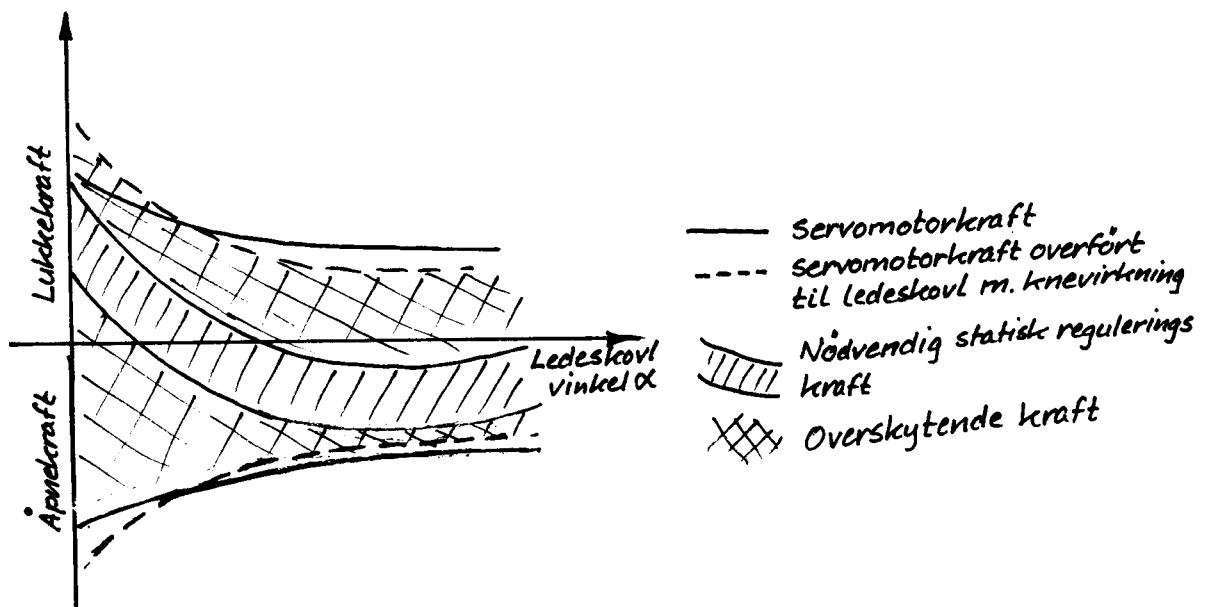
$$\begin{aligned} \text{Åpnekraft} &= K_{\text{statisk}} - K_{\text{reg.}} = F(P_{tot} - P_o) \\ \text{Lukkekraft} &= K_{\text{statisk}} - K_{\text{reg.}} = (F_l - F)(P_{tot} - P_o) \end{aligned}$$

De reguleringskreftene som blir disponible for å bevege ledeskovlene fremkommer når man tar hensyn til knevirkningen i systemet av lenker, tapper og reguleringsarmer. Det endelige fremkomne diagram over tilgjengelig reguleringsarbeid må da over hele staget overskride de hydrauliske krefter fra ledeskovlene og friksjonen i mekanismen. Dette er illustrert i figur (D.2).

Man må søke å legge reguleringsdiagrammet ved hjelp av knevirkning og tapp-plassering slik at man alltid har god margin med hensyn til reguleringskreftene og stabilitetskravene.



Figur D.1: Illustrasjon av nødvendig servomotorkraft for å få tilstrekkelig servomotorhastighet for stabil regulering.



Figur D.2: Hydraulisk kraft og friksjonskraft fra ledeskovler sammenliknet med servomotorkraft med knevirkning fra lenker og armer.



## Tillegg E

# Innvirkning fra turbinkarakteristikk og omløpstall på trykkstøt i rørledningen

Dersom en generator plutselig frakoples belastningen, vil omløpstallet stige og regulatoren vil som følge av dette starte lukkebevegelsen. Vi vil studere hva som skjer i det første tidsintervallet  $\Delta t$ .

