Red: Nils Kr. Rossing,
Maren Fredagsvik,
Ingeborg Berg (fra utg. 4.0)

Matematikkløypa 2020 – Veiledningshefte

NTNU

Skolelaboratoriet
for matematikk naturfag og teknologi

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Februar 2020

MATEMATIKKLØYPA 2020 – VEILEDNINGSHEFTE

Foto: Per Henning/NTNU

Trondheim 2020

Redigering: Nils Kr. Rossing, Maren S. Fredagsvik, Ingeborg Berg
Layout: Nils Kr. Rossing, Skolelaboratoriet
Foto: Kai T. Dragland/NTNU
Per Henning/NTNU
Ingeborg Berg/NTNU
Oppgaver, tekst: Kari Hag, Inst. for matematiske fag
Vigdis Petersen
Nils Kr. Rossing, Skolelaboratoriet
Kirsti Rø, Inst. for matematiske fag
Maren Fredagsvik, Skolelaboratoriet
Sverre Smalø, Inst. for matematiske fag
Svein Torkildsen, Matematikksenteret
Ingvill Merete Stedøy, Matematikksenteret
Ingeborg Berg, Skolelaboratoriet
Jens Arne Meistad, Matematikksenteret
Forsidebilde: Per Henning/NTNU

Dette heftet er et samarbeid mellom
Inst. for Matematiske fag, NTNU
Skolelaboratoriet ved NTNU
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Administrative spørsmål rettes til:
Skolelaboratoriet for matematikk naturfag og teknologi, NTNU
Institutt for fysikk (IFY)
v/Ingeborg Berg, 73 59 19 44, e-post: ingeborg.berg@ntnu.no

Faglige spørsmål rettes til:
Skolelaboratoriet ved NTNU
v/Nils Kr. Rossing, 73 55 11 91, e-post: nils.rossing@ntnu.no

Realfagbygget, Høgskoleringen 5
7491 Trondheim

Skolelaboratoriet
Telefon: 73 55 11 43
http://www.ntnu.no/skolelab

Utgave 6.1 – 04.10.21

Matematikkløypa 2020 er støttet økonomisk av:
IE-, IV- og NV-fakultetene og fakultet for økonomi ved NTNU Trøndelag fylkeskommune, Samarbeidsforum ved NV-fakultetet, Trondheimsregionen og Energi Norge

I tillegg har
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Skolelaboratoriet ved NTNU
bidratt med betydelig egeninnsats.

Vi takker alle bidragsytere!

Matematikkløypa 2020
Veiledningshefte

Red. Nils Kr. Rossing, Maren Fredagsvik og Ingeborg Berg

Følgende har bidratt med innhold i heftet

**Kari Hag, Vigdis Petersen, Kirsti Rø, Sverre Smalø,
Svein Torkildsen, Ingvill Merete Stedøy og Jens Arne Meistad**

Skolelaboratoriet for matematikk, naturfag og teknologi, NTNU
Institutt for matematiske fag, NTNU
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Forord

Matematikkløypa er en av de siste løypene som er kommet til blant Realfagløypene ved NTNU. Den ble etablert som en pilot i mars-april 2014 på initiativ fra prodekanene for undervisning ved SVT-, IME-, IVT- og NT-fakultetene, samt betydelig støtte fra prorektor. Hensikten har vært å gi elever på 8. trinn i ungdomsskolen en positiv opplevelse av at matematikk også kan være lek, spill og utforskning. Vi tror også at et besøk på campus Gløshaugen kan gjøre denne dagen spesiell for de fleste elevene.

Heftet er en samling med oppgaver fra Matematikkløypa, og det faglige innholdet er utarbeidet i et samarbeid mellom Institutt for matematiske fag, Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen og Skolelaboratoriet. Oppgavene i matematikkløypa er valgt med bakgrunn i læreplanen og finnes under temaene statistikk og sannsynlighet, geometri, tall og algebra.

Hver dag i to uker besøkes Matematikkløypa av over 70 elever fra 8. trinn i ungdomsskolen. Elevene deles inn i 12 grupper, hver med ca. 6 elever og med NTNU-studenter som gruppeledere. I løpet av de drøyt to ukene Matematikkløypa varer, vil nærmere 800 elever ha besøkt den1.[1] Løypa er spredt over flere rom på Realfagbygget, Gløshaugen, og på hvert rom løser elevene matematikkoppgaver under veiledning av studentene. Studentene noterer etter hver oppgave gruppens poeng på et poengkort som leveres inn på slutten av dagen. Beste gruppe får en liten premie.

I forkant av løypa arrangeres lærerkurs for lærere som skal delta med sin klasse. Kurset omfatter en kort presentasjon av Matematikkløypa og en innføring i matteLIST av Jens Arne Meistad ved Matematikksenteret. Dernest vil studentene ta med lærerne rundt i løypa for å bli kjent med de ulike oppgavene samt diskutere presentasjon og bruk ved egen skole.

Matematikkløypa og de øvrige Realfagløypene har ikke latt seg gjennomføre uten betydelig økonomisk støtte fra NTNU og fra næringslivet. Realfagløypene er støttet økonomisk av Trøndelag fylkeskommune, Samarbeidsforum ved NV-fakultetet, Trondheimsregionen, Energi Norge, IV-, IE-, og NV-fakultetene samt fakultet for økonomi ved NTNU.

I tillegg til dette er det lagt ned en betydelig egeninnsats fra ansatte ved Skolelaboratoriet, Institutt for matematiske fag og Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen i tillegg til andre som brenner for matematikkfaget. En spesiell takk rettes til Kari Hag, Vigdis Petersen, Sverre Smalø, Kirsti Rø og Svein Torkildsen som sammen med de undertegnede har vært med og utviklet løypa.

Trondheim 27.02.20
Maren Fredagsvik, Ingeborg Berg og Nils Kr. Rossing

[1] I 2020 besøker 763 elever pluss lærere Matematikkløypa

Innhold

1 Innledning

Veiledningsheftet er ment å være et ressurshefte for lærerne som deltar sammen med klassen sin på Matematikkløypa. Heftet består av både nye og gamle oppgaver fra løypa.

Matematikkløypa er ment å berøre de viktigste emnene i matematikk i ungdomsskolen og ikke mer krevende enn at den passer for elever på slutten av 8. trinn. Emnene som er tatt inn i løypa er algebra, geometri, statistikk og tall.

Matematikkløypa er en del av Realfagløypene, som startet med Fysikkløypa i 2005. Fysikkløypa startet 14. mars, selveste π-dagen. Denne dagen er også fødselsdagen til Albert Einstein (14. mars 1879). De første årene var premien for beste lag under Matematikkløypa ei t-skjorte prydet med en krøll-π. Før vi kommer til oppgavene i heftet, kommer derfor en liten innledning om dette fascinerende tallet.

Fun facts om Pi – π

Pi - π er et underlig tall. Selv om det i all sin enkelhet er forholdet mellom omkretsen og diameteren til alle sirkler, så finner vi igjen dette mystiske tallet i svært mange forskjellige sammenhenger.

Disse er de vanligste:

- Sirkelens omkrets: $2\pi r$
- Sirkelens areal: πr^2
- Kulas overflate: $4\pi r^2$
- Kulas volum: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Her er det 100 første sifrene i л:
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 79 ...

Det underlige er at det ikke finnes noe system i hvordan de ulike sifrene følger etter hverandre. Vi sier at π er et irrasjonelt tall, som betyr at tallet ikke kan skrives som en brøk. 14. mars er, som nevnt, π-dagen. I 2015 var denne dagen litt spesiell da den kunne skrives som: **3.14 15**
I forbindelse med denne begivenheten ble det satt ny norsk rekord i å huske flest mulig siffer av π.