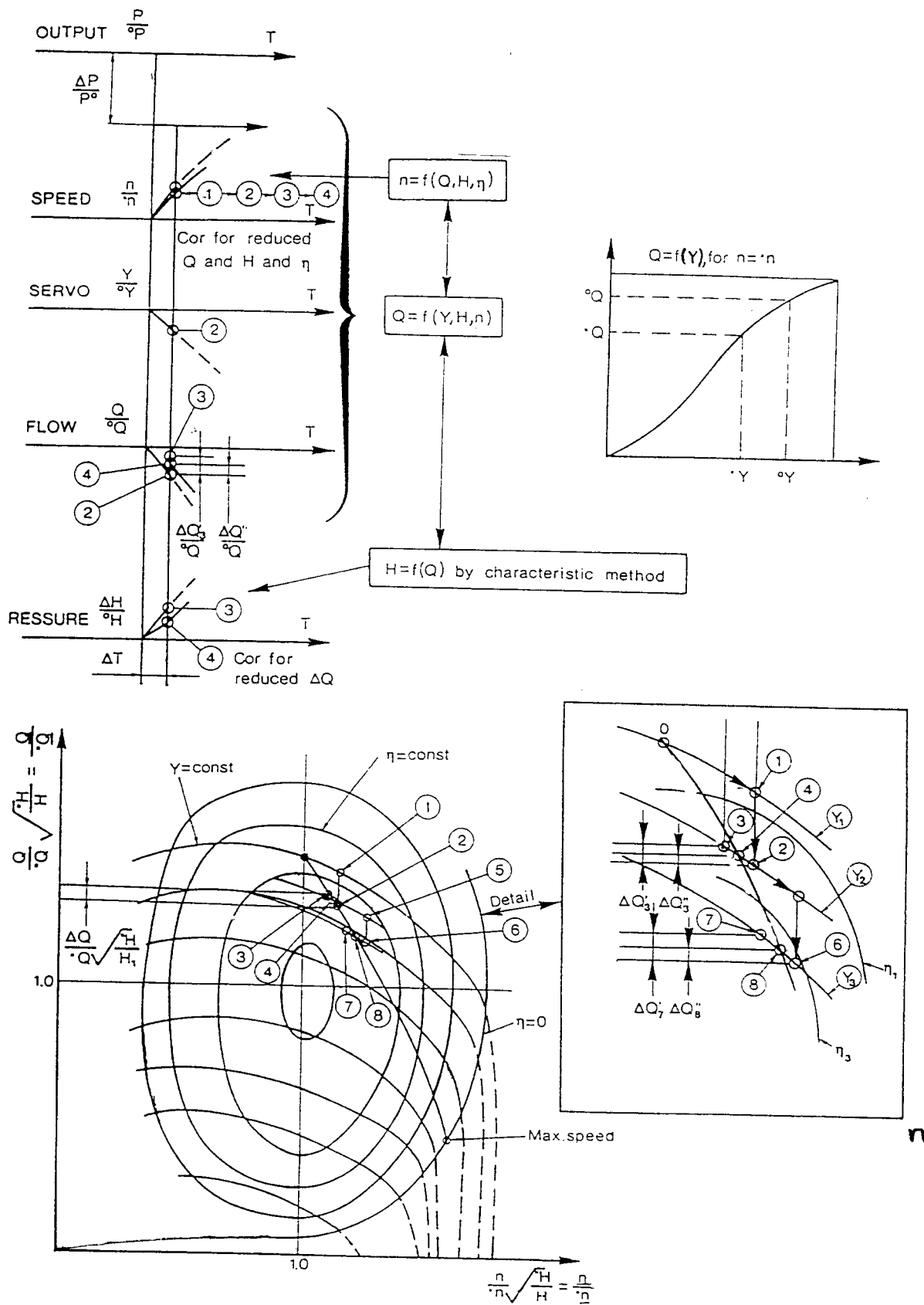
På grunn av økningen i omløpstallet vil vannføringen for en høytrykksturbin avta, noe en vil finne ved hjelp av virkningsgradsdiagrammet for turbinen ved å følge linjen for konstant ledeskovlåpning mot økende omløpstall. Ledeskovlene har i samme tidsintervall lukket seg fra den opprinnelige posisjonen ned til en lavere åpning. Den totale reduksjonen av vannføringen vil imidlertid føre til en trykkstigning som kan beregnes ved hjelp av karakteristikkmetoden (eller den analytiske metode  $\left[\Delta H = \frac{a\Delta Q}{gA}\right]$  i første tidsintervall).

Merk at selv om pådraget er i ro så vil vi få en reduksjon av vannføringen ved en økning i omløpstallet for en høytrykksturbin eller pumpe i revers drift som turbin, ved utkopling som gir rusing. Det er viktig at akselerasjonstiden ikke er for kort slik at omløpstallsøkningen pr. tidsintervall blir for stor for slike maskiner fordi dette kan føre til meget store trykkstigninger. For å unngå problemet må små aggregater utføres med svinghjul.

Trykksvingningen som beregnes ut fra reduksjonen i vannføringen ( $\frac{Q}{*Q}$ ) vil imidlertid føre til en korleksjon av den avleste verdi ved at vi beveger oss litt til venstre i diagrammet (se neste side) fra punkt 2 til punkt 3. Den korrigert vannføringen gir imidlertid en lavere trykkstigning og vi beveger oss mot høyre i karakteristikkdiagrammet igjen, fra punkt 3 til 4.

Under denne iterasjonsprosessen mellom verdiene fra karakteristikk diagrammet og trykkøkningen funnet ved hjelp av karakteristikkmetoden, kan økningen i omløpstall holdes konstant inntil det er overensstemmelse mellom Q og H for trykk og volumstrøm. I neste tidsintervall tas hensyn til omløpstallskorleksjonen som skal baseres på overskuddsyttelsen  $[(Q - \Delta Q)(H + \Delta H) \rho g \eta]$  over to tidsintervall.

I tillegg F er vist en manuell beregning av trykkstigningen ved rusing for en høytrykks francisturbin. Trykkstigningen får sin største verdi etter et tidsintervall  $\Delta t = \frac{2L}{a}$  i dette tilfelle og beregningene kan gjøres enkelt med ett tidsinkrement da gradienten i omløpstallet er størst. Beregninger av denne type er gyldig dersom  $h_w < (1 + \sqrt{z})/2$ , d.v.s. for høytrykksanlegg.



Figur E.1: Innflytelse fra turbinkarakteristikken uttrykt ved (det modifiserte) virkningsdiagrammet for modellturbin.

## Tillegg F

# Illustration of the iteration steps in computation

Study of speed rise and pressure rise caused by runaway of turbine with guide vanes in fixed position ( $\kappa = 15^\circ$ ). Iteration by simplified formula for pressure rise  $\Delta H = \frac{a\Delta c}{g}$  and the characteristic diagram (see figure (F.1)).

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \Delta n_{11} \frac{\delta Q_n}{\delta n_{11}} + \Delta y \\ \Delta H &= \frac{a\Delta c}{g} = c_0 \frac{\Delta Q_{11} a}{Q_{11} g} \quad \text{for } 0 < t < \frac{2L}{a} = \frac{T_w}{h_w}\end{aligned}$$

$T_w = 3.06$  [s],  $h_w = 2.3$  [s],  $a = 1300$  [m/s],  $T_a = 7$  [s],  $c_0 = 7.42$  [m/s] is assumed. The procedure will be for a runaway analysis. If  $T_a = 7$  [s] the maximum runaway speed will occur after 8-10 [s] and the speed rise will be approximately a linear function of time in the first 4-5 [s] with a speed rise of 100% during a time  $t = T_a = 7$  [s], according to definition of  $T_a$ . Now the reflection time

$$\Delta T = \frac{2L}{a} = \frac{T_w}{h_w} = \frac{3.06}{2.3} = 1.3 \text{ [s]}$$

Then the following procedure can be followed:

### Iteration step 1

Time  $\Delta T = \frac{2L}{a} = 1.3$  [s],  $T_a = 7$  [s] and  $c_0 = 7.42$  [m/s]. Step in speed

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{1.3}{7} 100 = 18.6\%$$

is constant, but not  $n_{11}$

$$n_{110} = 55$$

and then

$$\Delta n_{11} = 55 \cdot 0.186 = 10.21$$

i.e.

$$n_{11} = 65.21$$

Further iteration when  $\Delta H$  and  $\Delta Q$  are determined by the shown iteration by correcting  $\frac{\Delta n}{n}$  as a function of  $Q + \Delta Q$  and  $H + \Delta H$  can be made by a bigger system.

From the characteristic diagram one will then find

$$Q_{11} = 0.5 \quad \text{for } \alpha_{max} = 15^\circ$$

Further  $Q_{110} = 0.533$ . Then the pressure rise can be found when  $a \approx 1300$  [m/s].

$$\Delta H_1 = 7.42 \frac{(0.533 - 0.5) \cdot 1300}{0.533 \cdot 9.81} = 60.9 \text{ [m]}$$

Now we know that the decrease in  $Q_{11}$  is not correct, because of the pressure rise.

### Iteration step 2

$$\begin{aligned} n_{11c1} &= n_{110} \sqrt{\frac{H_0}{H_0 + \Delta H_1}} = 65.21 \sqrt{\frac{230}{230 + 60.9}} = 58.0 \\ Q_{11c1} &= 0.522 \\ \Delta H_2 &= c_0 \frac{(c_{110} - c_{11c1}) a}{Q_{110} g} = 7.42 \frac{(0.533 - 0.522) \cdot 1300}{0.533 \cdot 9.81} = 20.3 \text{ [m]} \end{aligned}$$

### Iteration step 3

$$\begin{aligned} n_{11c2} &= n_{110} \sqrt{\frac{H_0}{H_0 + \Delta H_2}} = 65.21 \sqrt{\frac{230}{230 + 20.3}} = 62.5 \\ Q_{11c2} &= 0.509 \\ \Delta H_3 &= c_0 \frac{(c_{110} - c_{11c2}) a}{Q_{110} g} = 7.42 \frac{(0.533 - 0.509) \cdot 1300}{0.533 \cdot 9.81} = 44.3 \text{ [m]} \end{aligned}$$

### Iteration step 4

$$\begin{aligned} n_{11c3} &= n_{110} \sqrt{\frac{H_0}{H_0 + \Delta H_3}} = 65.21 \sqrt{\frac{230}{230 + 44.3}} = 59.7 \\ Q_{11c3} &= 0.519 \\ \Delta H_4 &= c_0 \frac{(c_{110} - c_{11c3}) a}{Q_{110} g} = 7.42 \frac{(0.533 - 0.519) \cdot 1300}{0.533 \cdot 9.81} = 25.8 \text{ [m]} \end{aligned}$$

### Iteration step 5

$$\begin{aligned} n_{11c4} &= n_{110} \sqrt{\frac{H_0}{H_0 + \Delta H_4}} = 65.21 \sqrt{\frac{230}{230 + 25.8}} = 61.8 \\ Q_{11c4} &= 0.511 \\ \Delta H_5 &= c_0 \frac{(c_{110} - c_{11c4}) a}{Q_{110} g} = 7.42 \frac{(0.533 - 0.511) \cdot 1300}{0.533 \cdot 9.81} = 40.6 \text{ [m]} \end{aligned}$$