Det var Bjørn Vidar Næss (47) fra Kongsberg som satte rekorden med å huske de første 1206 desimalene til π. Han forteller til Dagbladet at han benytter assosiasjonsteknikker for å huske rekkefølgen av tall.[2] F.eks. ved å knytte en bokstav til hvert siffer som igjen kan knyttes til ord, som så kan settes sammen til fortellinger som er langt lettere å huske. Det tok 18 min. og 39 sek. å ramse opp alle de 1206 sifrene. Rekorden er offisielt godkjent slik at han kan kalle seg norgesmester. Det neste målet er å slå den nordiske rekorden på 10 000 siffer som holdes av to svensker. Men det er langt fra verdensrekorden...

[2] https://www.dagbladet.no/nyheter/bjorn-vidar-47-har-satt-norgesrekord-i-pi/60706057

Flere har memorert utallige siffer av π, men den 23 år gamle Hiroyuki Goto tar kaka. Han brukte i februar 1995 over ni timer på å framføre de første 42 195 sifrene av π som han hadde lært utenat. Men rekorder er til for å slås, så fra 1. til 2. juli 2005 ble han grundig slått av den 59 år gamle japaneren Akira Haraguchi med sine 83 431 siffer. Han brukte 13 timer for å framføre tallet. Godeste Akira gikk imidlertid ikke lei av π etter denne kraftanstrengelsen. Han hadde ikke før blitt ferdig før han gikk i gang med å lære seg ytterligere 26 569 siffer, slik at han i oktober året etter var i stand til å sitere de første 100 000 siffer av π. Vi får inderlig håpe at han får brukt de 100 000 sifrene av π til noe fornuftig.[3]

3 1 4 1 5 9
Sir, I bear a rhyme excelling
2 6 5 3 5 8
In mystic force and magic spelling
9 7 9
Celestial sprites elucidate
3 2 3 8 4 6
All my own striving can't relate
2 6 4 3 3 8
Or locate they who can cogitate
3 2 7 9 5
And so finally terminate. Finis.

Oppfinnsomheten for å huske sifrene i π er stor. Noen har laget seg huskeregler, andre har igjen skrevet dikt med ord som har samme antall bokstaver som sifrene i π (rammen til venstre). Diktet gjengir 31 sifre av π. Dikteren fikk imidlertid et alvorlig problem i 32. siffer fordi dette er en 0, hvilket kan være vanskelig å uttrykke som et ord i et dikt.

Studenter har laget enklere versjoner tilpasset deres hverdag som f.eks.: "How I like a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics" som omfatter de 15 første sifrene. I dag har man klart å finne over 5 trillioner desimaler til tallet π.[4] Noen tillater seg å spørre hva en skal med alle disse sifrene. De færreste ingeniører trenger særlig mer enn 7 siffer, og noen fysikere trenger kanskje 15 eller 20. Med 32 sifre kan en beregne størrelsen på universet ned til en nøyaktighet på noen få cm, så hva skal en med milliarder av siffer? Vel, svaret er like enkelt som å svare på hvorfor noen strever seg fram til Nord- eller Sydpolen bare drassende på en slede med proviant. *De ønsker en utfordring.*

Som nevnt har ingen ennå klart å finne noe system i sifrene i π. Noen har ment at π er utmerket dersom en ønsker en rekke med tilfeldige tall. Likevel finnes det en del merkverdigheter knyttet til denne matematiske konstanten. Følgende er eksempler på noen slike:

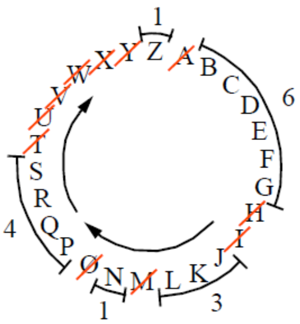
Π er den 16. bokstaven i det greske alfabetet. 16 er kvadratet av 4. I det norske alfabetet er *p*en også den 16. bokstaven. *i*-en er på samme måte den 9. bokstaven i det norske alfabetet, og 9 er kvadratet av 3. Dersom vi adderer p + i altså 16 + 9, får vi 25, som er kvadratet av 5. Dersom vi multipliserer tallene 9 og 16 får vi tallet 144 som er kvadratet av 12. Dersom vi dividerer 9 på 16, får du 0.5625 som er kvadratet av 0.75.

Blant de første 1 million sifrene finner vi ikke sekvensen 0123456, mens 12345 finner vi hele åtte ganger, tre av dem etterfulgt av nok et 5-tall. Sekvensen 012345 finner vi igjen to ganger. Sekvensen 333 333 finner vi ved det 710 100. sifferet. Slike lange sekvenser av det samme tallet finner vi igjen blant de første 1 000 000 sifrene for alle tall unntatt 2 og 4.

[3] https://www.tofugu.com/japan/akira-haraguchi/
[4] http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-5t/announce_en.html

Noen av de beste tilnærmingene til π som kan gjøres ved en brøk er $\frac{22}{7}$ og $\frac{355}{113}$. Undersøker vi rekken av siffer i π, vil vi finne at tall nummer 7, 22, 113 og 355 alle er 2.

Carl Sagan (1934–1996) skrev i 1985 romanen *Kontakt.* Her fabulerer han om at sifrene i π ikke er tilfeldige, men at de langt ute i tallrekken får mening.



Martin Gardner (1914–2010) oppdaget for noen år siden en underlig sammenheng. Han skrev alle bokstavene i det engelske alfabetet langs periferien av en sirkel. Så fjernet han alle bokstaver som var symmetriske omkring en vertikal akse. Han sto da igjen med grupper av bokstaver. Det viste seg da at antallet bokstaver i hver gruppe var lik de fem første sifrene i tallet π, når det femte sifferet avrundes.

For den som ønsker å utforske π i større detalj, anbefales David Blatners bok *The joy of* π.

2 Algebra

2.1 Oppgave 1 - Algebrakappløpet

2.1.1 Utstyr

- Bane: «Algebrakappløp»
- Tre spillebrikker til hvert lag
- Grønn og rød terning, 1–6 (felles for gruppa)
- Kladdeark
- Elevark: «Algebra – studer uttrykkene»
- Elevark: «Algebra – bonusoppgave»
- Blyant/viskelær