**Iteration step 6**

$$\begin{aligned}
n_{11c5} &= n_{110} \sqrt{\frac{H_0}{H_0 + \Delta H_5}} = 65.21 \sqrt{\frac{230}{230 + 40.6}} = 60.1 \\
Q_{11c5} &= 0.518 \\
\Delta H_6 &= c_0 \frac{(c_{110} - c_{11c5}) a}{Q_{110} g} = 7.42 \frac{(0.533 - 0.518) \cdot 1300}{0.533 \cdot 9.81} = 27.7 [m]
\end{aligned}$$

**Iteration step 7**

$$\begin{aligned}
n_{11c6} &= n_{110} \sqrt{\frac{H_0}{H_0 + \Delta H_5}} = 65.21 \sqrt{\frac{230}{230 + 27.7}} = 61.6 \\
Q_{11c6} &= 0.512 \\
\Delta H_7 &= c_0 \frac{(c_{110} - c_{11c6}) a}{Q_{110} g} = 7.42 \frac{(0.533 - 0.512) \cdot 1300}{0.533 \cdot 9.81} = 38.7 [m]
\end{aligned}$$

**Iteration step 8**

$$\begin{aligned}
n_{11c7} &= n_{110} \sqrt{\frac{H_0}{H_0 + \Delta H_6}} = 65.21 \sqrt{\frac{230}{230 + 38.7}} = 60.3 \\
Q_{11c7} &= 0.516 \\
\Delta H_8 &= c_0 \frac{(c_{110} - c_{11c7}) a}{Q_{110} g} = 7.42 \frac{(0.533 - 0.516) \cdot 1300}{0.533 \cdot 9.81} = 31.4 [m]
\end{aligned}$$

**Final iteration on  $\Delta H$  instead of  $n$** 

$$\begin{aligned}
\Delta H &= \frac{38.7 - 31.4}{2} = 35 [m] \\
n_{11c8} &= n_{110} \sqrt{\frac{H_0}{H_0 + \Delta H}} = 65.21 \sqrt{\frac{230}{230 + 35}} = 60.75 \\
Q_{11c8} &= 0.514
\end{aligned}$$

Control:

$$\Delta H = c_0 \frac{(c_{110} - c_{11c8}) a}{Q_{110} g} = 7.42 \frac{(0.533 - 0.516) \cdot 1300}{0.533 \cdot 9.81} = 35.0 [m]$$

In the diagram the starting value of  $n_{11}$  without correction for pressure rise and the final value of  $n_{11}$  and  $Q_{11}$  shown. The final values of  $n_{11}$  and  $Q_{11}$  after  $T = \frac{2L}{a}$  are  $n_{11} = 60.75$ ,  $Q_{11} = 0.514$  and the pressure rise  $\Delta H = 35 [m]$  shown.

Because  $h_w > 1$  the maximum pressure occurs for  $t > \frac{2L}{a} = 1.3 [s]$ . Then the iteration requires the pressure to be calculated for steps in time for  $t > \frac{2L}{a}$  either by the characteristic method, a graphical method or analytically by functions  $F(t) - f(t - \frac{2L}{a})$ . This problem is solved by computer. However,  $\Delta H > 35 [m]$  may be assumed to be  $\Delta H \approx 50 [m]$  without friction based on experience for Porce II (diagram). Also the friction term is included in the computer. The

friction term is according to the term used by Streeter and Wylie for the time domain analysis, i.e.  $\Delta H = DQ^2$ . It should here also be emphasized that the frictional term in the stability analysis in the frequency domain also contain an additional friction term based on the acceleration of the flow.





## Tillegg G

# Vannveiens transferfunksjon på matriseform

(De påfølgende sider er kopiert fra Dr. avhandlingen til Hermod Brekke: "A Stability Study on Hydro Power Plant Governing including the Influence from a Quasi Nonlinear Damping of Oscillatory Flow and from the Turbine Characteristics" (1984), side 44-51.)

$$\hat{h} = \alpha_1 e^{(1/a)z} + \alpha_2 e^{-(1/a)z} \quad (71)$$

The constants  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  can be determined by means of the border lines in the ends of a pipe or a tunnel. However, another equation must be established in order to determine both constants.

By differentiating eq. (71) one gets:

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial l} = \alpha_1 (z/a) e^{(1/a)z} - \alpha_2 (z/a) e^{-(1/a)z}$$

when substituting for  $(\partial \hat{h} / \partial l)$  by this equation in eq. (25) and rearranging by letting  $(s + K) = z^2/s$  one gets.

$$\hat{q} = \frac{AgH_0}{aQ_0} \frac{s}{z} (\alpha_1 e^{(1/a)z} - \alpha_2 e^{-(1/a)z}) \quad (72)$$

We now introduce the Allievi's pipe constant  $h_w$ :

$$h_w = Q_0 a / (2gAH_0) \quad (73)$$

and

$$\hat{q} = \frac{1}{2h_w} \frac{s}{z} (\alpha_1 e^{(1/a)z} - \alpha_2 e^{-(1/a)z}) \quad (74)$$

By means of the border lines for pressure and flow, we now establish two equations for the dynamic flow when regarding the rising pressure positive at both ends of the pipe, and the flow positive from right to left: (Note  $l$  is positive from left to right as shown in fig. (13a)).

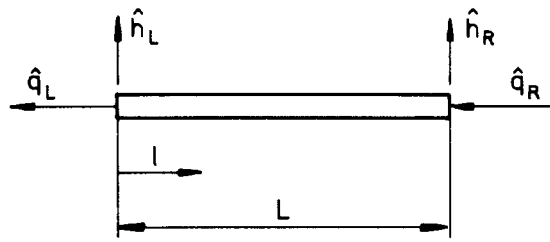


Fig. 13a

Boundary conditions:

Left end:  $l = 0$ :  $\hat{h} = \hat{h}_L$  and  $\hat{q} = \hat{q}_L$  according to fig. 13a and fig. 5, substituted in eq. (71) and eq. (74)

$$h_L = \alpha_1 + \alpha_2 \tag{75}$$

$$\hat{q}_L = 1/(2hw) \cdot (s/z) (\alpha_1 - \alpha_2) \tag{76}$$

Right end:  $l = L$ ,  $\hat{h} = \hat{h}_R$  and  $\hat{q} = \hat{q}_R$  according to fig. 13a, (see also fig. 5) substituted in eq. (71) and eq. (74):

$$\hat{h}_R = \alpha_1 e^{(L/a)z} + \alpha_2 e^{-(L/a)z} \tag{77}$$

$$\hat{q}_R = (1/(2h_w)) (s/z) (\alpha_1 e^{(L/a)z} - \alpha_2 e^{-(L/a)z}) \tag{78}$$

By means of eq. (77) and eq. (78) one gets:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \hat{h}_R e^{-(L/a)z} + \hat{q}_R h_w (z/s) e^{-(L/a)z}$$

and then by means of eq. (77):

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \hat{h}_R e^{(L/a)z} - \hat{q}_R h_w (z/s) e^{(L/a)z}$$

When substituting for  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  in eq. (75) and rearranging

$$\hat{h}_L = \hat{h}_R \frac{1}{2} (e^{-(L/a)z} + e^{(L/a)z}) - \hat{q}_R 2h_w (z/s) \frac{1}{2} (e^{(L/a)z} - e^{-(L/a)z})$$

When inverting and multiplying one gets:

$$\begin{bmatrix} \frac{-s}{2h_w z} & \frac{1}{\tanh(Lz/a)} \\ \frac{-s}{2h_w z} & \frac{1}{\sinh(Lz/a)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_L \\ h_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}_L \\ \hat{q}_R \end{bmatrix} \quad (81)$$

For convenience when establishing a grid of pipes where  $\sum \hat{q} = 0$  in the connection points (nodes) the flow direction may be chosen positive out of all pipe ends and rising pressure chosen positive. This is shown in fig. 13b.

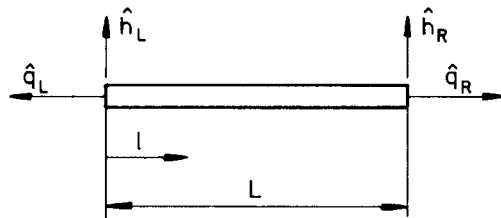


Fig. 13b

From the figure one will find that  $\hat{q}_R$  in eq. (81) should be substituted by  $-\hat{q}_R$ . The general matrix for a pipe in a system will then be:

$$\begin{bmatrix} \frac{-s}{2h_w z} & \frac{1}{\tanh(Lz/a)} \\ \frac{s}{2h_w z} & \frac{1}{\sinh(Lz/a)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_L \\ h_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}_L \\ \hat{q}_R \end{bmatrix} \quad (82a)$$

For convenience when building up a global matrix consisting of different pipes, the general pipe matrix will be written as shown in eq. (82b) when substituting for the expressions in the matrix as shown:

Note:

$$\begin{bmatrix} -T & S \\ S & -T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h}_L \\ \hat{h}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}_L \\ \hat{q}_R \end{bmatrix} \quad (82b)$$

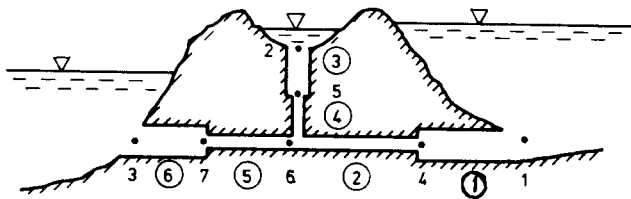
where  $T = (s/(2h_w z))/\tanh((L/a)z)$

and  $S = (s/(2h_w z))/\sinh((L/a)z)$

It should be noted that the left hand side and right hand side may be changed due to symmetry for this matrix.

A global system built up by tunnel elements

As an example a tunnel system with a shaft is shown, and the influence on the pressure oscillations from the dimensions of the shaft is shown in a brief discussion.



The node numbers and tunnel numbers (encircled) indicate how to connect the different pipe tunnel ends in the global matrix eq. (83).