2.1.2 A1: Algebrakappløp - hvem kommer lengst?

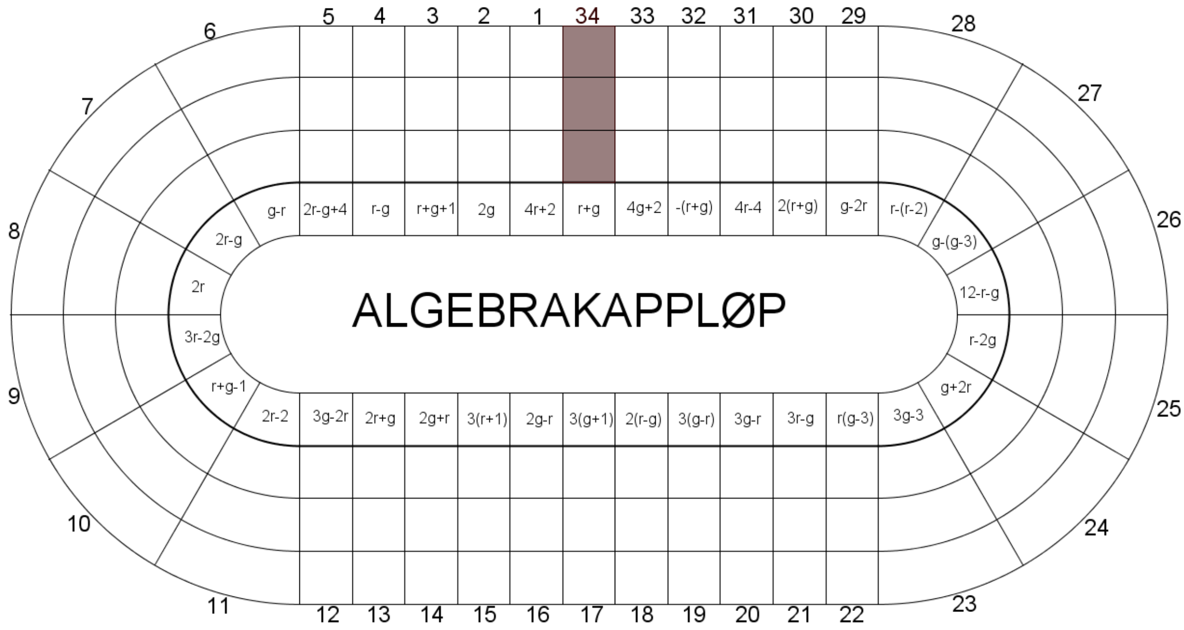
Del gruppa inn i to lag med tre elever på hvert lag. Hvert lag får utdelt spillbrett, spillebrikker, kladdeark og blyant.

Kappløpet gjennomføres innad i gruppene, ved at begge lag flytter spillebrikkene etter samme verdier på terningene. Gruppeleder kaster terningene.

Elevene på hvert lag skal samarbeide om å flytte tre spillebrikker lengst mulig på spillbrettet i løpet av 15 minutter. Lengden bestemmes av posisjonen til den **bakerste** spillebrikken.

1. Sett brikkene på det merkede feltet, felt 34.
2. Gruppeleder kaster terningene. Uttrykket $r + g$ viser at man kan flytte én av brikkene lik summen av verdien til den *røde* og den *grønne* terningen.

3. For hvert kast må lagene velge hvilken brikke de ønsker å flytte. Uttrykket ved ruta der brikken står viser hvor langt de skal flytte brikken. Verdien til terningene settes inn i uttrykket.
4. Spillet avsluttes når det har gått 15 minutter. Gruppa får poeng basert på resultatet til det beste laget (se poengberegning under).
5. Dersom et lag har flyttet den bakerste brikken en runde rundt spillbrettet før det har gått 15 minutter, kan de gå videre til neste oppgave.



2.1.3 A2: Studer uttrykkene

Del ut elevarket «Algebra – studer uttrykkene». Tabellen inneholder uttrykk fra algebrakappløpet, og på de blanke linjene skal det settes inn verdier fra 1 til 6. Hvis det er mulig å finne verdier som gjør uttrykkene større enn, lik eller mindre enn null skrives et eksempel i skjemaet. Dersom det ikke er mulig å finne et eksempel settes det et kryss over oppgaven.

Uttrykk > 0 (positivt uttrykk)	**Uttrykk = 0**	**Uttrykk < 0 (negativt uttrykk)**
__ – __ > 0	__ – __ = 0	__ – __ < 0
2 · __ – 2 > 0	2 · __ – 2 =0	2 · __ – 2 < 0
__ – 2 · __ > 0	__ – 2 · __ = 0	__ – 2 · __ < 0
__ (__ – 3) > 0	__ (__ – 3) = 0	__ (__ – 3) < 0
–(__ + __) > 0	–(__ + __) = 0	–(__ + __) < 0
3 · __ – 2 · __ > 0	3 · __ – 2 · __ = 0	3 · __ – 2 · __ < 0

2.1.4 A3: Bonusoppgave

Dersom et lag blir tidlig ferdig får de prøve seg på bonusoppgaven:

Studer de seks uttrykkene og sett inn riktige bokstaver i påstandene under.
Sett inn tallene 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 istedenfor *r* og *g*.

A $r + g - 1$	**B** $r - (r - 2)$	**C** $3(g + 1)$
D $2r - g + 4$	**E** $3g + 3$	**F** $2r - 2$

1. Den minste verdien uttrykk __ kan få er null.
2. Den største verdien uttrykk __ kan få er elleve.
3. Uttrykkene __ og __ vil alltid ha lik verdi.
4. Uttrykkene __ og __ har lik verdi når r = 1 og g = 3.
5. Uttrykk __ vil alltid bli to.

Dere må kunne forklare svarene dere gir, å gjette riktig gir ingen poeng.

Fasit studer uttrykkene

Følgende uttrykk har ingen løsning:

$2\cdot \_\_ - 2 < 0$

$-(\_\_ + \_\_) > 0$

$-(\_\_ + \_\_) = 0$

Fasit bonusoppgave

1. D eller F
2. A
3. C og E
4. A og D eller C og E
5. B

2.1.5 Poengberegning

Gruppa kan maksimalt få 10 poeng på oppgaven, i tillegg til 2 bonuspoeng.

A1: Algebrakappløpet: Gruppa får poeng basert på resultatet til det beste laget. Dersom bakerste brikke til det beste laget er flyttet:

- 1 hel runde (34 ruter) eller mer, gir dette **5 poeng**
- 29-33 ruter, gir dette **4 poeng**
- 26-28 ruter, gir dette **3 poeng**
- 23-25 ruter, gir dette **2 poeng**
- 18-22 ruter, gir dette **1 poeng**

A2: Studer uttrykkene: Laget med flest poeng på oppgaven skriver sin poengsum på gruppas poengkort.

- Riktig løsning på alle 18 uttrykkene gir **5 poeng**
- Riktig løsning på minst 14 uttrykk gir **4 poeng**
- Riktig løsning på minst 10 uttrykk gir **3 poeng**
- Riktig løsning på minst 6 uttrykk gir **2 poeng**
- Riktig løsning på minst 2 uttrykk gir **1 poeng**

A3: Bonusoppgave:
Riktig svar på de fem påstandene gir **2 bonuspoeng**
Riktig svar på minst tre påstander gir **1 bonuspoeng**

2.2 Oppgave 2 - Bjelken

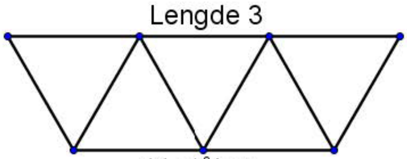
Ikke en del av Matematikkløypa f.o.m. 2018

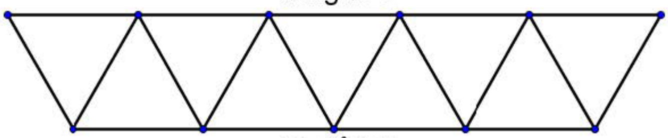
2.2.1 Utstyr

- Fyrstikker
- Elevarket Bjelken
- Svarark Bjelken
- Kladdepapir/blyant/viskelær

2.2.2 Antall stålrør i bjelker

Del gruppa inn i tre lag slik at to og to arbeider sammen til å begynne med og gi hvert par et oppgaveark og en pose med fyrstikker.
Forklar elevene at de skal studere en bjelke som er satt sammen av like lange stålrør som danner trekanter.





Vis gjerne bjelken med lengde tre med fyrstikker og forklar hvorfor det er lengde tre. Forklar elevene at de skal finne en regel for hvor mange stålrør som trengs til ulike lengder.

Om elevene er uvante med å skrive slike generelle regler, kan du bruke partall som eksempel. Ha klar en tabell med de første partallene:

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8
Partall	2	4	6	8	10	12	14	16

Partallet er dobbelt så stort som nummeret på partallet, så regelen kan være:
Når jeg vet nummeret på partallet kan jeg gange nummeret for å finne partallet.
Det kan vi også skrive slik: Partall n = 2n

Understrek at regelen for bjelken kan lages på mange forskjellige måter, og gruppa får flere poeng om de kan lage flere regler som alle er korrekte.

2.2.3 Strategier elevene kan bruke

Elever velger to ulike strategier når de arbeider med en slik oppgave.

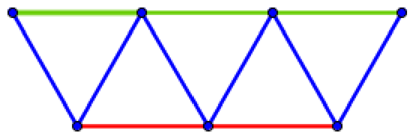
Noen foretrekker en tabell:

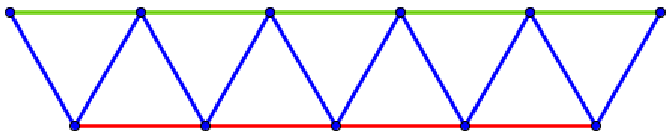
Lengde	1	2	3	4	5	6	7
Stålrør	3	7	11	15	19	23	27

Kanskje oppdager elevene at antall stålrør er en mindre enn tallene i firegangen, og de kan da få regelen: Vi finner antall stålrør ved å gange lengden med fire og så trekke fra en. Det kan skrives som $S = 4L - 1$. S står for antall stålrør og L står for lengden til bjelken. Elevene kan selvsagt velge å bruke andre bokstaver, men de må oppfordres til å skrive hva bokstavene sår for om de ikke kommer på det av seg selv.

Andre studerer geometrien i figuren. Vi har fått disse reglene i arbeid med denne oppgaven:

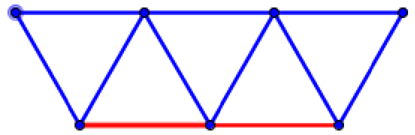
Noen elever ser at det er like mange stålrør som lengden øverst på bjelken. Det er de grønne rørene på tegningen under. Til hvert av de grønne er det festet to stålrør, de blå rørene. Nederst er det ett stålrør mindre enn lengden.

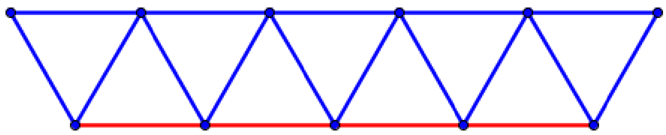




Lengden pluss to ganger lengden pluss en mindre enn lengden
L = Lengden, S = antall stålrør. $S = L + 2 \cdot L + (L - 1)$

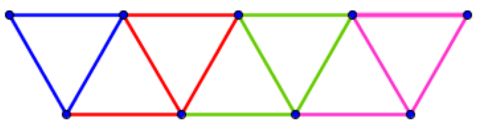
Andre ser trekanter i bjelkene. Det var like mange trekanter som lengden på bjelken.





Lengden gange tre pluss en mindre enn lengden:
$x \cdot 3 + x - 1 \cdot x =$ lengden

Elever som har startet med å legge lengde en med fyrstikker for så å bygge videre på den lengden ser at de må legge til fire fyrstikker for hver nye lengde:



Vi starter med 3 og så legger vi til 4 en gang mindre enn lengden.
Antall stålrør = $3 + 4(n - 1)$
der n er lengden til bjelken

Andre ser dette som: lengden gange fire og minus en på den første. De får $4L - 1$ direkte.

3 Geometri

3.1 Oppgave 1 - Regulære romfigurer

3.1.1 Utstyr

- Jovobrikker
    - Regulære trekanter, minst 70 stk
    - Regulære firkanter, minst 20 stk
    - Regulære femkanter, minst 30 stk
- Elevark: «Geometri – regulære romfigurer»
- Blyant/viskelær
- Fyrstikker (til bonusoppgaven)

3.1.2 Om regulære romfigurer

Studenten forklarer elevene hva en regulær romfigur er: En regulær romfigur er laget av én type regulære mangekanter av samme størrelse.

1. Alle sideflatene er like og består av en regulær mangekant.
2. Sidekantene er like lange.
3. Hjørnene er like, som vil si at samme antall mangekanter møtes i alle hjørner, og vinklene er like.

Ha klar et eksempel på en romfigur som IKKE er regulær, for eksempel:

1. I to hjørner møtes fem trekanter.
2. I fem hjørner møtes fire trekanter.

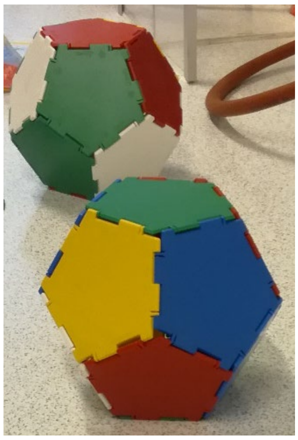


Foto: Ingeborg Berg/NTNU

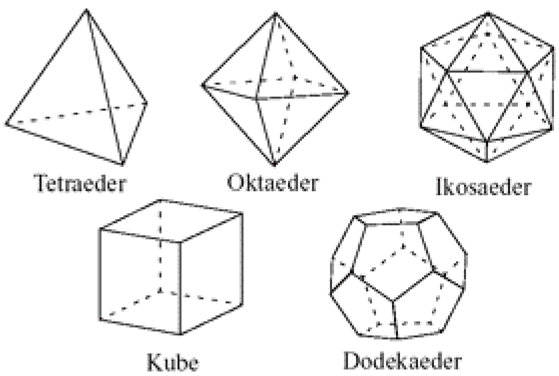
3.1.3 G1: Bygg regulære romfigurer

Elevene skal lage så mange regulære romfigurer de får til i løpet av ca. 15 min.

HINT: Med trekantene kan det lages mer enn en type regulær romfigur.

Oppfordre elevene til å samarbeide tre og tre. Da er det nok brikker til at hver av de to treer-gruppene kan lage hver sin av de fem platonske figurene.

Etter ca. 15 minutter med bygging bør elevene gå videre til neste oppgave. Neste oppgave kan gjennomføres om de har tre forskjellige romfigurer.



Figur: www.matematikk.org

3.1.4 G2: Sideflater, sidekanter og hjørner

Del ut elevarket «Geometri – regulære romfigurer», og be elevene om å telle antall sideflater, hjørner og sidekanter på figurene de har laget. Resultatene settes inn i tabellen. Det er lurt å samarbeide, slik at de får med alt som skal telles, uten å telle noe flere ganger.

Type mangekant brukt	Antall brikker som møtes i hvert hjørne	Sideflater	Hjørner	Sidekanter

3.1.5 G3: Finn en sammenheng

Be elevene studere tabellen de har laget, med oversikt over sideflater og hjørner, og se om de finner noe mønster. Ser det ut som det er mulig å bestemme antall sidekanter når man vet hvor mange hjørner og hvor mange sideflater det er i figuren? Hvordan kan det gjøres i så fall?

HINT: Det er ikke nødvendig å gange eller dele.

NB! Sett av tid til å ta fra hverandre romfigurene før neste gruppe kommer!

Foto: Per Henning/NTNU

3.1.6 G4: Bonusoppgave

Elevene skal bruke fyrstikker til å lage en geometrisk figur etter retningslinjene nedenfor. De får lest opp ei opplysning av gangen og diskuterer etter hvert hvor mye de vet. Elevene kan be om å få lest opplysninger flere ganger, men får ikke se teksten selv.

1. Det er femten pinner i alt. De to trekantene i figuren deler ei side.
2. Den lengste sida i figuren er to pinner lang. Alle pinnene er like lange.
3. Begge trekantene i figuren er likebeinte, men bare en av trekantene er likesida.
4. Kvadratet deler ei side med bare en av trekantene.

Lag figuren!