Fig. 14

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7
 \end{array}
 & \begin{bmatrix}
 -T_1 & T & T & T & S_1 & T & - & T & - \\
 + & + & + & + & + & - & + & - & - \\
 + & -T_3 & + & + & - & + & S_3 & + & - \\
 + & + & -T_6 & + & - & + & - & - & + \\
 S_1 & + & + & + & -T_1 & -T_2 & + & - & S_2 \\
 + & S_3 & + & + & + & -T_3 & -T_4 & + & S_4 \\
 + & + & + & + & S_2 & + & S_4 & -T_4 & -T_2 & -T_5 & + & S_5 \\
 + & + & + & S_6 & + & + & S_5 & - & - & - & + & -T_5 & -T_6
 \end{bmatrix}
 & = & \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hat{h}_4 \\
 \hat{h}_5 \\
 \hat{h}_6 \\
 \hat{h}_7
 \end{bmatrix}
 & = & \begin{bmatrix}
 \hat{q}_1 \\
 \hat{q}_2 \\
 \hat{q}_3 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hat{q}_6
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (83)$$

By regarding fig. 14 and using the submatrix shown in eq. (82) the global matrix for the system in fig. 14 can be established as shown in eq. (83).

From row 6 in the matrix one will find the pressure in the junction (node No. 6) as a function of the pressure in node No. 7: (If one assumes that  $\hat{h}_4 = \hat{h}_5 = 0$  which will occur when the length of the pipe elements (1) and (3) is zero).

$$-(T_2 + T_4 + T_5)\hat{h}_6 + S_5\hat{h}_7 = 0$$

The following interesting ratio between the pressure in nodes 6 and 7 may now be studied.

$$\hat{h}_6/\hat{h}_7 = S_5/(T_2 + T_4 + T_5)$$

Or when substituting for S and T: (See eq. (82b)) and eliminating  $Q_o/(H_o)$  from nominator and denominator:

$$\frac{\hat{h}_6}{\hat{h}_7} = \frac{\frac{s}{a_5 z_5 / A_5 \sinh(Lz/a)_5}}{\frac{s}{a_2 z_2 / A_2 \tanh(Lz/a)_2} + \frac{s}{a_4 z_4 / A_4 \tanh(Lz/a)_4} + \frac{s}{a_5 z_5 / A_5 \tanh(Lz/a)_5}}$$

For small values of  $(z L/a)$  i.e.  $L < 50$ ,  $\omega < 2$  rad/sec., and  $a \leq 1200$  m/sec.:  $\sinh(Lz/a) \approx \tanh(Lz/a) \approx Lz/a$ :

or

$$\frac{\hat{h}_6}{\hat{h}_7} = \frac{(A/L)_5}{(A/L)_2 s/z_2 + (A/L)_4 s/z_4 + (A/L)_5 s/z_5}$$

if one neglects the frictional term in the pipe equation ( $z = i\omega = s$ ). Then after rearranging:

$$\frac{\hat{h}_6}{\hat{h}_7} = \frac{(L/A)_4 (A/L)_5}{1 + (L/A)_4 ((A/L)_2 + (A/L)_5)} \quad (84)$$

By regarding this equation it can clearly be seen that if  $(L/A)_4 = 0$ ,  $\hat{h}_6 = 0$ . On the other hand if  $A_4 = 0$  one gets:

$$\frac{\hat{h}_6}{\hat{h}_7} = \frac{(A/L)_5}{(A/L)_2 + (A/L)_5} \quad (85)$$

which will be the expression for pipe (2) and (5) connected in series.

Conclusion: It is important to have the ratio (L/A) for a shaft as small as possible in order to reduce pressure oscillations in node No 6.

However, in a complete system other elements representing partial losses, surge shafts, air accumulators, valves, turbines etc. have to be included in a matrix form.

$$\hat{h}_L = \hat{h}_R \cosh(Lz/a) - \hat{q}_R 2h_w(z/s) \sinh(Lz/a) \quad (79)$$

In the same way one gets by substituting for  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  in eq. (76).

$$\hat{q}_L = 1/(2hw) s/z (\hat{h}_R \frac{1}{2} (e^{-Lz/a} - e^{Lz/a}) - \hat{q}_R 2hw z/s \frac{1}{2} (e^{-Lz/a} + e^{Lz/a}))$$

or

$$\hat{q}_L = -\hat{h}_R s/(2h_w z) \sinh(Lz/a) + \hat{q}_R \cosh(Lz/a) \quad (80)$$

In order to solve problems for complicated coupled systems, eq. (79) and eq. (80) must be rearranged for establishing a matrix:

$$\hat{h}_L - \cosh(Lz/a)\hat{h}_R = -2h_w(z/s)\sinh(Lz/a)\hat{q}_R$$

$$(s/(2h_w z))\sinh(Lz/a)\hat{h}_R = -\hat{q}_L + \cosh(Lz/a)\hat{q}_R$$

Which in matrix form yields:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\cosh(Lz/a) \\ 0 & s/(2h_w z)\sinh(Lz/a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h}_L \\ \hat{h}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2h_w z/s \sinh(Lz/a) \\ -1 & \cosh(Lz/a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{q}_L \\ \hat{q}_R \end{bmatrix}$$

or

$$\begin{bmatrix} 0 & -(2h_w z/s)\sinh(Lz/a) \\ -1 & \cosh(Lz/a) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\cosh(Lz/a) \\ 0 & (s/2h_w z)\sinh(Lz/a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h}_L \\ \hat{h}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}_L \\ \hat{q}_R \end{bmatrix}$$