Ekstra opplysninger hvis de ikke klarer oppgaven:

5. Seks av pinnene i figuren er ikke med i de totrekantene.
6. Figuren består av to trekanter og et kvadrat. Alle sidene er enten én eller to pinner lange (ingen knekte pinner)

Foto: Kai T. Dragland/NTNU

3.1.7 Poengfordeling

Oppgaven gir inntil 10 poeng, i tillegg til to bonuspoeng.

Det finnes totalt **fem regulære romfigurer**:

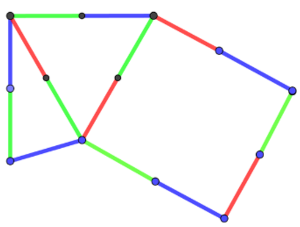
Navn	Type mangekant brukt	Antall brikker som møtes i hvert hjørne	Sideflater	Hjørner	Sidekanter
Tetraeder	Trekanter	3	4	4	6
Heksaeder/ kube	Trekanter	4	8	6	12
Oktaeder	Trekanter	5	20	12	30
Dodekaeder	Firkanter	3	6	8	12
Ikosaeder	Femkanter	3	12	20	30

G1: Å bygge
- 2 regulære romfigurer gir **1 poeng**
- 3 regulære romfigurer gir **2 poeng**
- 4 regulære romfigurer gir **3 poeng**
- 5 regulære romfigurer gir **4 poeng**

G2: Telle sideflater, sidekanter og hjørner
- Riktig antall på 3 regulære romfigurer gir **1 poeng**
- Riktig antall på 4 regulære romfigurer gir **2 poeng**
- Riktig antall på 5 regulære romfigurer gir **3 poeng**

G3: Finn en sammenheng
- Det gis **3 poeng** for å finne sammenhengen mellom antall flater, kanter og hjørner.

G4: Bonusoppgave
- Det gis **2 poeng** for å klare figuren uten ekstra opplysninger.
- Det gis **1 poeng** for å klare figuren med ekstra opplysninger.



Fasit bonusoppgave

4 Måling

4.1 Oppgave 1 – Måleoppgave (areal og volum)

4.1.1 Utstyr

- Lasermåler (OBS! Ikke lys rett inn i øynene)
- Målebånd
- Kladdeark
- Blyant/viskelær
- Lommeregner

4.1.2 M1: Areal og gulvlakk

Elevene skal måle opp ulike gangarealer i U2 og U3 i Realfagbygget. De kan bruke lasermåler for å må nøyaktige målinger om målebånd for å gjøre overslag. Hele gruppa samarbeider om oppdraget, pass på at alle som vil får prøve måleapparatet.

På figuren viser de tykke strekene arealet elevene skal måle opp. De tynne strekene kan brukes som hjelp til å dele opp arealet i målbare enheter. Elevene skal selv finne ut hvordan de bør dele opp arealet for å få målt de lengdene de trenger, men gruppeleder må hjelpe dem i gang hvis de strever.

Oppgave: Hvor stort areal har hele rommet som blir målt opp?

Gulvet på rommet er slitt og det må lakkes på nytt.
Elevene Nils og Ida ønsker å gjøre dette som sommerjobb. De tilbyr seg å kjøpe inn alt materiell, samtidig som de ønsker å ta kr. 2000,- til sammen i arbeidspenger for å gjøre jobben.
Kostnadene for lakken blir kr 60 pr. m^2 og totale utgifter til rull og pensler blir kr. 400,-

Oppgave: Hvor mye lønn skal ungdommene få fra NTNU for jobben?

4.1.3 M2: Volum

Elevene skal nå måle opp og regne ut volumet til en del av området

- BU2: område A
- CU3: område C
- DU3: område C

Hvis det er bjelker i taket må de sørge for å treffe en av bjelkene, ikke åpningen mellom dem.

4.1.4 M3: Rubiks kube

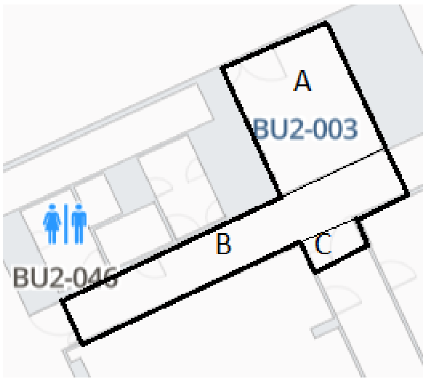
En vanlig rubiks kube har sideflater på 5,5 cm, i boksen ligger kuber av samme størrelse. Elevene skal nå finne ut hvor mange kuber det er plass til på arealet og i volumet de har målt opp. Få dem gjerne til å gjette antallet før de starter, mange blir overrasket over svaret!

Fasit

Med mine målinger:

BU2
A: lengde: 4,847 m, bredde: 3,705 m, høyde: 2,398 m
B: lengde: 11,567 m, bredde: 1,591 m
C: lengde: 1,878 m, bredde: 1,086 m

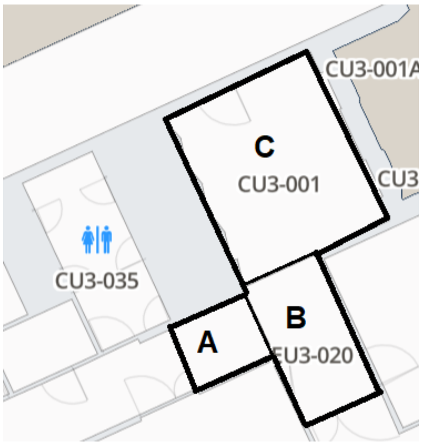
Areal: 38,40074 m^2 ≈ **38,4 m^2**
Volum: 43,0636077 m^3 ≈ **43,1 m^3** (område A)
Lakkering: 38,4 · 60 kr + 400 kr + 2 000 kr = **4 704 kr**
Kuber på arealet: 38,4 m^2 / 0,003025 m^2 = **12 694 stk**
Kuber i volumet: 43,1 m^3 / 0,00016638 m^3 = **259 053 stk**



Skisse BU2

CU3
A: lengde: 3,703 m, bredde: 1,858 m
B: lengde: 1,982 m, bredde: 1,533 m
C: lengde: 4,602 m, bredde: 3,819 m, høyde: 2,295 m

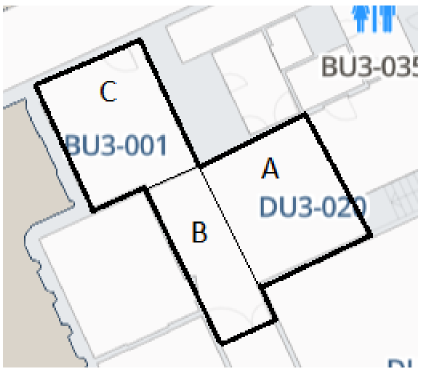
Areal: 27,493618 m^2 ≈ **27,5 m^2**
Volum: 40,3347122 m^3 ≈ **40,3 m^3** (område C)
Lakkering: 27,5 · 60 kr + 400 kr + 2 000 kr = **4 050 kr**
Kuber på arealet: 27,5 m^2 / 0,003025 m^2 = **9 090 stk**
Kuber i volumet: 40,3 m^3 / 0,00016638 m^3 = **242 223 stk**



Skisse CU3

DU3
A: lengde: 4,512 m, bredde: 4,012 m
B: lengde: 6,056 m, bredde: 1,872 m
C: lengde: 4,568 m, bredde: 3,785 m, høyde: 2,296 m

Areal: 46,728856 m^2 ≈ **46,7 m^2**
Volum: 39,6975645 m^3 ≈ **39,7 m^3** (område C)
Lakkering: 46,7 · 60 kr + 400 kr + 2 000 kr = **5 202 kr**
Kuber på arealet: 46,7 m^2 / 0,003025 m^2 = **15 438 stk**
Kuber i volumet: 39,7 m^3 / 0,00016638 m^3 = **238 617 stk**



Skisse DU3

4.1.5 Poengfordeling

Oppgaven gir inntil 10 poeng.