Figur G.1:



## Tillegg H

# Allievis ligninger utledet fra Euler's ligning

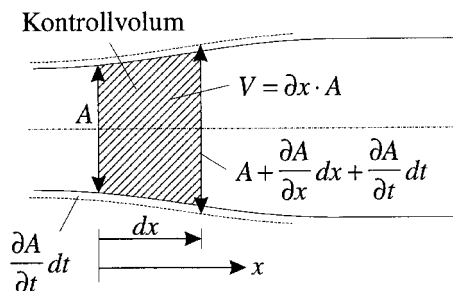
Allievis ligninger utledet fra Euler's ligning og ligningen for massebevarelse på ikke konservativ form d.v.s. kontrollvolumet er ikke steds bestemt og kan beveges i x-retning som er den endimensjonale lengdeparameter (langs røret). Euler's ligning på en-dimensjonal form gir  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$  og  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  og kan da skrives som følger:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(c^2/2)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (\text{H.1})$$

Ligningen for massebevegelse (kontinuitetsligningen):

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c A)}{\partial x} = 0 \quad (\text{H.2})$$

Ved utvikling av ligning (H.1) innfører vi,  $gH = \frac{p}{\rho} + Zg$ , da vi neglisjerer helningen av røret som



Figur H.1: Illustrasjon av et kontrollvolum.

vi antar ligger i ro slik at  $Zg$  kan superponeres (legges sammen) som en fast verdi i tillegg til den beregnede trykkstigning. Dette gir:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (\text{H.3})$$

Ved å derivere ut ligning (H.2) får vi:

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} c A + \frac{\partial c}{\partial x} \rho A + \frac{\partial A}{\partial x} c \rho = 0 \quad (\text{H.4})$$

Vi ønsker nå ligningene uttrykt på formen :  $p = f(x, t)$  og  $c = f(x, t)$  og innfører

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{og} \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{H.5})$$

i ligning (H.4) som ordnes:

$$\left( A \frac{\partial \rho}{\partial p} + \rho \frac{\partial A}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \left( A \frac{\partial \rho}{\partial p} + \rho \frac{\partial A}{\partial p} \right) c \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x} \rho A = 0 \quad (\text{H.6})$$

Dividerer alle ledd i ligningen med A og ordner ligningen:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial t} + c \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial c}{\partial x} \rho = 0 \quad (\text{H.7})$$

Vi har ligningen for trykkforplantningshastigheten:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial p}}} \quad (\text{H.8})$$

Setter  $a$  inn som trykksjokkforplantningshastigheten i x-retning langs røret og setter  $p/(\rho g) = H$  da  $z$  ikke forekommer i ligningen dvs. at  $z = 0$ . Vi får da ved å dividere ligningen med  $\rho$  og multiplisere i teller og nevner med  $g$  i alle ledd som inneholder  $p$ :

$$\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{g}{a^2} c \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{H.9})$$

Innfører tilslutt  $\frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}$  i ligning (H.3) og ligning (H.9) da leddet  $c \frac{\partial}{\partial x}$  negliseres. Bare for sterkt koniske eller sterkt elastiske rør vil leddet  $c \frac{\partial}{\partial x}$  få en verdi. Ligningene blir da identiske med de kjente Allievis ligninger:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (\text{H.10})$$

og

$$\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{H.11})$$

Merk i den formen vi har på ligningsettet (H.10) og (H.11) er hastigheten  $c$  positiv inn i rørenden d.v.s. i x-retning. For regulering av turbiner definerer vi imidlertid hastigheten ut av røret (d.v.s. in i turbinen) som positiv mens x-retningen fortsatt er positiv fra rørenden og oppover mot inntaket. Ligningene (H.10) og (H.11) vil da skifte fortegn på høyre side. Videre er det hensiktsmessig å løse ligningene m.h.p.  $H$  som er trykkstigningen (eller synkningen) vi søker. Ligningen skrives da på følgende form for turbinregulering ved å innføre  $Ac = Q$  og betrakte rørenden foran turbinen:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{H.12})$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{H.13})$$

## H.1 Friksjon fra Navier-Stoke's ligning

En dimensjonal slik som Euler's ligning, men med sylinderkoordinater slik at hastighetsvariasjonen  $c$  (i x-retn.) over radien blir med:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (\text{H.14})$$

For å få til et uttrykk for friksjon må vi betrakte stasjonær tilstand. (For mere kompliserte uttrykk se Dr. techn. avhandling av H. Brekke.) Setter da  $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$  og  $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$  og får trykkfallet på grunn av friksjon. (Bruker liten  $H$  for å skille leddet fra det dynamiske trykket.)

$$\left( g \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{fr} = \nu \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \quad (\text{H.15})$$

eller ved å innføre skjærspenningen har vi:

$$\left( g \rho \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{fr} = \nu \rho \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = \mu \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = -\frac{\partial \tau}{\partial R} \quad (\text{H.16})$$

Dette gir følgende sammenheng for friksjonsleddet:

$$\tau = -\mu \frac{\partial c}{\partial r} \quad (\text{H.17})$$

Minustegnet skyldes at friksjonskraften er rettet mot hastighetene. For stasjonær strøm vil  $\tau = f(r)$  få formen:

$$\tau = -Ar + B \quad (\text{H.18})$$

Minustegnet foran  $Ar$  skyldes at  $c$  minsker med økende  $r$  ut mot rørveggene. I senter i røret vet vi at friksjonen = 0 og at hastighetsgradienten i retning mot rørveggen = 0. Dette gir:

$$\tau(0) = 0 = B \quad (\text{H.19})$$

For skjærspenning nær rørveggen får vi  $r = R$ .

$$\tau(R) = \tau_w = -AR \Rightarrow A = -\frac{\tau_w}{R} \quad (\text{H.20})$$

Vi kan da for en vilkårlig hastighet et lite stykke fra rørveggen sette:

$$\tau(r) = -\frac{\tau_w}{R} r \Rightarrow \frac{\partial \tau(r)}{\partial r} = -\frac{\tau_w}{R} \quad (\text{H.21})$$

Vi får da følgende ledd i ligningen:

$$\left( \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{fr} = -\frac{\tau_w}{R} \quad (\text{H.22})$$

I følge Darcy Weisbach kan vi også for turbulent strøm sette  $\tau_w = \rho c^2 f / (8R_h)$  som gir oss følgende ligning for friksjonen:

$$\left( \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{fr} = \frac{\rho c^2 f}{8R_h} \Rightarrow \left( g \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{fr} = -\frac{f c^2}{2Dg} \text{ da } R_h = \frac{1}{4} D \quad (\text{H.23})$$

Vi får nå følgende ligning med friksjonsledd:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f c^2}{2Dg} = 0 \quad (\text{H.24})$$

Denne ligning erstatter da ligning (H.3) og vi får da med samme forutsetning som tidligere at  $\frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}$  da det siste leddet blir neglisjerbart for rør med utenom sterkt koniske eller svært elastiske rør slik som gummislanger.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f c^2}{2Dg} \quad (\text{H.25})$$

Eller for turbiner der C er positiv i negativ x-retning. Innfører fortegn:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f}{2DgA^2} |Q| Q \quad (\text{H.26})$$

eller

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{gA} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f}{2DA} |Q| Q \right) \quad (\text{H.27})$$

Kontinuitetsligningen blir uforandret.

## H.2 Beregning av bølgehastighet -a- for sirkulære rør

Vi har ligningen for trykkforplantingshastigheten  $a$ :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial p}}}$$

$$\begin{aligned} A &= \text{arealet av røret} & A &= \pi R^2 \text{ [m}^2\text{]} \text{ (} R = \text{rørradius)} \\ p &= \text{trykk} & & \text{[N/m}^2\text{]} \\ \rho &= \text{tettheten på vannet} & \rho &= 1000 \text{ [kg/m}^3\text{]} \end{aligned}$$

For sirkulære rør har vi ligningen for spenningsendring:

$$d\sigma = \frac{dpR}{t} \quad (\text{H.28})$$

$$\begin{aligned} t &= \text{vegtykkelse} \\ R &= \text{rørradius} \end{aligned}$$

Økt rørdiameter som følge av trykkøkningen  $\Delta p$  når vi setter inn for  $d\sigma$ :

$$dR = d\sigma \cdot \frac{R}{E} = \frac{R^2}{tE} \cdot \Delta p \quad (\text{H.29})$$

Økt arealseksjon  $dA$ .

$$dA = 2\pi R dR = \frac{2\pi E R^3}{t} dp \quad (\text{H.30})$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{2\pi R^3}{Et} \quad (\text{H.31})$$

$$\frac{\partial A\rho}{\partial pA} = \frac{2R\rho}{Et} = \frac{D\rho}{Et} = \frac{D \cdot 10^3}{2.1 \cdot 10^{11}t} = \frac{D}{2.1 \cdot 10^8t}$$

Fra tabeller for "the bulk modulus of water" finner vi kompressibiliteten. Nå kan formelen for bølgehastighet omskrives som vist:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial \rho}{\partial p} \sqrt{\frac{\partial A\rho}{\partial pA} \cdot \frac{\partial p}{\partial \rho} + 1}}} \quad (\text{H.32})$$

Setter nå inn for de forskjellige parameterene som vist:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = 4.92 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \frac{\partial A\rho}{\partial pA} \cdot \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{D}{2.1 \cdot 10^8t \cdot 4.92 \cdot 10^{-7}} = \frac{D}{103t}$$

Formelen for bølgehastighet kan nå bli skrevet med følgende formel som gjelder for sirkulære stålrør:

$$a \simeq \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D}{103t}}}$$

Eksempel på beregning av a:

For rørdiameter  $D = 3.66$  [m] veggtykkelse på  $t = 0.02$  [m] med  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  [N/m<sup>2</sup>] og  $\rho = 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>] får vi:

$$a = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D}{103t}}} = a = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{3.66}{103 \cdot 0.02}}} = 855 \text{ [m/s]}$$