Tallene kan fort avvike hvis måleren holdes litt på skrå, så svaret bør rundes av. Bruk skjønn og gi poeng hvis oppgaven er løst riktig og målene stemmer ganske bra.

M1: Areal og gulvlakk:

- Måling og utregning av riktig areal gir **3 poeng**
- Utregning av riktig pris gir **2 poeng**

M2: Volum

Måling og utregning av riktig volum gir **2 poeng**

M3: Rubiks kube

- Riktig antall kuber på arealet gir **2 poeng**
- Riktig antall kuber på volumet gir **1 poeng**

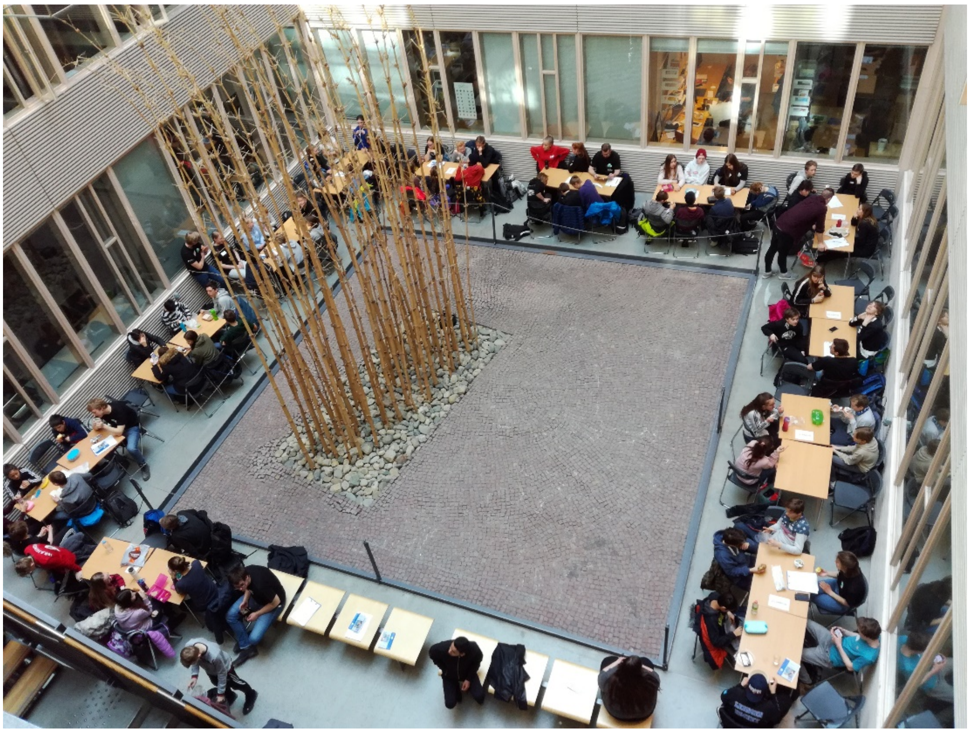


Foto: Ingeborg Berg/NTNU

5 Statistikk og sannsynlighet

5.1 Oppgave 1 – Black box

5.1.1 Utstyr

- Fire bokser med åtte kuler i ulike farger
- Kladdeark
- Blyant/viskelær

5.1.2 S1: Hva skjuler seg i boksen?

Gruppa velger én av boksene, det er viktig at de ikke ser oppi boksen!

Boksen inneholder åtte kuler med *inntil* fire ulike farger. På bakgrunn av trekning skal elevene gjette hvor mange kuler av hver farge som er i boksen. De får bare vite at det er åtte kuler i boksen, og at kulene har forskjellig farge. De får ikke vite hvor mange farger, eller hvor mange kuler av hver farge. Som gruppeleder trekker du én kule, viser fram til elevene, og legger kula tilbake i boksen, trekker på nytt en kule, viser fram til elevene, og legger kula tilbake i boksen, osv. Elevene må notere seg resultatet av trekningene på kladdearkene.

Etter ti trekninger må elevene gjette hvor mange kuler det er av hver farge. Deretter trekkes ti ganger til, og elevene får nå velge om de vil beholde sin første gjetning, eller gjette på nytt. Trekk ti ganger til og gi elevene samme valg.

Foto: Kai T. Dragland

5.1.3 Poengfordeling

Oppgaven gir inntil 3 poeng

Her gis poeng ut fra hvor godt gruppa reflekter over sine valg, og om de klarer å se forskjellen på tilfeldighet og sannsynlighet. De som ønsker større datagrunnlag før de avgir endelig svar belønnes for det.

Hvis gruppa lar gjetningen etter 10 trekk bli stående: **1 poeng**
Hvis de gjetter etter 20 trekk og forklarer hvorfor: **2 poeng**
Hvis de gjetter etter 30 trekk og forklarer hvorfor: **3 poeng**

5.2 Oppgave 2 – Trekk to kort

5.2.1 Utstyr

- Kort med verdiene 1–6
- Ark med spilleregler
- Kladdeark
- Blyant/viskelær

5.2.2 S2: Trekk to kort

Del gruppa inn i tre lag slik at to og to arbeider sammen til å begynne med. Gi hvert par oppgavearket med spillereglene. Elevene skal bruke fire kort med verdiene 1–4.

Demonstrer spillet sammen med en av elevene. Du er da spiller A og eleven spiller B. Du stokker kortene og ber eleven trekke to kort. Hvis summen av de to kortene er et oddetall, får eleven (spiller B) et poeng. Hvis summen av de to kortene eleven trekker er et partall får du (spiller A) et poeng.

Når elevene skal spille to og to skal en elev hele tiden være spiller A og stokke kortene, mens elev B trekker to kort. De gjentar minst ti ganger og noterer hver gang hvem som får poeng. Trekker B to kort der summen er et oddetall, får B poeng. Trekker B to kort der summen er et partall får A et poeng. Poengene noteres på kladdearket.

Når alle har trukket kort minst ti ganger, skal de sammenlikne resultatene og bestemme seg for om de synes spillet er rettferdig. Hele gruppa må bli enige om et svar. De skal også forklare hvorfor de mener spillet er rettferdig eller urettferdig.

Fasit

Spillet er urettferdig.
Fire av de seks kombinasjonene gir oddetallsum, to gir partallsum:

$1 + 2 = 3$	$1 + 4 = 5$	$2 + 3 = 5$	$3 + 4 = 7$
$1 + 3 = 4$	$2 + 4 = 6$		

Hvis elevene svarer at spillet

- er rettferdig, eller
- er urettferdig uten å kunne begrunne hvorfor

kan du gi dem et **hint**: Lag en oversikt som viser hvilke summer det er mulig å få når man trekker to kort. Denne oversikten gir forhåpentligvis gir bedre forståelse.

5.2.3 Trekk to kort – ekstraoppgave

Ikke en del av matematikkløypa fra 2020

Gruppa skal nå ha en holdbar begrunnelse for at spillet Trekk to kort er urettferdig. Del ut kort med verdier 5 og 6.

De skal nå prøve å lage et rettferdig spill ved å bytte ut et av kortene med verdier 1-4 med enten 5 eller 6 slik at de fortsatt har fire kort.

Det er mulig å lage et rettferdig spill ved enten å bytte ut et partall (2 eller 4) med oddetallet (5), eller et oddetall (1 eller 3) med partallet (6).

Elevene må igjen begrunne løsningen sin med å lage en oversikt.

5.2.4 Poengfordeling

Begrunnelse for at spillet Trekk to kort er urettferdig *uten* hint: **2 poeng**.
Begrunnelse for at spillet Trekk to kort er urettferdig *med* hint: **1 poeng**.

Lage et rettferdig spill ved å bytte inn 5 eller 6: **1 poeng**

5.3 Oppgave 3 – Rettferdig trekning

5.3.1 Utstyr

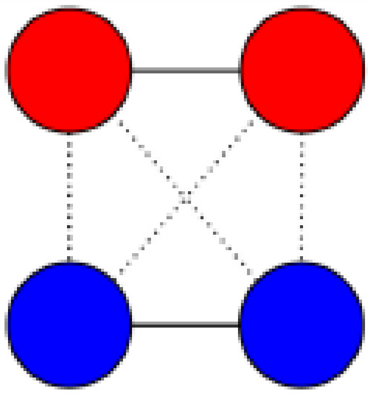
- Pose med to røde og to blå kuler (oppgave S3)
- Ekstra røde og blå kuler (oppgave S4)
- Oppgaveark: «Statistikk – rettferdig trekning»
- Blyant/viskelær

5.3.2 S3: Er trekningen rettferdig?

Elevene kan jobbe i grupper på tre og tre. Del ut oppgavearket «Statistikk – rettferdig trekning» og røde og blå kuler. Elevene bør også ha blyant og kladdeark tilgjengelig.

Mia og Martin krangler stadig om hvem som skal bære ut søpla, men en dag kommer Mia på noe lurt. Hun legger to røde og to blå kuler i en pose. Mia og Martin skal trekke ei kule hver fra posen (uten å legge den tilbake). Dersom de trekker to kuler med samme farge, skal Mia gå ut med søpla, men har kulene forskjellig farge, må Martin gjøre det. Det synes Martin høres rettferdig ut.
Er dere enig med Martin? Hvorfor/hvorfor ikke?

Elevene må begrunne svaret.
Dersom elevene har problemer med å komme i gang med oppgaven kan det være til hjelp å gjennomføre 10-20 trekninger, for å observere at trekningen er urettferdig.
Videre kan det
være lurt å tegne (tell antall heltrukne og stiplede linjer) eller skrive ned mulige utfall av trekningen:



R_1-R_2	R_1-B_1	R_1-B_2
R_2-R_1	R_2-B_1	R_2-B_2
B_1-R_1	B_1-R_2	B_1-B_2
B_2-R_1	B_2-R_2	B_2-B_1

Fasit

Når det først er trukket ei kule, enten råd eller blå, vil det alltid være to av motsatt farge og ei av samme farge igjen i posen. Sannsynligheten for å trekke ei som er forskjellig vil derfor være 2/3, mens det er 1/3 sannsynlighet for å trekke ei som er lik den som allerede er trukket.

5.3.3 S4: Bonusoppgave: Hvilke alternativ gir rettferdig trekning?

Hvilke av disse fem alternativene vil gjøre at trekningen blir rettferdig (Mia og Martin trekker ei kule hver som før)? Begrunn svaret!

- 2 røde og 1 blå
- 3 røde og 1 blå
- 3 røde og 2 blå
- 3 røde og 6 blå
- 1 rød og 4 blå

Her vil det være nyttig å tegne eller skrive ned mulige utfall. Del gjerne ut ekstra kuler.

Fasit

3 røde og 1 blå + 3 røde og 6 blå gir rettferdig trekning.

5.3.4 Poengfordeling

S3: Rettferdig trekning

- Riktig svar med begrunnelse gir **4 poeng**.
- Riktig svar med halvgod begrunnelse gir **3 poeng**.

S4: Rettferdig trekning bonusoppgave

- To riktige svar med begrunnelse gir **2 poeng**.
- Ett riktig svar med begrunnelse gir **1 poeng**.

6 Talloppgaver

Ikke en del av Matematikkløypa

6.1 Oppgave 1 – Talloppgaver

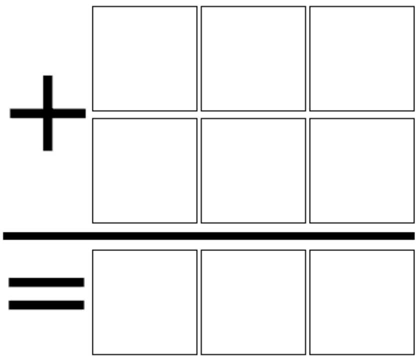
6.1.1 Utstyr:

- 2 sett med elevark i A4
- 2 sett med løse tall 0 – 9
- 2 kalkulatorer
- Blyanter/viskelær

6.1.2 T1: Regnestykket skal stemme (størst sum)

Elevene skal plassere de 9 sifrene 1 – 9 slik at de danner en sum av to tresifrede tall i tillegg til en tresifret sum. Oppgavene har mange løsninger. Oppgaven går ut på å finne en sum som er **så stor som mulig**.

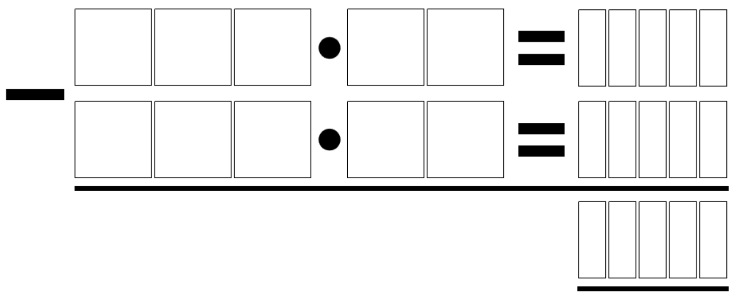
Legg merke til at tverrsummen for summen for alle riktige svar er 18.



6.1.3 T2: Nærmest null

Elevene skal plassere de 10 sifrene 0 – 9 slik at de danner to produkter. De kan skrive produktene med blyant i rubrikken til høyre. Oppgaven går ut på at de skal plassere sifrene slik at de to produktene blir mest mulig like. Dvs. at differansen mellom dem blir **nærmest mulig null**. Selv om det er mulig å oppnå en differanse lik null, skal elevene ikke opplyses om dette.

Siden det er vanskelig å vite sikkert at de har funnet den største summen eller den minste differansen, bør du passe på at de fordeler tiden mellom oppgavene på posten. Eller at de deler oppgavene mellom seg.



6.1.4 Poengfordeling

T1: Regnestykket skal stemme (størst sum)

- Største sum (981) gir 4 poeng
- 980 – 900 gir 3 poeng
- 899 – 800 gir 2 poeng
- 799-laveste sum gir 1 poeng
- Galt er 0 poeng, eksempeloppgavene gir ikke poeng

T2: Nærmest null

- Minste differanse = 0 gir 6 poeng
- 1 – 10 gir 5 poeng
- 11 – 50 gir 4 poeng
- 51 – 150 gir 3 poeng
- 151 – 300 gir 2 poeng
- 301 – 500 gir 1 poeng
- 501 – , eller gal utregning gir 0 poeng

Det spiller ingen rolle om differansen er positiv eller negativ.

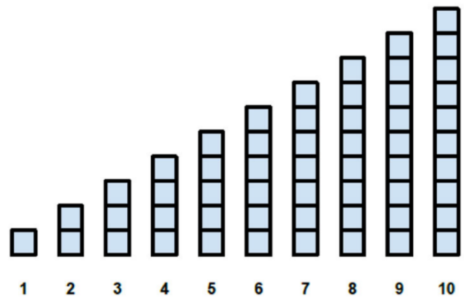
6.2 Oppgave 2 – Talltårn

6.2.1 Utstyr

- Ti staver med lengde 1, 2, 3, …, 10
- 10 enheter, som vist i figuren under
- Elevark
- Blyant/viskelær

Foto: Kai T. Dragland/NTNU

6.2.2 T3: Oppgavebeskrivelse



Tre og tre elever får utdelt ti staver med lengde 1, 2, …, 10 enheter som vist på figuren. Stavene kan ikke deles. Elevene skal bygge talltårn med stavene. Alle stavene skal brukes.

Det er viktig å poengtere for elevene at staven *ikke* kan deles, selv om det er fysisk mulig å gjøre dette.

1. Undersøk om du kan bygge to tårn som er like høye med stavene 1-8.
   Her vil nok de fleste elevene prøve og feile til de kommer fram til to tårn som er like høye, men de vil neppe reflektere over hvorfor (18 enheter i hvert tårn).
2. Undersøk om du kan bygge to tårn som er like høye med stavene 1-9.
   Her blir det nok også prøving og feiling, -og sikkert en del frustrasjon! De fleste vil nok flere ganger bygge tårn hvor forskjellen i lengde er 1. Noen vil nok allerede her se på summen av stavene som blir et oddetall, og dermed se sammenhengen. Hvis de bruker alt for lang tid uten å komme til noen konklusjon, kan de gå over til neste punkt.
3. Undersøk om du kan bygge to tårn som er like høye med stavene 1-10.
   Se punkt 2.
4. Se for deg at du har en ekstra stav med lengde 11 enheter. Er det mulig å bygge to like høye tårn? Hvorfor/hvorfor ikke?
   Her er det meningen at elevene skal komme fram til at summen av lengdene er et oddetall, og derfor ikke er delelig med 2.

Elevene skal nå undersøke sammenhengen mellom antall staver som tas med i tårnbyggingen og muligheten for å bygge to like høye tårn.

5. Fyll ut tabellen

Antall staver (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Sum lengde av stavene (S_n)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
To like høye tårn (ja/nei)?	Nei	Nei	Ja	Ja	Nei	Nei	Ja	Ja	Nei	Nei	Ja

6. Anta at du har *n* staver med lengdene 1, 2, 3, … *n*. For hvilke *n*-verdier er det mulig å bygge to like høye tårn?
   Det er mulig for n=3, 4, …,7, 8, …, 11. Her er det mange ulike svar som kan forventes:

- Du starter med 3 og 4, så hopper du over 5 og 6, så blir det 7 og 8. Slik fortsetter det.
- Verdiene for n må være i 4-gangen eller én mindre enn 4-gangen

Hvorfor er det slik?
Summen av stavene må være et partall (delelig med 2) for at det skal være mulig å bygge to like høye tårn. I tabellen ser vi at summen er delelig med 2, to ganger etter hverandre, og så er det to ganger der summen ikke er delelig med 2.

7. Tenk deg at du skal bygge tre like høye tårn. Undersøk mulighetene for dette, og lag gjerne en ny rad i tabellen. Hvis du har *n* antall staver, for hvilke *n*-verdier kan du bygge tre like høye tårn?

Antall staver (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Sum lengde av stavene (S_n)	1	3	6	10	15	21	28	35	45	55	66
To like høye tårn (ja/nei)?	Nei	Nei	Ja	Ja	Nei	Nei	Ja	Ja	Nei	Nei	Ja
Tre like høye tårn	Nei	Ja	Ja	Nei	Ja	Ja	Nei	Ja	Ja	Nei	Ja

Summen av stavene må være delelig med 3 for at det skal være mulig å bygge tre like høye tårn. I tabellen ser vi at summen er delelig med 3 to ganger etter hverandre og så er det en gang summen ikke er delelig med 3.

8. Hva er det størst sjanse for å få til for en gitt *n*-verdi, to like høye tårn eller tre like høye tårn? Hvorfor er det slik?
Sjansen for å kunne bygge tre like høye tårn er 2/3, og sjansen for å kunne bygge to like høye tårn er 2/4. Det er derfor størst sjanse for å kunne bygge tre like høye tårn. Vi ser av tabellen at det blir slik.

Foto: Kai T. Dragland/NTNU

6.2.3 Bonusoppgave

Dersom noen trenger en ekstra utfordring:
Finn et uttrykk for summen (Sn) av stavene ved hjelp av antall staver (n).
Her er det mange mulige løsningsmetoder. Bruker 8 staver som eksempel.

Alternativ 1:
1 2 3 4
8 7 6 5
9 9 9 9

Det blir 9 · 4 når det er 8 staver, det vil si $S_n = (n+1)\frac{n}{2}$

Alternativ 2:

X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	*
X	X	X	X	X	X	*	*
X	X	X	X	X	*	*	*
X	X	X	X	*	*	*	*
X	X	X	*	*	*	*	*
X	X	*	*	*	*	*	*
X	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*

På figuren er de 8 stavene lagt ved siden av hverandre (markert med stjerner). Så fyller vi ut med like mange X slik at vi får et rektangel med lengde lik 8 og bredde lik 9. Da blir summen dobbelt så stor som den skal være. Vi får $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$
Da blir $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

6.2.4 Poengfordeling

Gruppa kan maksimalt få 10 poeng på oppgaven, i tillegg til 2 bonuspoeng.

- Riktig svar på **oppgave 1** gir **1 poeng**
- Riktig svar på **oppgave 2** gir **1 poeng**
- Riktig svar på **oppgave 3** gir **1 poeng**
- Riktig svar på **oppgave 4** gir **2 poeng**
- Riktig svar med begrunnelse på **oppgave 6** gir **1 poeng**
- Riktig svar med begrunnelse på **oppgave 7** gir **2 poeng**
- Riktig svar med begrunnelse på **oppgave 8** gir **2 poeng**

Riktig svar på **bonusoppgaven** gir ytterligere 2 poeng.

Foto: Kai T. Dragland/NTNU

Matematikkløypa er en av de siste løypene som er kommet til blant Realfagløypene ved NTNU. Den ble etablert som en pilot i mars – april 2014 på initiativ fra prodekanene for undervisning ved SVT, IME, IVT og NT fakultetet, samt betydelig støtte fra prorektor. Forøvrig ble grunnlaget lagt året før under Abel-dagen den 23. mai 2013 da 240 elever fra 8-trinn laget en matematikkfest for Abel-prisvinneren Pierre Deligne.

Hensikten med matematikkløypa er å gi elever på 8. trinn i ungdomsskolen en positiv opplevelse av at matematikk også kan være lek, spill og utforskning.

Heftet er en samling med oppgaver fra Matematikkløypa, og det faglige innholdet er utarbeidet i et samarbeid mellom Institutt for matematiske fag, Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen og Skolelaboratoriet.

I tillegg til dette er det lagt ned en betydelig egeninnsats fra ansatte ved Skolelaboratoriet, Institutt for matematiske fag og Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen i tillegg til andre som brenner for matematikkfaget.

Nils Kr. Rossing
Dosent ved Skolelaboratoriet ved NTNU og prosjektleder ved Vitensenteret
E-post: nils.rossing@ntnu.no

Maren Fredagsvik
Tidligere prosjektkoordinator for Realfagløypene

Ingeborg Berg
Universitetslektor ved Skolelaboratoriet ved NTNU
Prosjektkoordinator for Realfagløypene
E-post: ingeborg.berg@ntnu.no

NTNU

Skolelaboratoriet
for matematikk, naturfag og teknologi
www.ntnu.no/skolelab

Institutt for matematiske fag

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringa