Jonas Persson

Dimensionsanalys

Trondheim, november 2014

Kompendium

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for **samfunnsvitenskap og teknologiledelse**
Program for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Dimensionsanalys

Jonas Persson
Skolelaboratoriet
Program for lærerutdanning
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Trondheim, november 2014

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Innehåll

Förord

Det finns många verktyg inom naturvetenskap och ingenjörsvetenskap. Vi har idag lärt oss att förlita oss mer och mer på datorer och deras simuleringsförmåga. Detta har dock gjort att man får en brute-force inställning till problem och problemlösning, vilket gör att man hellre förlitar sig på detta än att hitta enklare lösningar. När man ställs inför ett komplext problem är det lätt att söka efter en mer eller mindre bra datorbaserad modell, eller i fallet med experiment börja samla en stor mängd mätdata.

Det finns dock metoder för att underlätta lösandet av komplexa problem och en av dom är dimensionsanalys. Själva metoden har utvecklats under flera hundra år men fick sin moderna form först i början av 1900-talet, då det teoretiska grundlaget las och bevisades. Här fick man ett kraftfullt verktyg som underlättade studiet av komplexa system. Dimensionsanalysen blev med detta ett verktyg som ingick i undervisningen vid många universitet runt om i värden. Dock har detta förändrats och dimensionsanalysen har försvunnit eller minskat i betydelse trots sin användbarhet. Detta kompendium är ett försök att visa på att dimensionsanalys är nyttigt och erbjuder en väg till att arbeta och tänka mer effektivt. Jag har försökt att hålla på formalismen för att visa att dimensionsanalysen vilar på en solid matematisk grund, samtidigt som den ställer en del mycket fundamentala frågor om den fysiska verkligheten. Detta gör att delar av kompendiet är mycket tungt att läsa, men då kan det vara bra att samtidigt som man läser om det formella samtidigt tittar på de mer praktiska exemplen. Det som är viktigt är att dimensionsanalys fungerar och kanske inte i första hand varför den fungerar.

Jonas Persson
Trondheim, April 2014

En uppdateringen har gjorts där ett antal tryckfel och mindre lyckade formuleringar har korrigerats.

Jonas Persson
Trondheim, September 2016

Kapitel 1

Introduktion

Dimensionsanalys erbjuder en metod för att reducera ett komplext problem till den enklaste möjliga form innan man hittar en kvantitativ lösning. P.W. Bridgman formulerar detta i sin bok om dimensionsanalys [1]:

> The principal use of dimensional analysis is to deduce from a study of the dimensions of the variables in any physical system certain limitations on the form of any possible relationship between those variables. The method is of great generality and mathematical simplicity.

Den grundläggande principen bakom dimensionsanalysen är likhet, en gemensam nämnare. Den gemensamma nämnare som avses i fysiska system är grundläggande fysikaliska storheter. Vi har ett begränsat antal av dessa storheter, något som vi använder i SI-systemet, där vi har sju grundenheter.

Storhet	Namn	Symbol
Längd	meter	m
Massa	kilogram	kg
Tid	sekund	s
Elektrisk ström	ampere	A
Termodynamisk temperatur	kelvin	K
Ljusstyrka	candela	cd
Materiemängd	mol	mol

Tabell 1.1: SI systemets grundenheter

Med kunskap om dessa och principerna för dimensionsanalys är det möjligt att lösa problem som till synes ser ut att vara olösbara.

Idén bakom dimensionsanalys hittar vi delvis i Fouriers arbeten under de första årtiondena av 1800-talet. Men det var först under slutet av 1800-talet som man började med en mer metodisk behandling, bland annat i arbeten av Lord Rayleigh, Reynolds, Maxwell, Carvallo osv. Med Buckinghams Π-teorem 1914 [2], var principerna på plats. Efter detta har dimensionsanalysen fått applikationer inom många olika områden: aerodynamik, hydralik, mekanik, kemiska reaktioner och så vidare. En stor del av framgången ligger i att resultaten bekräftats av experiment.

Tillämpningarna och succén gör att dimensionsanalysen har starkt stöd, men det finns en debatt om metodens teoretiska och filosofiska grundval. Matematiker finner oftast en brist i den grundläggande formalismen medan fysiker och ingenjörer kan ha problem med den fysiska verkligheten bakom analysen. Tittar man närmare på de filosofiska grundvalarna så ser man att de är ganska djupa och något som många fysiker och ingenjörer har förlorat kontakt med då dom faller tillbaka på själva naturen hos de egenskaper hos naturen som vi konstruerar för att beskriva den fysiska värden och förklara hur den fungerar med kvantitativa termer.

Nu är inte målet med denna skrift att gå in en djupare filosofisk diskussion om naturens egenskaper utan att visa på nyttan och användbarheten i dimensionsanalys. Dock är det viktigt att skaffa sig en formell grund vilket vi startar med i kapitel 2.

Kapitel 2

Fysiska egenskaper och storheter

2.1 Fysiska egenskaper

Vetenskap börjar med observationer och en så precis beskrivning av händelser och objekt som möjligt. Det är just i denna beskrivning av objekt och händelser som kärnan i dimensionsanalysen ligger. Men samtidigt är det omöjligt att beskriva något i absoluta termer, all beskrivning som vi gör sker i relation till någonting.

När vi till exempel säger att någonting är ett träd, så betyder det att vi har ett antal egenskaper som vi kommit överens om, som beskriver en familj av objekt som vi kallar träd. Vi känner igen ett träd när vi ser det, men att beskriva det är en komplex process. I vetenskapen försöker vi att bryta ner den beskrivande processen till så enkla termer som möjligt. Vi beskriver ett objekt utifrån så enkla termer som möjligt, såsom längd, massa, färg, form, fart och tid. Men ingen av dessa termer kan definieras i absoluta termer, bara i relation till någonting. Ett objekt har en längd som mäts relativt en meterstav, massan med massan hos ett bestämt objekt (kg-vikt) eller formen av en sfär. Dessa referenser kan göras mer precisa men är i grunden inget annat än en jämförelse med något som vi bestämt skall användas för jämförelser. Det enda vi kan göra är att jämföra ett objekt med ett annat.

En fysisk egenskap är ett begrepp som är baserat på erfarenhet och som har formaliserats så att det är möjligt att jämföra två objekt så att man kan säga om dom är lika eller olika. Detta sker genom en jämförelse-operation[1], med resultaten; lika ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$) eller olika ($\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$). (Fet stil används för fysiska egenskaper) Denna operation som är en fysisk process, är det som definierar egenskapen. Detta gör att bara egenskaper som är lika kan jämföras. Till exempel är det meningslöst att jämföra en viss längd med en massa.

[1] Med en operation menar jag en process som ger egenskaperna hos ett objekt eller system. Detta är samma som man använder i bland annat kvantmekaniken där man har en matematisk beskrivning av ett system i form av en vågfunktion och för att få information om det systemet så utför man en matematisk operation och får ut ett egenvärde för den egenskap som operationen handlar om. Denna operation kan motsvara en mätning av exempelvis positionen, där vi matematiskt sett applicerar positions-operatorn på vågfunktionen och får ut positionen som en egenskap för vågfunktionen.

Om vi enbart definierar egenskapen utifrån jämförelse-operationen, så kan vi se om två objekt är lika eller olika, men har ingen möjlighet att se om det betyder att en är större eller mindre än den andra. Här kan vi ta form och färg som exempel. Vi kan jämföra två objekt och se om dom har samma form eller samma färg. Men att fråga om vilket objekt som är mer runt eller mer grönt än det andra är meningslöst. Egenskaper som form och färg är användbara när det gäller att beskriva saker, men de kan inte användas i en kvantitativ analys, som baseras på relativa storheter.

2.2 Fysikaliska storheter och basstorheter

Vetenskap startar med observationer och beskrivningar, men målet är att från dessa observationer skapa "lagar" som beskriver det vi ser i den fysiska världen på ett så enkelt och generellt sätt som möjligt. Att det matematiska språket är idealt för detta är ingen slump, utan följer som en konsekvens av de begränsningar vi ger dom fysiska egenskaperna som vi tillåter i en kvantitativ analys. Dom egenskaper som vi använder i den kvantitativa analysen kallas för fysiska storheter. Man talar om två typer av fysiska storheter; basstorheter och härledda storheter. Basstorheterna, som enbart definieras i fysiska termer, bildar ett fullständigt set av storheter som fungerar som basen för ett öppet system av härledda storheter, som kan introduceras efter behov. Tillsammans kommer basstorheterna och de härledda storheterna att bilda basen för att beskriva och analysera den fysiska världen i kvantitativa termer.

För att kunna använda basstorheterna i en kvantitativ analys behöver vi använda ytterligare en operation i tillägg till jämförelseoperationen. De kvantitativa kraven gör att vi kan skapa en additionsoperation som ger en summa av storheten (egenskapen) $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Genom att även jämförelse-operationen gäller har $\mathbf{C}$ samma egenskap som $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$. Med andra ord, för att ha en kvantitativ fysisk storhet måste den kunna klara en jämförelseoperation och en additionsoperation. Här är det viktigt att observera att jämförelseoperationen och additionsoperationen innebär en fysisk manipulation av objekt eller händelse. Som att mäta en sträcka med en linjal eller lägga till ett objekt på ett annat för att få en större längd eller massa.

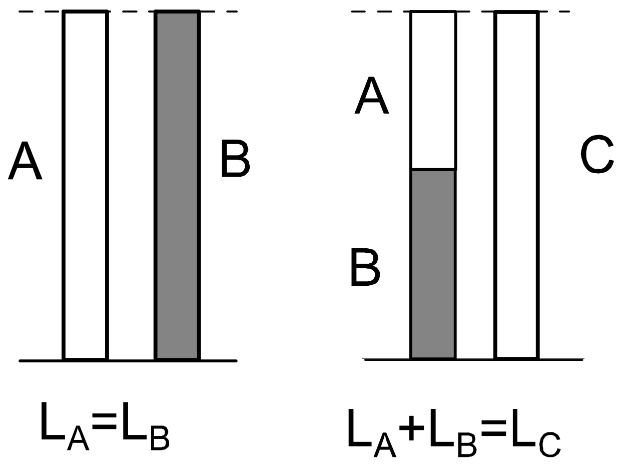
Vi har talat om jämförelseoperationen och additionsoperationen som fysiska operationer, men vi vill att dom skall likna motsvarande matematiska operationer för rena tal. För att detta skall vara möjligt måste dom ha vissa egenskaper:

1. Jämförelseoperatorn måste uppfylla identitetslagen. (om $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ och $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ medför det $\mathbf{A} = \mathbf{C}$)

2. Additionsoperation måste vara kommutativ ($\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$), associativ $[\mathbf{A}+ (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}]$ och unik (om $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, finns inget finit $\mathbf{D}$ så att $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}$)

Tillsammans kommer då operationerna att definiera, i rena fysikaliska termer:

1. Konceptet av större och mindre för lika egenskaper (om det finns ett finit $\mathbf{B}$ så att $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, så gäller $\mathbf{C} > \mathbf{A}$)



Figur 2.1: Jämförelse och additionsoperation med längder.

2. Subtraktion av lika egenskaper (om $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, så gäller $\mathbf{A} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$)

3. Multiplikation av en fysisk storhet med ett tal (om $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{A}$ så gäller $\mathbf{B} = \mathbf{3A}$)

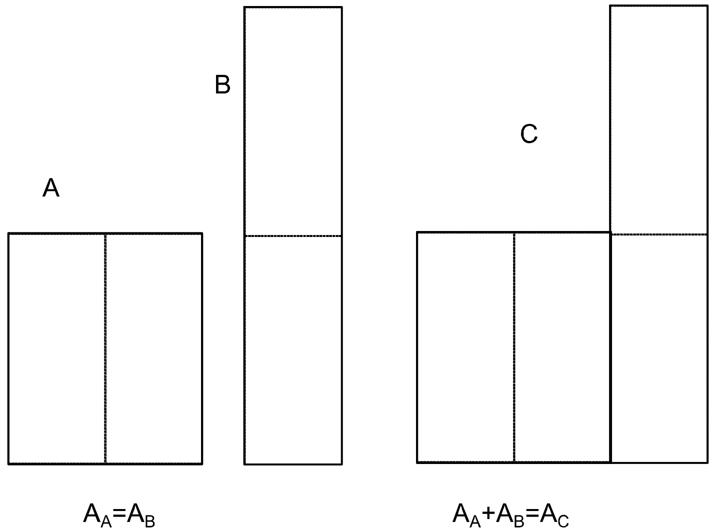
4. Division av en fysisk storhet med ett tal (om $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{A}$ så gäller $\mathbf{A} = \mathbf{B}/\mathbf{3}$)

Vi har alltså förutom jämförelse och addition, även subtraktion, multiplikation och division med tal. Dessa är fysiska operationer som har en direkt koppling till fysiska objekt och händelser, samtidigt som dom uppfyller samma regler som motsvarande matematiska operationer för rena tal.

Vi har nu fått en logisk och formell grund att bygga vidare på. Med detta har vi gått bortom den enkla beskrivningen och har ett kvalitativt sätt att arbeta med matematiken som språk. Det är viktigt att notera att andra matematiska operationer än dom som listats ovan inte är definierade i fysiska termer. Ingen definierande funktion existerar som kan bilda en konkret storhet som representerar exempelvis, produkten av en massa och en tid. Det samma gäller för exponenter, logaritmer, trigonometriska funktioner och så vidare. Dessa är definierade för rena tal och har ingen fysisk motsvarighet i operationer som handlar om reella fysiska basstorheter. Observera att detta gäller en jämförelse, vi skapar en ny fysisk storhet men då rör det sig om en fysisk operation i första hand.

Figur 2.1 och figur 2.2 visar jämförelse och additionsoperationer med längd och areal. Det ser enkelt ut men är egentligen en noggrant formulerad procedur med koncepter som kan vara ganska komplexa.

Många kan bli förvånade att se areal som en möjlig basstorhet, då man vanligen inte använder areal som en av basstorheterna. I detta fall har jag tagit med den för att visa att valet av basstorheter kan göras på olika sätt. Det som är viktigt är att dom valda basstorheterna kan bilda ett fullständigt set och då spelar det inte någon roll vilka man väljer. Av praktiska skäl, som vi kommer



Figur 2.2: Jämförelse och additionsoperation med arealer.

till, så behöver man ytterligare några egenskaper för val av basstorheter, till exempel när det gäller reproducerbarhet och precision (se kapitel 3.).

Vi kan redan här notera att tid är ett problematisk begrepp och fysisk storhet. Begreppet tid är något som vi har djup inrotat i oss som biologiska varelser. Men tid är inte en "sak" utan något som karakteriserar en händelse. Det vi måste göra är att ha en pragmatisk hållning till tid och se det som om det är definierat i termer av jämförelse och additionsoperationer med någon form av idealiserade klockor. Vad tid "är" måste vi lämna då det inte är relevant för oss i detta fall.

Vi har noterat att form och färg är acceptabel fysiska storheter, men dessa kan inte vara basstorheter för dom saknar en acceptabel additions operation. Form är uppenbart diskvalificerad, men färg? Vi vet att färg i ljus kan adderas enligt väl definierade regler, som när rött ljus adderas på grönt för att ge gult. Men, svaret är nej! Blå är blå och additions operation blå + blå ger blå. Additionsoperationen ger $nA = A$ (för alla n ($\neq 0$)) för vilken färg som du än väljer. Detta är inte möjligt för en basstorhet. Vi har regler för hur man adderar längder men inte hur man adderar hur färger upplevs.

2.3 Enheter och numeriska värden

Med de två operationerna är det möjligt att skapa en kvantitativ jämförelse eller mätning. Det man gör är att man definierar en enhet som fungerar som referens. Denna enhet kan väljas godtyckligt. Det handlar om att identifiera och replikera enheten genom att använda jämförelse och additionsoperationerna. I grunden handler det om att jämföra och addera enheter eller delar av enheter tills summan motsvarar den egenskap som mäts. Antalet hela och delar av enheter ger då det *numeriska värdet* av egenskapen som mäts. Om vi har valt **a** som enheten för storheten **A**, och själva mätningen ger det numeriska värdet A, får vi:

$$\mathbf{A} = A\mathbf{a} \tag{2.1}$$

Notera att mätningsprocessen är en fysisk process, även om vi använder operatorerna. Den enda matematiska processen består i att räkna antalet delar som kopplas till enheten.

Här kommer det numeriska värdet att vara beroende på den enhet som man har valt. Det betyder att det numeriska värdet är meningslöst utan enheten, då det inte betyder något ur en fysisk synvinkel. Samtidigt är det viktigt att notera att valet av enhet, som är fritt, gör att man kan ha flera beskrivningar av samma egenskap beroende på enheten som valts. Vi kan alltså uttrycka storheten med flera olika enheter så att:

$$\mathbf{A} = A\mathbf{a} = A'\mathbf{a}' \tag{2.2}$$

Till exempel om man mäter sin längd i cm eller tum. Om enheten $\mathbf{a}'$ är n gånger större än $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a}' = n\mathbf{a} \tag{2.3}$$

följer att.

$$A' = n^{-1}A \tag{2.4}$$

Det vill säga att om basstorhetens enhet ändras med en faktor n, så ändras det numeriska värdet med n^{-1}.

Genom konventioner så mäts alla basstorheter i termer av samma enheter (längd i meter, tid i sekunder och så vidare). Notera att förhållandet mellan numeriska värden av en storhet är oberoende av enheterna och alltid den samma. Detta gäller även basstorheter av samma typ som adderas fysiskt ($\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$), här kommer de numeriska värdena att uppfylla samma form av ekvation ($A + B = C$), oberoende av enheten. Med andra ord den numeriska ekvationen imiterar den fysiska, och formen är oberoende av enheternas storlek.

2.4 Härledda storheter, dimensioner och dimensionslösa samband

När vi skall beskriva ett fysiskt objekt eller händelse kvantitativt, så använder vi oss av numeriska värden av basstorheter. Dessa värden kan sedan sättas in i formler och ge värden på ytterligare storheter. Vi kan exempelvis bestämma den förflyttning (s) som ett objekt gör under en tid (t) och ut från detta bestämma dess hastighet ($V = s/t$); eller om vi mäter objektets massa (m) och hastighet (V) , kan vi bestämma objektets kinetiska energi ($E_K = mV^2/2$). Dessa är då så kallade härledda storheter av första graden.

Basstorheterna har ett tydlig fysiskt ursprung, vilket ger att förhållandet mellan två värden i basstorheten är konstant om enheten för basen ändras, ett godtyckligt val kan inte påverka ett relativt fysiskt förhållande. Bridgman [1] postulerade att detta är en egenskap hos alla fysiska storheter. Bridgmans princip om signifikansen av den absoluta relativa förhållandet:

> A number Q obtained by inserting the numerical values of base quantities into a formula is a physical quantity if the ratio of any two samples of it remains constant when base unit sizes are changed.

Bridgman fördjupade detta genom att visa att en monom funktion uppfyller denna princip endast om den har en exponent form.

$$Q = \alpha A^a B^b C^c \dots \tag{2.5}$$

Där A, B, C, etc. är numeriska värden för basstorheterna och koefficienten α och exponenterna a,b,c, etc är reella tal vars värden skiljer de olika härledda storheterna från varandra. Alla monoma härledda storheter har denna form, inga andra representerar en fysisk storhet.

En härledd storhet av andra graden är definierad i termer av numeriska värden som beror på valet av basenhet. En härledd storhet behöver inte representera något fysiskt så som en basstorhet måste. Här kan vi ta roten ur tid som ett exempel. Det är en härledd storhet då den uppfyller villkoren, men vi kan inte peka på något som är roten ur tid.

För att undvika att tala om enheter för storheter som kan sakna fysisk signifikans, men vars värden beror på val av basenhet, introducerar vi dimensions begreppet. Här talar vi då om att varje basstorhet per definition har en egen dimension. Om A är det numeriska värdet för en längd, säger vi att den har *dimensionen för längd.* Konventionen är att skriva dimensionen via hakparentes [A]=L, dimensionen av A är längd. L använder vi för att illustrera dimensionen längd. Med detta vill vi egentligen säga att om längdenheten ökar med en faktor n så minskar det numeriska med en faktor n^{-1}.

Dimensionen för en härledd storhet ger samma information som basstorheter i generaliserad form. Vi tittar på en härledd storhet definierad som:

$$Q = \alpha L_1^{l_1} L_2^{l_2} \dots M_1^{m_1} M_2^{m_2} \dots T_1^{t_1} T_2^{t_2} \dots \tag{2.6}$$

där L_i är numeriska värden på olika längder, M_i är numeriska värden på olika massor, T_i är numeriska värden på olika tider, samt koefficienten α och exponenterna är reella tal.

Om längdenheten minskar med en faktor n_L, massenheten med en faktor $n_M$och tidsenheten med en faktor n_T, följer det att det numeriska värdet på Q ändras till:

$$Q' = n^{-1} Q \tag{2.7}$$

där

$$n = (n_L)^{\Sigma l_i} (n_M)^{\Sigma m_i} (n_T)^{\Sigma t_i} \tag{2.8}$$

Detta medför att Q transformeras på samma sätt som det numeriska värdet av basstorheterna med en enhet vars storlek är proportionell mot $L^{\Sigma l_i} M^{\Sigma m_i} T^{\Sigma \tau_i}$, där L,M och T representerar storleken på enheterna för längd, massa och tid. I analogi med dimensionerna för basstorheterna kan vi säga att dimensionen för den härledda storheten Q är:

$$[Q] = (L)^{\Sigma l_i} (M)^{\Sigma m_i} (T)^{\Sigma t_i} \tag{2.9}$$

Oavsett om detta appliceras på en basstorhet eller härledd storhet, är dimensionen en formelmässig indikation på hur storhetens numeriska värde transformeras när basenheterna ändras. En härledd storhets dimension bestäms av sin definition. För att få fram resultatet av 2.9 för en härledd storhet definierad som i 2.6, ersätter vi bara varje storhet i ekvationen med dess dimension och tar bort koefficienten för att få 2.9 genom förenklingar. Till exempel blir dimensionen för den kinetiska energin ($E_K = mV^2/2$), $[E_K] = M(L/T)^2 = ML^2T^{-2}$.

Här måste man vara lite försiktig, för dimensionen är inte en inbyggd egenskap hos ett fysisk objekt, utan beror på valet av basstorheter.

Konventionen är att man specificerar en härledd storhet genom sitt numeriska värde följt av basenheterna med vilka dess värde baseras, enheterna då ordnade i en form som visar storhetens dimension. Tittar vi på uttrycket: Q=0,37 kg $s^{1/2}$ talar det om för oss att Q är en storhet med dimensionen $MT^{1/2}$ och har storleken 0,37 om massan mäts i kilogram och tiden i sekunder. Man kan uttrycka detta (lite slarvigt) som att storheten Q "mäts i enheter om kg $s^{1/2}$" som implicerar både dimensionen och basenheterna som används. Till vardags används enhet och dimension ofta synonymt, men detta är inte helt korrekt.

Sammanfattningsvis kan vi säga följande om härledda storheter:

1. Dimensionen för en härledd storhet är produkten av de olika exponenterna i basstorhetens dimensioner.

2. Summan av härledda storheter med samma dimension är en härledd storhet med samma dimension. Produkter och förhållanden av härledda storheter är också härledda storheter, med dimensionerna skiljer sig oftast från dom ursprungliga storheterna.

3. Alla härledda storheter med samma dimension ändrar sina värden med samma faktor om basenheterna ändras.

4. En härledd storhet är dimensionslös om dess värde är invariant när baserna ändras. Dimensionen sägs vara 1 vilken är den faktor den ändras med när basenheterna ändras.

5. Speciella funktioner (logaritmer, exponenter och trigonometriska funktioner) som verkar på en härledd storhet med dimension, ger generellt sett inte någon härledd storhet, då en förändring i basenheten inte transformeras med en enkel faktor. Det är bara när argumenten i funktionerna är dimensionslösa som värdena hos funktionerna är invarianta under en förändring av basenheterna. Det är således enbart dimensionslösa argument som ger härledda storheter med dimensionen 1. Med andra ord måste argumenten vara dimensionslösa.

2.5 Fysiska ekvationer, dimensionshomogenitet och fysikaliska konstanter

När vi genomför en kvantitativ analys av fysiska händelser och objekt är målet att hitta ett matematiskt förhållande mellan de numeriska värdena för de fysiska storheter som beskriver händelsen eller objektet. Vi är dock inte intresserade i vilket förhållande som helst. Vetenskap handlar om att beskriva en storhet och dess beroende av ett set av andra storheter, med fysiska ekvationer. Naturen i sig bryr sig inte om vilka enheter vi använder. Detta gör att vi enbart är intresserade av numeriska förhållanden som är oberoende av valet av basenheter.

Detta medför en inskränkning i formen hos dom fysiska ekvationerna. Om vi antar att det numeriska värdet Q_0 för en storhet i en fysisk händelse, som bestäms av de numeriska värderna $Q_1 \ldots Q_n$ för ett set av andra storheter, är:

$$Q_0 = f\left(Q_1, Q_2 \ldots Q_n\right) \tag{2.10}$$

Bridgman's princip säger då att förhållanden som visas i 2.10 endast kan vara fysiskt relevanta om Q_0 och f ändras med samma faktor om basenheterna ändras. Med andra ord betyder detta att *en fysisk ekvation måste vara dimensionshomogen.* Detta innebär att:

1. Båda sidor av ekvationen måste ha samma dimensioner.
2. Om en summa finns inom f måste alla termer i summa ha samma dimensioner.
3. Alla argument i exponentiella, logaritmiska och trigonometriska funktioner inom f måste vara dimensionslösa.

I praktiken innebär det att i en fysisk ekvation representerad av:

$$A = Be^{-C} - \frac{(D_1 + D_2)}{E} + F\cos\left(\frac{G}{H}\right) \tag{2.11}$$

måste C och $\left(\frac{G}{H}\right)$ vara dimensionslösa, D_1och D_2 ha samma dimension och A, B,$\frac{D}{E}$ och F ha samma dimension.

En mycket viktig konsekvens av dimensionshomogeniteten är att formen på de fysiska ekvationerna är oberoende av storleken på basenheterna. Varje korrekt fysisk ekvation, det vill säga en ekvation som uttrycker ett signifikant fysiskt förhållande mellan numeriska värden på fysiska storheter, måste vara dimensionshomogen. En anpassad formel härledd från korrekt anpassade empiriska data kan se ut att vara dimensionsinhomogen, då det ser ut som om den bara fungerar i ett specifikt basenhetssystem. Sådana formler kan då skrivas om i en generell homogenform. Bridgman [1] har en procedyr för detta:

1. Ersätt alla numeriska koefficienter i ekvationen med okända konstanter med dimensioner.
2. Bestäm dimensionerna i dessa konstanter genom att kräva att ekvationen skall vara dimensionshomogen.
3. Bestäm de numeriska värdena för konstanterna genom att tillpassa dom till koefficienterna i den ursprungliga ekvationen när enheterna är lika.

Dom grundläggande fysiska ekvationerna kan innehålla olika fundamentala konstanter som har fasta värden när ett enhetssystem har valts. Dessa är bland annat Ljusfarten i vakuum, c, Gravitationskonstanten, G, Planck's konstant h och många andra. Observera att de numeriska värderna för fundamentalkonstanterna kommer att ändras när vi ändrar enhetssystem. Exempelvis om vi använder cm i stället för meter.

2.6 Härledda storheter

Valet av basstorheter är inte unikt utan beror på ett aktivt val. Detta medför att uppdelningen i basstorheter och härledda storheter inte är unik. Det finns generella lagar som kopplar samman storheter i specifika relationer, och dessa lagar kan användas för att transformera härledda storheter till basstorheter och vice-versa. Dessa transformationer är användbara då dom reducerar antalet enheter som måste väljas och förenklar formen på dom fysiska lagarna.

Vi har nämnt area som ett möjligt exempel på en basstorhet med dimensionen [A]. Den uppfyller alla kraven genom sin uppsättning av jämförelse och additions operationer, och den kan mätas i en fritt vald enhet. Använder vi detta kommer vi att finna att vi kan få fram det numeriska värdet för en areal genom dess linjära dimensioner:

$$A = c \int dxdy \tag{2.12}$$

där integrationen sker över arean och c är en konstant med en dimension, vars storlek beror på basenheten för area. Dimensionshomogeniteten ger att c $(= \frac{A}{\int dxdy})$ har dimensionen $[AL^{-2}]$. Det som kan se ut som en fysisk lag är inte det, utan det är vi själva som skapat den via våra egna definitionen. Men, det är möjligt att förenkla 2.12 om vi väljer att definiera area-enheten i termer av kvadrater med sidorna en längdenhet. Detta betyder att c kan sättas till 1 (ett) i detta fall. Area har genom detta blivit en härledd storhet som definieras i termer av operationer med längd. Detta betyder dock inte att area är, i fysisk förstånd, längd i kvadrat, något som vi inte har något fysiskt begrepp om. Men det innebär att area har dimensionen [L^2] så det numeriska värdet för en area kommer att ändras med en faktor n^{-2} när storleken på längdenheten ändras med en faktor n.

Genom att transformera area från en basstorhet till en härledd storhet, har vi uppnått två förenklingar; längdenheten bestämmer automatiskt areaenheten, och konstanten kan ersättas med 1 (ett). Men det är inte ett absolut krav att konstanten skall vara 1 (ett) för denna transformationen. Man skulle kunna välja att definiera areaenheten för en cirkel med diametern en längdenhet, vilket då ger att arean bestäms av:

$$A = \frac{4}{\pi} \int dxdy \tag{2.13}$$

istället för 2.12. Detta är kanske inte så bekvämt men fullt acceptabelt. Men för enkelhet skull väljer man konstanter för att underlätta beräkningar och förbättra formen på de fysiska lagarna. Man hade till exempel kunnat definierat den kinetiska energin som $E_k = mv^2$ istället för $E_k = \frac{mv^2}{2}$, men då hade vi fått skriva den totala energin som $E_{tot} = E_k/2 + E_p$ i stället för $E_{tot} = E_k + E_p$ [2]. Vi finner motsvarande exempel i Gauss och Amperes lagar i integral form när vi använder oss av cgs-enheter, där en faktor 4π dyker upp för att eliminera numeriska faktorer i differentialformen.

Ett mer intressant exempel är kraft. Det är möjligt att välja kraft som en basstorhet med en valfri specificerad enhet. Newtons andra lag specificerar att om ett objekt med massan m utsätts för en total kraft F under icke-relativistiska förhållanden, kommer den att accelerera i den totala kraftens riktning med accelerationen $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ som är relaterad till kraften och massan genom:

$$F = cma \tag{2.14}$$

där c är en universalkonstant med dimensionen $[FT^2M^{-1}L^{-1}]$ om kraft, tid, massa och längd har valts som basstorheter. Detta är en generell fysisk lag som uttrycker en relation mellan numeriska värden för tre olika fysiska storheter som är inblandade i dynamiken hos ett objekt; kraft, massa och acceleration. Vi kan genom att välja enheten för kraft så att den är lika med en enhet massa gånger en enhet för acceleration. Om vi gör detta kommer konstanten att bli ett och vi får då Newtons andra lag i den form vi känner den bäst:

$$F = ma \tag{2.15}$$

där kraft har dimensionen $[MLT^{-2}]$. Ekvationen säger inte att kraft, i fysisk mening, är massa gånger acceleration. Produkten av massa gånger en acceleration är inte definierad i fysiska termer, och i tillägg kan en kraft existera utan någon massa eller acceleration. Ekvation 2.15 ger inte ett recept för att bestämma kraften i alla möjliga fall genom att mäta basstorheter. Vi har istället gett kraft den karraktären av en härledd storhet genom att definiera kraftens enhet i termer av enheterna för massa, längd och tid. Storheter som kan överföras till härledda storheter genom att välja en enhet som motiveras av en generell fysisk lag kallas härledda storheter av första graden. Kraft är ett exempel, men även elektrisk laddning behandlas på samma sätt i SI systemet.

2.7 Enhetssystem

Vi har hittills endast tittat på storheter och enheter i allmänna ordalag. Men nu skall vi börja titta på de enheter som vi har valt. Vi kommer då att prata om enhetssystem. Här är det viktigt att definiera ett enhetssystem:

Ett enhetssystem omfattar

1. en fullständig uppsättning av basstorheter med deras jämförelse och additions operationer.

2. basenheterna, och

[2] Här är det konventionen som bestämt detta. Dock är det så att med Virialteoremet hade den första definitionen av den kinetiska energin att föredra.

3. alla relevanta härledda storheter, uttryckta i termer av sina definitioner (ex. $v = \frac{dx}{dt}$), om de är av andra graden eller i form av de fysiska lagar som definierar deras enhet (ex. $F = ma$ som definierar enheten för kraft) om de är av första graden.

Uppsättningen av härledda storheter är öppen, det vill säga att nya storheter kan introduceras efter behov.

Det är viktigt att observera, som nämnts tidigare, att valet av basstorheter och därmed basenheter kan göras på många olika sätt. Det finns egentligen ingen uppsättning av basenheter (basstorheter) som följer av naturens lagar, utan det handlar om att välja den uppsättning som passar behoven bäst (eller som fungerar bra). Även om naturens lagar inte visar vilken uppsättning som är bäst, bör vi använda naturen eller rättare sagt något i naturen som är relativt enkelt att mäta, men framför allt måste basenheterna baseras på någonting som kan reproduceras med hög precision. Problemet vi då får är att alla mätningar vi gör är relativa, vi har ingenting absolut att relatera dom till, intill vi bestämmer ett visst värde för någonting. I tilllägg måste vi ta hänsyn till dom definitioner av enheter som gjorts tidigare för att undvika stora förändringar i enheterna. Här är övergången från den gamla typen av definition för sekund till mer moderna definitioner ett exempel. Det är även värt att notera att man vill ha en referens som inte ändrar sig över tid. Detta gör att alla materiella standarder inte är optimala då dom kan oxidera eller eroderas. Målet blir då att hitta referenser i naturen, det vi kallar universalkonstanter som inte varierar över tid[3].

[3]Det finns en del forskning som indikerar att vissa av fundamentalkonstanterna varierar med tid. Men detta är en källa för diskussion och inte bekräftat.

Kapitel 3

SI-systemet

Internationella måttenhetssystemet, SI eller SI-systemet, från franskans "Système International d'Unités", är en internationell standard för måttenheter och prefix, och det system som används mest idag. Det är bara tre länder som inte använder SI-systemet idag, USA, Liberia och Myanmar (Burma). SI-systemet har en ganska lång historia innan det antog sin nuvarande form och fortsätter att utvecklas hela tiden. Jag skall ge en översikt av den historiska utvecklingen och visa på status idag och vad som kan ske i framtiden. Delar av historien kan hittas i [3] och [4].

3.1 Historien om SI-systemet

Sedan antiken har det funnit en mängd olika mått system, speciellt när det gäller längd och massa. Här kan man hitta en del kända namn på längdenheter som *stadion* och *fot*, en fot var längden av just en fot (men vems?) och en stadion skulle vara 400 fot. Detta gör att man hittar ett antal olika längder på en stadion när man jämför med moderna mått. Eratosthenes anger en stadion till ett modern värde på 157 m, medan en olympisk stadion är 176 m, en italiensk (Attica) stadion 185 m, en babylonisk stadion 196 m och en egyptisk stadion 209 m. En annan enhet som användes var en *aln*, med den ursprungliga betydelsen "armen från armbågen till spetsen av långfingret". Denna fanns även i romarriket under namnet ulna (det latinska namnet för armbågsbenet). Även denna varierade mellan olika länder och olika tider. Detta gjorde att man fann att det var nödvändigt att ha någon form av systematik internationellt och inte bara nationellt. Detta började blir viktigare och viktigare under den industriella revolutionen och ökade i betydelse när tillverkningen började bli mer organiserad. När man tillverkade ett objekt från grunden och med en hantverkare var detta inte så viktigt men när man började tillverka standardiserade delar som sattes ihop är detta essenssiellt.

Den idémässiga grunden för det som skulle bli SI-systemet hittar vi under 1500-talet när Simon Stevin publicerade en pamflett där han argumenterar för ett decimal system, och att måttenheter och mynt bör indelas med ett decimal system. Även om detta inte kan framstå som revolutionerande idag, så var detta ett stort steg. Det var först 1202 som den första europeiska boken som använde sig av hinduiska (arabiska) siffror publiserades av Fibbonacci, innan dess (men även senare) användes romerska siffror. Nästa stora steg tog under 1600-talet när sekreteraren i Royal Society, John Wilkins, fick i uppdrag att skapa en universell mätstandard ("universal standard of measure"). 1668 hade han en bok färdig "An Essay towards a Real Character and a Philosophical Language". Fyra sidor handlar om fysiska mätningar, där han föreslår det han kallade "universal measure" som härleds från naturen i ett decimalt enhetssystem. Han övervägde jordens median, atmosfärstrycket och pendeln som möjliga källor till ett universalmått. På grund av variationer i atmosfärstrycket och svårigheten att mäta jordens meridian, framstod pendeln som det bästa alternativet. Han föreslog att längden av en "sekund pendel" skulle vara längdstandarden. Vidare att volymen skulle vara kuben av standard längden och massan av en standard volym regnvatten. Med längden av "sekund-pendeln" (ca. 993 mm) ser vi att detta i princip är det system som kom att bli det franska revolutionära systemet, och senare metersystemet. Att vi har den definitionen vi har av sekunden idag, har sitt ursprung både i det gamla Egypten och Babylonien. Egypterna delade in dagen i 24 timmar, medan Babylonierna hade en sexagesimal indelning av dygnet (1/60 och 1/60 av 1/60 och så vidare). Den babyloniska indelningen med 60 är enkel matematisk med bråk, men inte så praktiskt. Dessa båda kom att bilda systemet som vi har idag, med en standardtimme (ca: 1/24 av ett dygn) som delas upp i 60 minuter och $60 \cdot 60$ sekunder.

3.1.1 Metersystemet

Under 1700-talet, blev det än mer viktigt att hitta någon form av internationell standard, detta främst på grund av den ökade handeln och till mindre grad beroende på vetenskapligt utbyte. Olika länder hade då knutit sina nationella system till andra länders system, Spanien till Frankrikes, och Ryssland till Englands. James Watt föreslog att skapa ett globalt måttsystem baserat, liksom Wilkins, på längd och massa och densiteten för vatten. Antoine Lavoiser skapade ett måttsystem när det gällde massa, för sina kemiska experiment 1788. I Frankrike rådde dessutom hungersnöd och social oro som kom att kulminera i den franska revolutionen. Under denna process, kom nationalförsamlingen att sätta upp ett antal kommitteer som skulle reformera landet och minska korruptionen, där just måttsystemet var en källa till korruption genom att det var oöversiktligt[1]. Den 27 juni 1789 tillsattes en kommitté av Académie des sciences för att reformera måttsystemet. Här föreslogs ett samarbete med England och USA för att skapa en gemensam standard för längd baserat på längden av en pendel. England, representerat av John Riggs Miller, och USA, representerat av Thomas Jefferson, accepterade i princip. Problem uppstod med vilken latitud som skulle väljas (tyngdaccelerationen varierar med avseende på latituden, vilket man kände till) innan man kunde enas om latitud 45°N, Jefferson förordade en stavformad pendel i stället för Wilkins som hade ett lod, denna fysiska pendel blir ca: 50% längre, men med samma svängningstid. De gemensamma förslagen var uppe till omröstning i de olika parlamenten, men den amerikanska kongressen antog den inte och det engelska parlamentet drog sig ur när monarkin avskaffades i Frankrike. Vilket gjorde att Frankrike blev ensamma om reformen.

Kommittén som tillsatts av Académie des sciences, kom med ett förslag 1791, där man föreslog tre olika möjligheter till att definiera längdenheten utifrån;

[1] Man hade ofta lokala mått som kontrollerades av lokala tjänstemän, som då kunde fuska.

längden hos sekund-pendeln vid 45°N latitud, en fjärdedel av jordens ekvator och en fjärdedel av meridianen (storcirkeln som går igenom båda polerna). I tillägg föreslogs att massan skulle definieras med destillerat vatten i en kub med sidorna en decimal av standard längden (0,1 m). Till slut valde man att längden skulle definierad utifrån en fjärdedel av meridianen (rättare sagt 1/10000000 av avståndet mellan nordpolen och ekvatorn) något som accepterades av nationalförsamlingen 30 mars 1791.

Det är dock viktigt att observera att detta bara var första steget till att skapa ett nytt måttsystem, det handlade nu om att genomföra alla mätningar och gå vidare med definitionen. För detta delades arbetet upp i fem delar:

1. Mäta avståndet mellan Dunkirk och Barcelona, både i latitud och genom triangulering. [2]
2. Mätning av baslinjen använd i trianguleringen.
3. Mätning av längden av sekundpendeln vid latitud 45°N.
4. Mätning av massan för en given volym av destillerat vatten.
5. Skapandet av konverteringstabeller mellan de gamla och nya måttenheterna

Arbetet fick kungligt tillstånd, men redan dagen efter detta försökte den franske kungen fly. Den politiska oron efter detta gjorde att många av medlemmarna byttes ut men projektet som helhet överlevde. Den verkliga märkesdagen är den 7 april 1795, då meter-systemet blev lag. Då var systemet baserat på preliminära resultat från mätningar gjorda av Cassini 1740. När trianguleringen av avståndet mellan Dunkirk och Barcelona var klar återkom gruppen till Paris 1798. Med de nya data blev en meterprototyp konstruerad i platina[3], samtidigt med en kilo-prototyp. Dessa presenterades för nationalförsamlingen 22 juni 1799. En månad efter Napoleons maktövertagande 10 december 1799, antogs lagen där en meter och ett kilogram definierades utgående från prototyperna. Meter-systemet användes främst i Frankrike, men andra länder kom att ansluta sig under 1800-talet. England skapade 1824 ett eget standardiserat system, det så kallade Imperial system.

Att iden med ett standardiserat system som kunde användas på andra måttenheter var fruktsam, demonstrerades av Carl Friedrich Gauss 1832, när han genom att definiera sekunden som en basenhet kunde ange det jordmagnetiska fältet i termer av millimeter, gram, och sekunder. Innan detta angavs bara den relativa förhållandet. Gauss mätte vridmomentet för en magnet med känd massa och jämförde det med vridmomentet inducerat av gravitationen. Detta gjorde att han kunde uttrycka magnetfältets styrka med hjälp av basenheterna för mass, tid och längd. Hans arbete låg till grund för den utveckling som skedde under 1860-talet, där bland annat James Clerk Maxwell, William Thomson (senare Lord Kelvin) och andra försökte skapa ett koherent system av basenheter och

[2] Sė: Alder. The Measure of all Things – The Seven-Year-Odyssey that Transformed the World.

[3] Man valde platina som vid den tiden var relativt nyupptäckt och som sågs på som ett mirakelmaterial. Dock är rent platinum en mjuk metall, vilket medförde att prototyperna lätt skadades.

härledda enheter. Man lyckades skapa ett koherent system med tre basenheter, centimeter, gram och sekund, det så kallade CGS systemet, med enheterna, erg för energi, dyne för kraft och så vidare. Detta system blev ganska populärt speciellt inom elektromagnetismen och användes långt in på 1960-talet. Här sammanfaller utvecklingen av CGS systemet med elektrifieringen under slutet av 1800-talet, med sitt behov av standarder för att kunna koppla ihop elektriska system och importera elektrisk utrustning.

3.1.2 Meterkonventionen

Meterkonventionen var resultatet av en internationell överenskommelse och signerades 1875. Ursprungligen handlade den enbart om standarderna för meter och kilogram. Dessa bestämdes utifrån ett set av 30 meter-prototyper och 40 kilogram prototyper tillverkade av en legering (90% platinum-10% iridium). En av dessa valdes ut att vara den internationella prototypen för meter och en för kilogram, dessa ersatte de gamla franska prototyperna. Men viktigare var att man med meterkonventionen skapade tre internationella organisationer med ansvar att se över det internationella arbetet med mät-standarder.

- General Conference on Weights and Measures (Conférence générale des poids et mesures, **CGPM**) – ett möte som hålls vart sjätte år med delegater från alla medlemsländer som erhåller och diskuterar resultat och rapporter från CIPM och som beslutar om nya stadarder och utveckling inom SI systemet.

- International Committee for Weights and Measures (Comité international des poids et mesures, **CIPM**) – en kommitté som årligen möts hos BIPM, bestående av 18 personer med hög vetenskapligt renommé, nominerade av CGPM för att ge råd rörande tekniska och administrativa frågor

- International Bureau of Weights and Measures (Bureau international des poids et mesures, **BIPM**) – ett internationellt metrologiskt center i Sèvres utanför Paris. Här förvaras den internationella kilogram prototypen och här utförs mätningar för CGPM och CIPM. Här finns även sekretariaten för organisationerna och här hålls dom formella mötena.

Även om ursprunget var meter och kilogram kom fler enheter att läggas till i 1921, bland annat ampere. Efter andra världskriget, i 1948 hölls den 9e CGPM, där man gav CIPM i uppdrag att skapa ett enkelt praktiskt system av enheter att användas i alla medlemsländer. Samtidigt kom man överens om att utveckla ett standardiserat system för att skriva enhetssymboler och siffror, med en rekommendation om härledda enheter. 1954 kom rekommendationen, som innehöll en revision och förenkling av meter-definitionen. Här rekommenderades att ampere skulle vara en basenhet och efter förhandlingar med bland annat IUPAP (International Union of Pure and Applied Physics) kom ytterligare två basenheter att inkluderas; kelvin för temperatur och candela. Det slutgiltiga nya systemet och namnet "Système International d'Unités" antogs av 10e CGPM 1960. Samma år kom dom nya definitionerna.

3.2 SI systemets basenheter

I dag har vi 7 basenheter [3] där materiamängd är den sista som kommit till. Idag använder vi ljusfarten som är definierad till ett exakt värde för att bestämma längden utgående från definitionen av tid. De definitioner som använts ges i tabell 3.1 och 3.2 tillsammans med tidigare definitioner.

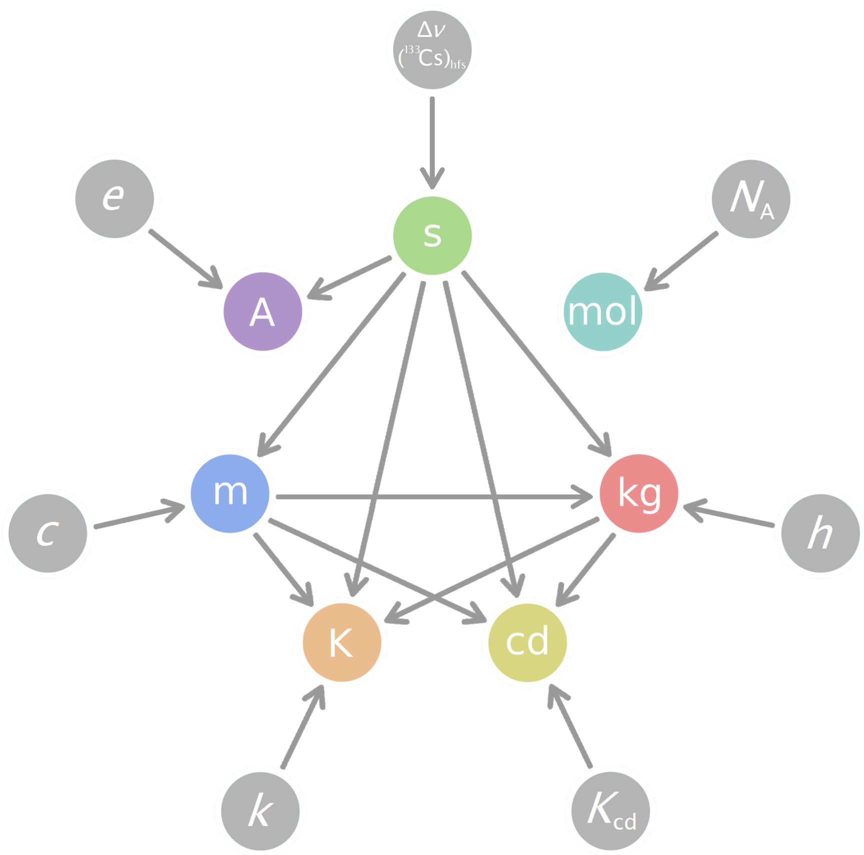
Som kan observeras i tabellerna har definitionerna ändrats under åren och det pågår fortsatt ett arbete med att förbättra definitionerna och få en noggrannare bestämning av basenheterna. Här är det värt att observera att vi har en korsdefinition där vi använder tid och ljusfart för att definiera längd, som i sin tur kombineras för att få de andra basenheterna. Arbetet som pågår idag är att definiera alla basenheterna (utom sekund) på fundamental konstanter. Det vill säga att tid kommer vara vår grundläggande storhet där definitionen av enheten i kombination med fundamental konstanter ger de andra enheterna. Orsaken till detta är att det är relativt lätt att uppnå en nogrannhet på tidsmätningar i storleksordningen 10^{-15}, något andra mätningar av storheter inte kommer i närheten av. Fördelen är ett koherent och stabilt enhetssystem. Den föreslagna modellen visas i figur 3.1.

Storhet	Enhet	Definition
Längd	meter (m)	**Original**(1793):1/10000000 av meridianen mellan nordpolen och ekvatorn som passerar Paris. **Interim** (1960):1650763.73 våglängder i vakuum av strålningsövergången mellan två nivåer i krypton-86 atomen. **Aktuell (**1983**):** En meter är den sträcka som ljuset färdas under 1/299792458 sekund i vakuum.
Massa	kilogram (kg)	**Original** (1793): Definierad som massan av en kubikdecimeter av rent vatten vid dess fryspunkt. **Aktuell (**1889**):**Ett kilogram är det samma som massan av den internationella kilogramprototypen.
Tid	sekund (s)	**Original** (medeltida): 1/86400 av en dag. **Interim** (1956): 1/31556925,9747 av det tropiska årets längd i början av år 1900. **Aktuell (**1967**):** En sekund definieras som 9 192 631 770 perioder av strålningsövergången mellan de två hyperfinnivåerna i grundtillståndet hos atomen ^{133}Cs.
Elektrisk ström	ampere (A)	**Original** (1881): 1/10 av CGS enheten för elektrisk ström. CGS-enheten är den ström som flödar i en cirkulär spole som är 1 cm lång och en radie på 1 cm och som skapar ett fält på 1 oersted i centrum. **Aktuell (**1946**):** En ampere är den konstanta elektrisk ström som genererar en kraft på $2*10^{-7}$ newton för varje meter ledare strömmen flyter igenom. Dessa ledare är två parallella och raka ledare som är oändligt långa. Vidare har dessa ledare ett försumbart och cirkulärt tvärsnitt samt är placerade en meter från varandra i vakuum.

Tabell 3.1: SI-systemets definitioner av grundenheterna

Storhet	**Enhet**	**Definition**
Temperatur	kelvin (K)	**Original** (1743): Celsius skalan erhålls genom att sätta vattens fryspunkt till 0 och kokpunkt 100, 1 grad är 1/100 av detta. **Interim** (1954): Vattnets trippelpunkt (0.01 °C) är definierad till att vara exakt 273.16 K. **Aktuell (**1967**):** En kelvin är 1/273,16 av den termodynamiska temperaturen vid vattnets trippelpunkt.
Ljusstyrka	candela (cd)	**Original** (1946): 60 candela/kvadrat centimeter är ljusstyrkan från en svartkropp vid platinas smältpunkt. **Aktuell (**1979**):** En candela definieras som ljusstyrkan i en given riktning från en källa som sänder ut strålning av monokromatisk typ med en frekvens på $540*10^{12}$ hertz och som har en strålningsstyrka på 1/683 watt per steradian i denna riktning.
Materiemängd	mol (mol)	**Original** (1900): Molekylmassan för en kemisk förening i gram. **Aktuell (**1979**):** Materiemängd definieras som materiamängd i ett system med samma antal systemelement som antalet atomer i 0,012 kilogram ^{12}C.

Tabell 3.2: SI-systemets definitioner av grundenheterna, fortsättning.



Figur 3.1: Förhållanden mellan de nya föreslagna SI enheterna och fundamental konstanter. (källa: Wikipetzi, wikemedia commons)

3.3 Basenheter och härledda enheter i SI-systemet och deras dimensioner.

Vi har 7 basenheter som bygger upp SI systemet[3]. Tidigare hade vi 2 supplementära enheter, radian och steradian för vinkel och rymdvinkel. Dessa har nu omdefinierats och ses som dimensionslösa härledda enheter.

Storhet	**Enhet**	**SI symbol**	**Dimension**
Längd	meter	m	L
Tid	sekund	s	T
Massa	kilogram	kg	M
Temperatur	kelvin	K	Θ
Elektrisk ström	ampere	A	I
Ljusstyrka	candela	cd	J
Materiemängd	mol	mol	N

Tabell 3.3: SI-systemets grundenheter med dimensioner

De härledda storheterna som används följer antingen en definition (andra gradens härledd storhet) eller en fysisk lag (första gradens härledd storhet). Jag ger här ett exempel på härledda enheter.

Det är värt att igen notera att valet av basenheter kan göras på andra sätt, men vi ser med definitionerna som valts att det är mätningen av dom som är viktig. Det handlar om att kunna reproducera mätresultat och att ha hög precision i mätningarna. Men i grunden handlar det om ett val vi gjort och inget som följer av naturens lagar.

Namn	Symbol	Storhet	i basenheter	uttryckt i andra SI enheter	Dimension
radian	rad	vinkel	m/m	1	1
steradian	sr	rymdvinkel	m^2/m^2	1	1
hertz	Hz	frekvens	s^{-1}		T^{-1}
newton	N	kraft	$kg\ m\ s^{-2}$		$M\ L\ T^{-2}$
pascal	Pa	tryck	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	N/m^2	$M\ L^{-1}\ T^{-2}$
joule	J	energi, arbete, värme	$kg\ m^2\ s^{-2}$	Nm	$M\ L^2\ T^{-2}$
watt	W	effekt	$kg\ m^2\ s^{-3}$	J/s	$M\ L^2\ T^{-3}$
coulomb	C	elektrisk laddning	s A		T I
volt	V	spänning, emf	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$	W/A	$M\ L^2\ T^{-3}\ I^{-1}$
farad	F	elektrisk kapacitans	$kg^{-1}\ m^{-2}\ s^4\ A^2$	C/V	$M^{-1}\ L^{-2}\ T^4\ I^2$
ohm	Ω	elektriskt motstånd, impedans, reaktans	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-2}$	V/A	$M\ L^2\ T^{-3}\ I^{-2}$
weber	Wb	magnetiskt flöde	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-1}$	Vs	$M\ L^2\ T^{-2}\ I^{-1}$
tesla	T	Magnetisk fältstyrka	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	Wb/m^2	$M\ T^{-2}\ I^{-1}$
henry	H	induktans	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-2}$	Wb/A	$M\ L^2\ T^{-2}\ I^{-2}$
lumen	lm	ljusflöde	cd	cd sr	J
lux	lx	illuminans	m^{-2} cd	lm/m^2	L^{-2} J
becquerel	Bq	radioaktivitet	s^{-1}		T^{-1}
gray	Gy	absorberad dos (strålning)	$m^2\ s^{-2}$	J/kg	$L^2\ T^{-2}$
sievert	Sv	ekvivalent dos (strålning)	$m^2\ s^{-2}$	J/kg	$L^2\ T^{-2}$
katal	kat	katalytisk aktivitet	s^{-1}mol		T^{-1} N

Tabell 3.4: Exempel på härledda enheter och deras dimensioner

Kapitel 4

Dimensionsanalys

Vi har nu lagt grunden till dimensionsanalysen med en formell behandling av storheter och enheter. Nu skall vi gå vidare med stegen som man går igenom i dimensionsanalys. Vi skall även introducera Buckinghams Π-teorem som följer av dessa steg.

4.1 Dimensionsanalys och Buckinghams Π-teorem

Grunden till dimensionsanalysen ligger i att formen för de signifikanta fysiska ekvationerna är sådan att förhållandet mellan de fysiska storheterna är oberoende av valet av basenheter (det skall inte spela någon roll om vi mäter längd i meter eller fot), här drar vi nu den logiska slutsaten av detta och applicerar den.

Antag att vi är intresserade i en specifik fysisk storhet "Q_0" som är en beroende variabel, i en väldefinierad situation. Med detta menar vi att när alla andra storheter som behövs för att beskriva situationen är specificerade, kommer Q_0 att bara kunna beskrivas på ett sätt.

Vi skall gå igenom hur identifikationen av Q_0 sker.

Steg 1: Oberoende variabler.

Det första steget som måste tas är att identifiera ett **fullständigt** set av oberoende variabler ($\mathrm{Q}_1 \ldots \mathrm{Q}_n$) som bestämmer värdet på Q_0.

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \ldots Q_n) \tag{4.1}$$

Setet av oberoende variabler ($\mathrm{Q}_1 \ldots \mathrm{Q}_n$) är fullständigt om det inte finns någon variabel utanför setet som kan påverka värdet på Q_0 och där förändring av en oberoende variabel inte påverkar värdet på en annan variabel. Det är viktigt att man startar med ett korrekt och fullständigt set i dimensionsanalys, har man fel startpunkt så blir slutresultatet fel.

Steg 2: Dimensionsbetraktning.

Här skall man undersöka dimensionerna hos den beroende variabeln Q_0 och de oberoende variablerna $\mathrm{Q}_1 \ldots \mathrm{Q}_n$. Här finns nu möjligheten att man har definierat ett annat system av basenheter än SI systemet, men vi kommer att använda SI systemets basenheter och dimensioner. För att förenkla diskussionen så kommer vi enbart att behandla mekaniska system i starten, vilket begränsar dimensionerna till tre stycken, längd, massa och tid, detta gör att samtliga variabler är på formen:

$$[Q_i] = L^{l_i} M^{m_i} T^{t_i} \tag{4.2}$$

där exponenterna är reella dimensionslösa tal som följer av varje variabels (storhets) definition.

Från det fullständiga setet av oberoende variabler $Q_1 \ldots Q_n$, plockar vi nu ut ett dimensionellt oberoende subset $Q_1 \ldots Q_k$ och uttrycker dimensionerna av dom återstående variablerna $Q_{k+1} \ldots Q_n$ och den beroende variabeln Q_0 som en produkt av exponenter av $Q_1 \ldots Q_k$. Alla fysiska storheter har dimensioner som kan uttryckas som produkter av exponenter av en uppsättning basdimensioner. Ett subset $Q_1 \ldots Q_k$ av ett set $Q_1 \ldots Q_n$ är dimensionellt oberoende om ingen medlem av setet har en dimension som kan uttryckas i termer av dimensionerna av de övriga medlemmarna i setet, och är fullständigt om dimensionerna i det återstående setet $Q_{k+1} \ldots Q_n$ kan uttryckas i termer av dimensionerna i subsetet $Q_1 \ldots Q_k$. Då ekvation 4.1 är dimensionellt homogen, kan dimensionen för den beroende variabeln skrivas i termer av dimensionerna i $Q_1 \ldots Q_k$. Subsetet $Q_1 \ldots Q_k$. väljs genom trial and error eller erfarenhet.

Det är möjligt att välja medlemmarna i subsetet på flera sätt, men talet k för antalet dimensionellt oberoende variabler (storheter) i det fullständiga setet $Q_1 \ldots Q_n$ är unikt för det setet och kan inte vara större än antalet basdimensioner som finns i det fullständiga setet. Till exempel, om dimensionerna i $Q_1 \ldots Q_n$ bara är Längd, Tid och Massa, gäller $k \leq 3$. Med ett fullständigt dimensionellt oberoende subset $Q_1 \ldots Q_k$ kan vi uttrycka dimensionerna för Q_0 och $Q_{k+1} \ldots Q_n$ på formen:

$$[Q_i] = \left[Q_1^{N_{i1}} Q_2^{N_{i2}} \ldots Q_k^{N_{ik}}\right] \tag{4.3}$$

om $i > k$ eller $i = 0$. Exponenterna är dimensionslösa tal och kan i många fall bestämmas enkelt eller genom algebraiska operationer.

Den formella processen kan vi illustrera med ett mekaniskt system, där alla dimensionerna är av formen i ekvation 4.2. Här ansätter vi då Q_1, Q_1 och Q_3 som ett komplett dimensionellt oberoende subset. Vi kan då skriva ekvation 4.3 som ett ekvationssystem:

$$\begin{aligned} l_i &= \sum_{j=1}^{3} N_{ij} l_j \\ m_i &= \sum_{j=1}^{3} N_{ij} m_j \\ t_i &= \sum_{j=1}^{3} N_{ij} t_j \end{aligned} \tag{4.4}$$

Där man löser ekvationssystemet för det tre okända variablerna N_{i1}, N_{i2} och N_{i3}. Se kapitel 5.6 eller Bilaga D för praktiska exempel.

Steg 3: Dimensionslösa grupper eller samband
Nästa steg är att skapa dimensionslösa grupper, här finns det många namn för dessa då det inte som sådant rör sig om en variabel utan ett samband, en relation eller grupp av andra variabler, oftast kallas dom för Π-grupper eller dimensionslösa grupper. Tricket vi har är att dessa grupper bildar dimensionslösa variabler. Vi definierar dessa i en dimensionslös form genom att ta en av de återstående variablerna och dividerar med en produkt av de andra, där produkten har samma dimension som variabeln vi valde, med andra ord:

$$\Pi_i = \frac{Q_{k+1}}{Q_1^{N_{(k+i)1}} Q_2^{N_{(k+i)2}} \dots Q_k^{N_{(k+i)k}}} \tag{4.5}$$

där $i = 1, 2 \dots n - k$, och den beroende variabeln kan skrivas som:

$$\Pi_0 = \frac{Q_0}{Q_1^{N_{01}} Q_2^{N_{02}} \dots Q_k^{N_{0k}}} \tag{4.6}$$

Skapandet av dessa dimensionslösa grupper gör det möjligt att omformulera problemet.

Steg 4: Buckinghams Π-teorem
Vi kan nu omformulera ekvation 4.1 i en alternativ form:

$$\Pi_0 = f(Q_1, Q_2, \dots Q_k, \Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_{n-k}) \tag{4.7}$$

Där samtliga variabler är dimensionslösa utom $Q_1, Q_2, \dots Q_k$. Värdena på dom dimensionslösa variablerna är oberoende av valet av basenheter. Värderna för $Q_1, Q_2, \dots Q_k$ är dock beroende på valet av basenheter. Dom kan inte omskrivas till en dimensionslös form då dom per definition är dimensionellt oberoende av varandra. Från principen att varje fysisk ekvation måste vara dimensionellt homogen, följer att:

$$\Pi_0 = f(\Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_{n-k}) \tag{4.8}$$

Detta är slutresultatet av dimensionsanalysen och innehåller Buckinghams Π-teorem:

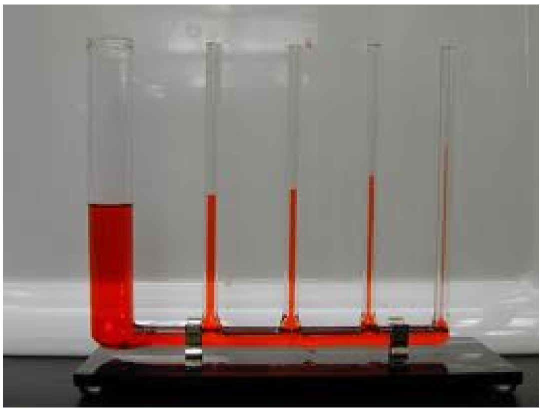
> When a complete relationship between dimensional physical quantities is expressed in dimensionless form, the number of independent quantities that appear in it is reduced from the original n to n-k, where k is the maximum number of the original n that are dimensionally independent.

Teoremet har fått sitt namn efter symbolen som Buckingham använde i sin artikel [2] från 1914.

Det som Π-teoremet visar är att då alla fullständiga fysiska ekvationer måste vara dimensionhomogena, kommer en omformulering av en sådan ekvation till en lämplig dimensionslös form att minska antalet oberoende storheter i formuleringen med k. Detta medför då en betydande förenkling av de problem vi undersöker, detta kommer vi att kunna se i de exempel som kommer i kommande kapitel. Π-teoremet i sig säger oss bara antalet dimensionslösa variabler som påverkar värdet på en specifik dimensionslös beroende variabel. Den säger dock ingenting om formen på dom dimensionslösa grupperna. Detta är något som man måste undersöka och få fram enligt stegen 3 och 4 ovan. Π-teoremet, eller dimensionsanalys, säger heller ingenting om formen på uttrycket som vi får enligt ekvation 4.8. Den formen måste man hitta genom experiment eller genom att lösa problemet teoretiskt.

4.2 Exempel: Stighöjd i kapillär

Som exempel väljer jag att titta på stighöjden i en kapillär. Har vi en vätska och ett antal rör med olika dimensioner kommer vätskan att befinna sig på olika höjd (se figur 4.1) beroende på ytspänningen som ger upphov till en kapillärstigning.

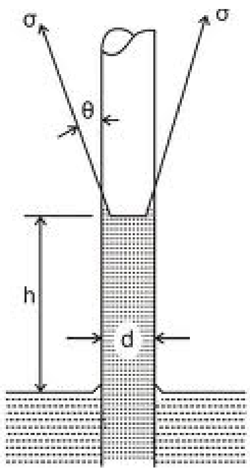


Figur 4.1: Kapillärstigning

Det vi skall göra är att undersöka hur högt vätskan kommer att stiga i dom olika rören. Den beroende variabeln är då stighöjden (h).

Steg 1: Oberoende variabler
Det första steget är att identifiera ett fullständigt set av oberoende variabler. För att göra detta behöver vi titta på problemet närmare. Här kommer en förstorad bild av situationen att vara fördelaktig, denna visas i figur 4.2.

Vi ser från figuren att diametern (d) hos röret kan ha betydelse. Till denna kommer även vätskans egenskaper som densitet (ρ) och ytspänning (σ). Även gravitationen via tyngdacceleration (g) och kontaktvinkeln (θ) mellan röret och vätskan kan påverka. Ytspänningen handlar om kraft som verkar över en sträcka så omkretsen (O) av röret påverkar. Från detta drar vi slutsatsen att vi har 6 oberoende variabler som påverkar, detta är ett komplett set men det är inte oberoende set, omkretsen (O) beror på rörets diameter, det vill säga den variabeln kan uteslutas, vilket lämnar ett set av 5 oberoende variabler, vilket ger ett uttryck:



Figur 4.2: Närbild av kapillärstigning

$$h = f(d, \sigma, \rho, g, \theta) \tag{4.9}$$

Detta set av oberoende variabler är som nämnts tidigare inte ett unikt val utan beror på våra val, i stället för d hade vi kunnat välja r, till exempel.

Steg 2: Dimensionsbetraktning
Vi arbetar med SI systemet vilket då medför att dimensionerna för de oberoende variablerna blir:

$[d] = L$
$[\sigma] = MT^{-2}$
$[\rho] = ML^{-3}$
$[g] = LT^{-2}$
$[\theta] = 1$

Den beroende variabeln har dimensionen:

$$[h] = L \tag{4.10}$$

Vi ser att vi har tre (3) grundenheter vilket ger (k=3), med andra ord skall vi kunna formulera två (2) oberoende dimensionslösa variabler och en beroende dimensionslös variabel. Med andra ord:

$$\Pi_0 = f(\Pi_1, \Pi_2) \tag{4.11}$$

Här observerar vi att höjden och diametern har samma dimension, men detta gäller även produkten av $g\rho d^2$ och ytspänningen σ.

$$\begin{aligned} [d] &= L = [h] \\ [\sigma] &= MT^{-2} = LT^{-2}ML^{-3}L^2 = \left[g\rho d^2\right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

Steg 3: Dimensionslösa grupper

Vi skall nu skapa dimensionslösa grupper genom att kombinera variablerna, vi vet att det räcker att formulera två (2) oberoende dimensionslösa variabler och en beroende dimensionslös variabel. Betraktningen i 4.12 ger en indikation på lämpliga grupper:

Oberoende:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{g\rho d^2}{\sigma} \\ \Pi_2 &= \theta \end{aligned} \tag{4.13}$$

Beroende:

$$\Pi_0 = \frac{h}{d} \tag{4.14}$$

Med detta har problemet reducerats till en enklare form som kan studeras experimentellt eller teoretiskt. Vi skall titta mer på detta senare.

Det kan vara svårt att hitta dom dimensionslösa grupperna. Ovan använde jag likheten för att identifiera dom, men detta kan göras mer formellt. Här ger jag en alternativ procedur.

Vi ser att en variabel är dimensionslös i sig och därför kommer den att bilda en egen grupp ($\Pi_2 = \theta$). Detta minskar grupperna som ska bildas till två. Vi tar då och sätter samman dom med okända exponenter som är reella tal:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= h d^a \rho^b \sigma^c \\ \Pi_1 &= g d^d \rho^e \sigma^f \end{aligned} \tag{4.15}$$

Observera att det finns många olika val som kan göras och dessa är inte unika. I detta fall väljer jag den beroende variabeln och en annan variabel och utgår från dom. Har jag gjort fel antagande kommer detta att visa sig senare. En dimensionsbetraktning ger:

$$\begin{aligned} [\Pi_0] &= \left[h d^a \rho^b \sigma^c\right] = L L^a M^b L^{-3b} M^c T^{-2c} = 1 \\ [\Pi_1] &= \left[g d^d \rho^e \sigma^f\right] = L T^{-2} L^d M^e L^{-3e} M^f T^{-2f} = 1 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Det ger följande ekvationssystem för de olika dimensionerna:

L	$1 + a - 3b = 0$	$1 + d - 3e = 0$
M	$b + c = 0$	$e + f = 0$
T	$-2c = 0$	$-2 - 2f = 0$

där vi får lösningarna:

$a = -1$	$d = 2$
$b = 0$	$e = 1$
$c = 0$	$f = -1$

Vilket ger samma dimensionslösa grupper som ovan:
Oberoende:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{g\rho d^2}{\sigma} \\ \Pi_2 &= \theta \end{aligned} \tag{4.17}$$

Beroende:

$$\Pi_0 = \frac{h}{d} \tag{4.18}$$

Observera att även om de dimensionslösa grupperna kan väljas på olika sätt så skall dom ge samma resultat i slutändan.

I detta fall finner vi att:

$$\Pi_0 = f(\Pi_1, \Pi_2) = f(\Pi_1^\alpha, \Pi_2^\beta) \tag{4.19}$$

Där exponenterna är reella tal, detta kan vi utveckla till

$$\frac{h}{d} = f\left(\left(\frac{g\rho d^2}{\sigma}\right)^\alpha, \theta^\beta\right) \tag{4.20}$$

Stegen vidare här kan inte göras utan mer information från exempelvis experiment. Se bilaga D för en dimensionsanalys utan Π-grupper, med en fortsatt diskussion om vägen vidare.

4.3 Användning av dimensionsanalys

Reduktion av variabler

Den viktigaste konsekvensen av dimensionsanalys är att det är möjligt att reducera antalet variabler och därigenom minska antalet experiment. Om vi ser varje variabel som en mät-dimension innebär detta att vi behöver över 10 mätningar för att kunna hitta en samband mellan den oberoende och beroende variabeln. Har vi då fem (5) oberoende variabler finner vi att det i så fall skulle behövas 10^5 mätpunkter för att erhålla en fullständig experimentell bestämning. I exemplet ovan finner vi att det i stället för 5 oberoende variabler, är möjligt att reducera mät-dimensionerna till två (2) vilket då ger 10^2 mätpunkter en reduktion med en faktor 1000. Detta ger en betydande besparing och underlättar mycket. Här skall man då observera att det är de dimensionslösa grupperna som är variablerna som undersöks experimentellt.

Ofullständigt set av oberoende variabler

Det är viktigt att komma ihåg att dimensionsanalys är ett verktyg och som alla verktyg kan det användas felaktigt. Detta gör att man måste ha kunskaper som gör det möjligt att applicera det på bästa sätt. Här är det då viktigt att få ett fullständigt set av oberoende variabler. Missar man att ta med en oberoende variabel kommer detta leda till ett felaktigt resultat.

För många oberoende variabler komplicerar resultatet

Har man med för många oberoende variabler är det inte lika förödande som för få. Det är fortfarande möjligt att hitta korrekta lösningar men gör att processen blir mer tidskrävande och gör att möjligheterna som ligger i dimensionsanalysen inte blir lika tydliga.

Viktigt med förenklingar

Som noterats så är det viktigt att inte ta med för många oberoende variabler, något som är ett ganska vanligt problem i dimensionsanalys. Här är inte fullständigheten i setet som är det grundläggande utan det ligger hur problemet vi studerar behandlas. Här kan man göra förenklingar och omformuleringar så att den kommer på en form där man genom erfarenhet kan se att variabler inte spelar någon roll. Men här är den kunskap som man har mycket viktig. Men samtidigt måste man vara medveten om att dom antaganden man gör kan vara felaktiga.

Det är viktigt att man skaffar sig en vana att arbeta med dimensionsanalys, då det är till en början ganska oöverskådligt och kräver vana innan man kan använda det på ett bra sätt. För att underlätta denna process kommer resten av häftet att innehålla ett antal exempel på dimensionsanalys.

Kapitel 5

Exempel på dimensionsanalys

Här kommer jag att ge ett antal exempel där dimensionsanalys appliceras på olika problem inom olika områden.

5.1 Nedböjning av stav

När vi belastar änden på en stav med en massa (m) kommer staven att böjas ner en sträcka (δ), denna böjning kommer att bero på ett antal variabler. Längden av staven (l), tyngdaccelerationen (g), böjtröghetsmomentet (second moment of area) (I)[1] och elasticitetsmodulen (Young's modulus) (E).

Vi har med andra ord en beroende variabel och fem oberoende variabler. Vi samlar dom i en tabell och gör en dimensionsbetraktning:

δ	L
m	M
l	L
g	LT^{-2}
I	L^4
E	$ML^{-1}T^{-2}$

Vi ser att vi har fem (5) oberoende och en beroende variabel och tre (3) dimensioner. Det alltså möjligt för oss att skapa tre (3) dimensionslösa grupper:

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \frac{\delta}{l} \\ \Pi_1 &= \frac{mg}{El^2} \\ \Pi_2 &= \frac{I}{l^4}\end{aligned} \tag{5.1}$$

[1] $I = \int_A y^2 dA$

Här utnyttjas att dimensionerna för massa och tid bara finns i tre av variablerna och dessa läggs då i en dimensionslös grupp (Π_1). Med 4.8 har vi:

$$\Pi_0 = f(\Pi_1, \Pi_2) \tag{5.2}$$

vilket ger:

$$\frac{\delta}{l} = f(\frac{mg}{El^2}, \frac{I}{l^4}) \tag{5.3}$$

vilket är så långt som enbart dimensionsanalys tar oss. Dock kan vi observera att nedböjningen måste öka med den massa som belastar staven. Denna bör vara linjär, åtminstone så länge det rör sig en elastisk nedböjning (utan deformation). Dessutom kan vi även se att desto längre staven är desto mer måste den böjas ner, så variabeln l måste ha en positiv exponent. Detta ger oss:

$$\delta = k \cdot l \cdot \left(\frac{mg}{El^2}\right) \cdot \left(\frac{l^4}{I}\right)^a \tag{5.4}$$

där k är en numerisk konstant och a ett positivt tal.

Nästa steg för att bestämma exponenten a och den numeriska konstanten k, genom experiment. Här måste man komma ihåg att böjtröghetsmomentet beror på formen av staven.

Gör man detta kommer man finna att nedböjningen ges av:

$$\delta = \frac{1}{3}\frac{mgl^3}{EI} \tag{5.5}$$

Det är möjligt att ersätta mg med en kraft för ett generellt resultat.

5.2 Stjärnors oscillation

Stjärnor har en oscillation, dom pulserar. Men vilken frekvens (ω) har den oscillationen och vilka parametrar spelar roll för frekvensen. Det första vi får göra är att identifiera dom parametrar som kan påverka oscillationen. Radien på stjärnan (r) liksom dess densitet (ρ) bör påverka. Dessutom så spelar gravitationen (G) in (vi antar att det rör sig om gravitationsdriva oscillationer). Vi skulle kunna lägga till massan men om vi antar att densiteten är konstant i stjärnan (första approximationen) och då vi redan har radien och densiteten behövs inte massan. Vi har då en beroende variabel och tre oberoende variabler:

ω	T^{-1}
r	L
ρ	ML^{-3}
G	$M^{-1}L^3T^{-2}$

Med tre oberoende och en beroende variabel samt tre dimensioner finns det bara en dimensionslös grupp, så vi kan lösa problemet genom en enkel dimensionsbetraktning utan att bilda dimensionslösa grupper:

$$\omega \sim r^a \rho^b G^c$$

vilket ger:

$L:$	$a - 3b + 3c = 0$
$M:$	$b - c = 0$
$T:$	$-2c = -1$

och lösningen

$$a = 0$$
$$b = 1/2$$
$$c = 1/2$$

Med andra ord:

$$\omega = k\sqrt{G\rho}$$

där k är en dimensionslös numerisk konstant. Med andra ord så är oscillationen proportionell mot roten av densiteten och oberoende av radien. Här behöver vi en riktig teori om stjärnors oscillationer, men vi har observerat ett intressant förhållande enbart genom en dimensionsanalys.

5.3 Gravitationsdrivna vattenvågor

Vi hittade ett intressant samband när det gällde gravitationsdriven oscillation i stjärnor. Nu tittar vi på vattenvågor och speciellt dom som drivs av gravitationen. I detta fall är vi intresserade av frekvensen (ω) i första hand. Här behöver vi göra en del antaganden för att förenkla diskussionen: vi antar att vågorna inte utsätts för några förluster, på det sättet kan vi utesluta vattnets viskositet. Densiteten (ρ) och tyngdaccelerationen (g) måste vi ta hänsyn till. Här kommer även våglängden (λ) att spela roll, men det är i detta sammanhang bättre att använda vågtalet ($k = 2\pi/\lambda$).

Vi ser att det blir ett system med 4 variabler och tre dimensioner. Vi kan således lösa det hela med en dimensionsbetraktning.

ω	T^{-1}
k	L^{-1}
ρ	ML^{-3}
g	LT^{-2}

Här ser vi att densiteten är den enda variabler med massa så den kan inte påverka. Den enda möjliga lösningen blir då:

$$\omega = C\sqrt{gk}$$

Vilket är ett resultat som stämmer med teorin.

5.4 Ytspänningsdrivna vattenvågor

Vad händer om vi tar hänsyn till ytspänningen i det förra exemplet. Förutom de variabler vi hade måste vi lägga till ytspänningen (σ). Vi får nu ett system med 5 variabler och tre dimensioner:

ω	T^{-1}
k	L^{-1}
ρ	ML^{-3}
g	LT^{-2}
σ	MT^{-2}

Vi ser att vi kan bilda två dimensionslösa grupper och i detta fall är det lämpligt att ta hänsyn till resultatet vi fick för gravitationsdrivna vattenvågor i konstruktionen.

Den första beroende gruppen tar vi direkt från det resultatet, och kombinerar de övriga variablerna (utom ω) :

$$\Pi_0 = \tfrac{\omega^2}{gk}$$
$$\Pi_1 = \tfrac{\sigma k^2}{\rho g}$$

det vi har är:

$$\Pi_0 = f(\Pi_1)$$

som vi skriver om som:

$$\frac{\omega^2}{gk} = f(\frac{\sigma k^2}{\rho g})$$

eller

$$\omega = \sqrt{gk} \cdot F(\frac{\sigma k^2}{\rho g})$$

Vilket är så långt vi kommer utan djupera kunskaper om fluidmekanik. Vi kan dock använda oss av gränsvärden, exempelvis vad vi förväntar oss skall hända då ytspänningen går mot noll. Det fallet är ju samma som i förra exemplet. med andra ord vet vi att funktionen ($F(x)$) måste vara en additativ formel på formen:

$$c_1 + c_2 x + \ldots$$

Vilket ytterligare förenklar en analys vidare.

5.5 Energin i en kärnvapenexplosion

Att dimensionsanalys kan användas på komplicerade system och gör det möjligt att få ut mycket information ur ganska lite fakta är något som illustreras av ett exempel där den engelska fysikern G.I. Taylor räknade ut energin i en kärnvapenexplosion [5]. Detta var en militär hemlighet på den tiden och det skulle inte vara möjligt för utomstående att kunna räkna ut den. En kärnvapenexplosion är i princip en ögonblicklig frigöring av energi (E) i en begränsad volym. Detta kommer att producera en chock-våg mycket större än den normala lufttrycket, som då kan försummas. Hur kommer radien (r) av chock-vågen att växa som funktion av tiden?

De relevanta variablerna som vi har i detta fall är, den frigjorda energin (E), tiden (t) och luftens densitet vid normalt lufttryck (ρ_0). Vi ser att det blir ett system med 4 variabler och tre dimensioner. Vi kan således lösa det hela med en dimensionsbetraktning.

r	L
E	ML^2T^{-2}
t	T
ρ_0	ML^{-3}

$$r \sim E^a t^b \rho_0^c$$

vilket ger:

$L:$	$2a - 3b = 1$
$M:$	$a + b = 0$
$T:$	$-2a + c = 0$

och lösningen

$$a = 1/5$$
$$b = -1/5$$
$$c = 2/5$$

vilket ger

$$r = kE^{1/5}\rho_0^{-1/5}t^{2/5}$$

där k är en numerisk konstant. Om vi kan plotta radien av chock-vågen som funktion av tiden i ett log-log diagram kommer lutningen på kurvan vara 2/5 och skärningen i grafen ger information om den frigjorda energin i explosionen, om konstanten k kan bestämmas. Taylor använde sig av en modell och uppskattade k till 1. Med detta kunde han använda filmer från sprängningarna (som inte var hemligstämplade) till att beräkna sprängverkan. Att detta var möjligt kom som en stor överraskning för amerikanska myndigheter, där offentligt material kunde användas för att få fram hemlig information, om man kunde använda dimensionsanalys.

5.6 Hydrogen atomen

Här skall vi använda dimensionsanalys och få en uppskattning av storleken på elektronens bana i grundtillståndet för hydrogen atomen.

Vi vet att vi har en elektron (m_e) som cirklar runt en proton och har en växelverkan som beror på deras laddningar (e^2, från Coulombs lag) och permeabiliteten för vakuum (ϵ_0), Vi vet också att rörelsen är kvantiserad på något sätt där Plancks konstant ($\hbar$) är inblandad. Det som vi söker är radien på elektronens bana (bohr-radien a_0). Vi sätter upp en lista med våra beroende (a_0) och oberoende variabler ($m_e, e^2, \epsilon_0, \hbar$) samt deras dimensioner:

a_0	L
m_e	M
e^2	$T^2 I^2$
ϵ_0	$I^2 T^4 M^{-1} L^{-3}$
$\hbar$	$M L^2 T^{-1}$

Vi ser att vi har fyra (4) oberoende variabler och fyra (4) dimensioner

$$a_0 \sim m_e^a e^{2b} \epsilon_0^c \hbar^d$$

vilket ger:

$L:$	$-3c + 2d = 1$
$M:$	$a - c + d = 0$
$T:$	$2b + 4c - d = 0$
$I:$	$2b + 2c = 0$

med lösningen:

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -1 \\ c &= 1 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

Vilket ger radien:

$$a_0 = k \cdot \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$$

där k är en numerisk konstant. Här har vi enbart arbetat med dimensionsanalys och utan att titta närmare på fysiken. Trots det får vi ett resultat som ligger nära Bohr radien, som är den ban-radie elektronen har i Bohrs atommodell. Det korrekta värdet för Bohr-radien är:

$$a_0 = 4\pi \cdot \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$$

så vi hamnade mycket nära med denna enkla metod. Det är värt att notera att om vi använt kunskaper om Coulombs lag och att vi har ett rymd-symmetriskt problem, kunnat komma fram till faktorn 4π.

5.7 Planetrörelse

Har vi kunskaper om fysiken bakom kan man använda dimensionsanalys till att studera ganska komplicerade system. Vi kan titta på problemet med planeternas omloppstids runt solen. Här är vi ute efter att se vilka samband det finns mellan omloppstiden och avståndet till solen.

Vi börjar som vanligt med att ställa upp våra tänkbara variabler. Den första är gravitationskraften som verkar (F), planetbanans radie (r) och massorna för solen (m_{sol}) och planeten i fråga (m_p). Dessutom har vi planetens omloppstid (T). Vi får då

$$T \sim f(r, F, m_{sol}, m_p)$$

Vi skriver upp variablernas dimensioner.

r	L
F	MLT^{-2}
T	T
m	M

Vi skall nu skapa en dimensionslös grupp, då vi är ute efter ett samband som är oberoende av de numeriska värdena. Utgår vi från kraften ser vi att en möjlig dimensionslös grupp är:

$$\Pi_0 = \frac{FT^2}{m_p r}$$

Men nu känner vi till Newtons gravitationslag:

$$F = G\frac{m_{sol}\ m_p}{r^2} \sim \frac{m_{sol}\ m_p}{r^2}$$

Vilket då gör att vi kan skriva om den dimensionslösa gruppen som:

$$\Pi_0 = \frac{m_{sol}\ m_p}{m_p}\frac{T^2}{r^3}$$

Då massan för solen är konstant får vi att

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{konstant}$$

Vilket inte är något annat än Keplers tredje lag, som han fick fram genom omfattande studier och beräkningar. Här utnyttjar vi vår kunskap om något generellt och får fram detta resultat utan omfattande härledningar. I den dimensionslösa gruppen har jag antagit att solens massa inte påverkar rörelsen annat än genom kraften som verkar. Detta spelar dock ingen roll för resultatet.

5.8 Kraft mellan två parallella plattor i en kondensator

Vi tittar på den kraft som vi har mellan två parallella plattor i en kondensator. För att kunna få fram ett resultat måste vi försumma eventuella randeffekter. Vi tittar på de variabler som vi har, den beroende variabeln kraften (F), avståndet mellan plattorna (x) plattornas area (A), potentialen mellan plattorna (V) och den elektriska permittiviteten (ε). Nu sätter jag upp lösningen lite annorlunda för att visa att man kan arbeta med lite olika metoder. Jag listar variablerna och deras dimensioner:

F	A	x	ε	V
M L T^{-2}	L^2	L	T^4 I^2 M^{-1} L^{-3}	M L^2 T^{-3} I^{-1}

Vi ser att dimensionen för ström [I] bara finns i två av de oberoende variablerna (ε, V) så dom sätter vi samman för att reducera bort den dimensionen i kombination med den beroende variabeln. Samtidigt reducerar vi bort dimensionen för de variabler (A, x)som enbart har dimensionen längd.

F	A/x^2	εV^2
M L T^{-2}	1	T^4 I^2 M^{-1} L^{-3}·M^2 L^4 T^{-6} I^{-2}
		M L T^{-2}

Här får vi två dimensionslösa grupper genom att kombinera variablerna.

$$\Pi_0 = \frac{F}{\varepsilon V^2}$$
$$\Pi_1 = \frac{A}{x^2}$$

eller

$$\frac{F}{\varepsilon V^2} = f\left(\frac{A}{x^2}\right)$$

då vi inte har några randeffekter kommer kraften som verkar att vara proportionell mot arean vilket då ger

$$\frac{Fx^2}{A\varepsilon V^2} = \text{konstant}$$

vilket är det slutgiltiga resultatet. Denna kan vi skriva om i en form som är mer känd och med en konstant som kan bestämmas experimentellt eller teoretiskt.

$$F = C\frac{A\varepsilon V^2}{x^2}$$

Vilket stämmer med teorin med de antaganden vi gjorde.

5.9 Utstrålad effekt från en accelererad elektrisk laddning

När det gäller elektromagnetsik strålning är en typisk källa till denna en laddad partikel som genomgår en harmonisk (accelererad) rörelse. Vi skall nu applicera dimensionsanalys för att få en allmän lösning till hur stor effekt som strålas ut. Vi kommer inte att få en exakt lösning då vi inte har de geometriska förutsättningarna i problemet.

Vi antar att vi har en laddad partikel (q) som utsätts för en acceleration (a) och vill ta reda på den utstrålade effekten (P). Denna acceleration kan vara i formen av en harmonisk rörelse och uttryckas på olika sätt. Elektromagnetisk strålning och dess egenskaper kommer att bero på de elektriska och magnetiska egenskaperna hos mediet (vakuum), dvs den elektriska permittiviteten (ε_0) och den magnetiska permeabiliteten (μ_0), men då ljusfarten (c) beror på dessa ($c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$) kan jag använda den och ε_0 lika gärna som ε_0 och μ_0.

Vi har då identifierat 5 variabler, en beroende (P) och fyra oberoende (q,a,c,ε_0). Observera att accelerationen är en vektorstorhet, men då effekten är en skalär kan vi ta storleken av accelerationen. I verkligheten kommer accelerationens riktning ha betydelse för riktningen på den utstrålade effekten men inte den totala storleken.

Vi sätter upp en tabell med variablerna och deras dimensioner.

P	ML^2T^{-3}
q	TI
a	LT^{-2}
ϵ_0	$I^2T^4M^{-1}L^{-3}$
c	LT^{-1}

Vi ser att vi har fyra (4) oberoende variabler och fyra (4) dimensioner

$$P \sim q^a a^b \epsilon_0^c c^d$$

vilket ger:

$L:$	$b - 3c + d = 2$
$M:$	$-c = 1$
$T:$	$a - 2b + 4c - d = -3$
$I:$	$a + 2c = 0$

med lösningen:

$$a = 2$$
$$b = 2$$
$$c = -1$$
$$d = -3$$

Vilket ger det generella resultatet:

$$p = k \cdot \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}$$

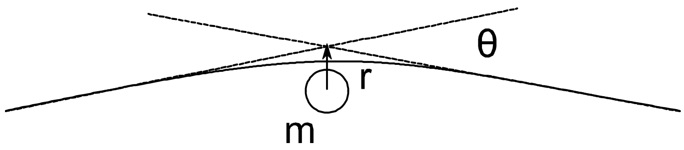
där k är en numerisk konstant som beror på problemställningens geometriska egenskaper. Här kan vi jämföra med resultaten för utstrålad effekt från en laddadpartikel i cirkulär bana i ett plan ($a = r\omega^2$). Detta har beräknats av bland annat Jackson [6], med resultatet (jag har skrivit om resultatet i samma termer som använts här):

$$p = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2 a^2}{3c^3}$$

Vilket visar att vårt resultat är korrekt när det gäller storleksordningen.

5.10 Gravitionell avböjning av ljus

Enligt den generella relativitetsteorin, kommer ljus som passerar en massa att böjas av. Vi skall nu titta på det problemet med hjälp av dimensionsanalys. Vi börjar med att definiera vad vi menar med avböjning och hur vi skall uttrycka den. Den enklaste definitionen som vi har baseras på en ljusstråle som kommer nära en massa och böjs av. Med avböjning menar vi då den vinkel vi får mellan riktningen före och efter avböjningen (figur 5.1).



Figur 5.1: Avböjning av ljusstråle.

Observera att vi antar att vinkeln är liten och anges i radianer. Vinklar är dimensionslösa storheter vilket förenklar för oss.

Vilka variabler kan påverka avböjningen? Massan (m) och det närmaste avståndet (r) är ganska uppenbara. I tillägg så måste gravitationskonstanten (G) och ljusfarten (c) ingå som variabler. Vi sätter upp en tabell.

θ	1
m	m
r	L
G	$L^3T^{-2}M^{-1}$
c	LT^{-1}

Vi ser att vi har fyra variabler men bara tre ekvationer. Vi har alltså ett underbestämt ekvationssystem och det enda vi kan göra är att se om vi kan reducera problemet till en så enkel form som möjligt. Detta kan vi göra genom att bilda en Π-grupp eller genom att förenkla ekvationssystemet. Vi börjar med det senare.

Vi sätter upp problemet och förenklar det.

$$\theta \sim m^a r^b G^e c^d$$

vilket ger:

$L:$	$b + 3e + d = 0$
$M:$	$a - e = 0$
$T:$	$-2e - d = 0$

Vi ser att $a = e$ och $d = -2e$, från detta får vi att $b = -e$. med andra ord får vi att

$$\theta \sim m^e r^{-e} G^e c^{-2e} = \left(\frac{mG}{rc^2}\right)^e$$

Ett resultat som är identiskt med skapandet av en Π-grupp.

$$\Pi_0 = \theta = f(\Pi_1) = f(\frac{mG}{rc^2})$$

Här får vi ett mer generellt resultat med Π-gruppen, då funktionen är obestämd, till skillnad mot exponential funktionen ovan. Här kan nu den okända funktionen uttryckas som ett polynom av exponentialfunktioner.

I och med att vi inte kan gå vidare utan kunskaper om fysik, behöver vi titta på fysiken bakom och effekterna vi får. Om vi betraktar den första lösningen (som bör imitera den ledande exponenten i funktionen) och tittar vad som händer vid extremerna, till exempel då $m \to 0$. Här förväntar vi oss att avböjningen skall gå mot noll, med andra ord exponenten e måste vara positiv ($e > 0$). Vi observerar även att ändringen i vinkeln θ, när $m \to 0$ bör vara liten men inte noll. Med andra ord:

$$\frac{d\theta}{dm} = \frac{d}{dm}\left(\frac{mG}{rc^2}\right)^e = eKm^{e-1}$$

där ändringen i vinkeln för små m bör vara oberoende på m, med andra ord exponenten $e = 1$. Argumentet är lite svagt men fungerar.

Det slutgiltiga resultatet blir då:

$$\theta = k\frac{mG}{rc^2}$$

Där konstanten k behöver bestämmas. Det visar sig att konstanten kan räknas ut från teorin och blir $k = 4$. Vilket gör det möjligt att beräkna avböjningen vid exempelvis solen. Sätter man in dom numeriska värderna finner man att avböjningen av ljus vid solen blir maximalt (vid solen yta) 8.5×10^{-6} radianer.

5.11 Temperaturen för ett svart hål

Vi skall nu tackla ett svårare problem, nämligen temperaturen för ett svart hål. Det vi skall titta på är egentligen den temperatur som Hawking strålningen från Schwartschild-radien hos ett svart hål uppvisar. Genom att titta på temperaturen behöver vi inte titta på storleken hos det svarta hålet. Vi tittar först på vilka variabler vi har. Temperaturen (T), ljusfarten (c), gravitationskonstanten (G), Plancks konstant ($\hbar$) då vi har kvantfenomen inblandade, Boltzmans konstant (k_B) och massan hos det svarta hålet (M).

T	k_B	c	G	$\hbar$	M
Θ	M L^2 T^{-2} Θ^{-1}	L T^{-1}	L^3 T^{-2} M^{-1}	M L^2 T^{-1}	M

Vi ser att dimensionen för temperatur (Θ) kommer in i två av variablerna så dessa kombineras för att reducera bort denna.

k_BT	c	G	$\hbar$	M
M L^2 T^{-2}	L T^{-1}	L^3 T^{-2} M^{-1}	M L^2 T^{-1}	M

Nästa steg tar vi genom att starta med den variabel som bara har en dimension och kombinera den med en annan för att se om vi får två grupper med samma dimensioner. I detta fall ser vi att vi kan kombinera c och M för att få samma dimension som k_BT.(båda har samma dimension som energi)

k_BT	Mc^2	G	c	$\hbar$	M
M L^2 T^{-2}	M L^2 T^{-2}	L^3 T^{-2} M^{-1}	L T^{-1}	M L^2 T^{-1}	M

Vår första dimensionslösa grupp blir då:

$$\Pi_1 = \frac{Mc^2}{k_BT}$$

I nästa dimensionslösa grupp skall vi inte använda M (som redan använts en gång) utan vi tar de variabler som inte använts G och $\hbar$. Tar jag produkten av dessa försvinner massdimensionen vilken då bara finns kvar i k_BT, varför vi måste ta kvoten för att ha massdimensionen i två variabler.

k_BT	$G/\hbar$	c
M L^2 T^{-2}	L^1 T^{-3} M^{-2}	L T^{-1}

Nu ser vi direkt att k_BT har ett kvadratiskt beroende för att vi skall få bort mass dimensionen.

$Gk_B^2T^2/\hbar$	c
L^5 T^{-5}	L T^{-1}

$Gk_B^2T^2/\hbar c^5$
1

vilket ger vår andra dimensionslösa grupp:

$$\Pi_0 = \frac{Gk_B^2T^2}{\hbar c^5}$$

vårt resultat blir då:

$$\frac{Gk_B^2T^2}{\hbar c^5} = f\left(\frac{Mc^2}{k_BT}\right)$$

Om vi nu utnyttjar att gravitationskonstanten alltid förekommer med massor och det faktum att variablerna G och M förekommer i stellära sammanhang tillsammans som en variabel (GM) så får vi:

$$\frac{Gk_B^2T^2}{\hbar c^5}\frac{Mc^2}{k_BT} = \text{Konstant}$$

Om vi förenklar och omformulerar:

$$T = C \cdot \frac{\hbar c^3}{GMk_B}$$

Vilket är vårt resultat för temperaturen för ett svart hål.
Detta skall jämföras med resultatet som man får från teorin.

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B}$$

Bilaga A

Enheter och deras dimensioner i SI systemet

Storhet	Enhet	SI symbol	Dimension
Längd	meter	m	L
Tid	sekund	s	T
Massa	kilogram	kg	M
Temperatur	kelvin	K	Θ
Elektrisk ström	ampere	A	I
Ljusstyrka	candela	cd	J
Materiemängd	mol	mol	N

Tabell A.1: SI-systemets grundenheter med dimensioner

Namn	Symbol	Storhet	i basenheter	uttryckt i andra SI enheter	Dimension
radian	rad	vinkel	m/m	1	1
steradian	sr	rymdvinkel	m^2/m^2	1	1
hertz	Hz	frekvens	s^{-1}		T^{-1}
newton	N	kraft	$kg\ m\ s^{-2}$		$M\ L\ T^{-2}$
pascal	Pa	tryck	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	N/m^2	$M\ L^{-1}\ T^{-2}$
joule	J	energi, arbete, värme	$kg\ m^2\ s^{-2}$	Nm	$M\ L^2\ T^{-2}$
watt	W	effekt	$kg\ m^2\ s^{-3}$	J/s	$M\ L^2\ T^{-3}$
coulomb	C	elektrisk laddning	s A		T I
volt	V	spänning, emf	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$	W/A	$M\ L^2\ T^{-3}\ I^{-1}$
farad	F	elektrisk kapacitans	$kg^{-1}\ m^{-2}\ s^4\ A^2$	C/V	$M^{-1}\ L^{-2}\ T^4\ I^2$
ohm	Ω	elektriskt motstånd, impedans, reaktans	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-2}$	V/A	$M\ L^2\ T^{-3}\ I^{-2}$
weber	Wb	magnetiskt flöde	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-1}$	Vs	$M\ L^2\ T^{-2}\ I^{-1}$
tesla	T	Magnetisk fältstyrka	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	Wb/m^2	$M\ T^{-2}\ I^{-1}$
henry	H	induktans	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-2}$	Wb/A	$M\ L^2\ T^{-2}\ I^{-2}$
lumen	lm	ljusflöde	cd	cd sr	J
lux	lx	illuminans	m^{-2} cd	lm/m^2	L^{-2} J
becquerel	Bq	radioaktivitet	s^{-1}		T^{-1}
gray	Gy	absorberad dos (strålning)	$m^2\ s^{-2}$	J/kg	$L^2\ T^{-2}$
sievert	Sv	ekvivalent dos (strålning)	$m^2\ s^{-2}$	J/kg	$L^2\ T^{-2}$
katal	kat	katalytisk aktivitet	s^{-1}mol		T^{-1} N

Tabell A.2: Exempel på härledda enheter och deras dimensioner

Bilaga B

Prefix i SI systemet

Si systemet omfattar inte bara enheter utan här finner i väven regler för hur enheter, storheter och tal skall skrivas. Så systematiseringen och standarder omfattar ganska mycket. Mer information om detta finns i [3]. Ett område som är aktuellt för studenter är bruken av prefix . Det var den 11e CGPM (1960) som antog en serie med prefix, namn, form och symboler för decimala multiplar och submultiplar av SI enheterna, från 10^{12} till 10^{-12}. Prefix för 10^{-15} och 10^{-18} las till av den 12e CGPM (1964), 10^{15} och 10^{18} av den 15e CGPM (1975), och 10^{21}, 10^{24}, 10^{-21} och 10^{-24} av den 19e CGPM (1991,).Tabellen ger de godkända prefixen.

Faktor	Namn	Symbol	Faktor	Namn	Symbol
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Tabell B.1: Prefix i SI systemet

Prefix symboler följer samma skrivregler som enhetssymboler, och skall skrivas in normal (roman) stil och sätt samman med enhetssymbolen utan mellan rum. Namnen skrivs på samma sätt som enhetsnamnen med liten begynnelsebokstav utom i början av en mening.

Bilaga C

Dimensioner för universalkonstanter

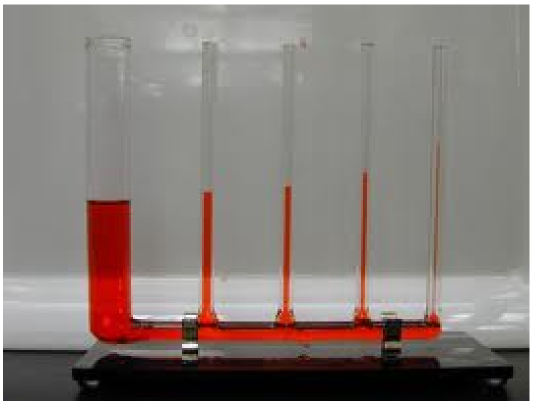
Namn	Symbol	Enhet	Dimension
Gravitationskonstanten	G	Nm^2/kg^2	$L^3\ T^{-2}\ M^{-1}$
Ljusfarten (vakuum)	c,c_0	m/s	$L\ T^{-1}$
Permeabiliteten (vakuum)	μ_0	Vs/Am	$M\ L\ T^{-2}\ I^{-2}$
Permittiviteten (vakuum)	ε_0	As/Vm	$T^4\ I^2\ M^{-1}\ L^{-3}$
Elementar laddningen	e	C	I T
Bohr magnetonen	μ_B	J/T, Am^2	L^2 I T
Plancks konstant	h,$\hbar$	Js	$M\ L^2\ T^{-1}$
Stafan-Boltzmanns konstant	σ	W/m^2K^4	$M\ T^{-3}\ \Theta^{-4}$
Boltzmanns konstant	k,k_B	J/K	$M\ L^2\ T^{-2}\ \Theta^{-1}$

Tabell C.1: Dimensioner för universalkonstanter

Bilaga D

Exempel på dimensionsbetraktning: Stigning i kapillär

Man kan ofta klara sig med en dimensionsbetraktning utan att använda sig av Π-teoremet. Jag har visat tidigare detta exempel med Π-teoremet och dimensionslösa variabler. Här gör vi det utan dessa:Vi tittar på en kapillär och vill bestämma stighöjden i kapillären. Har vi en vätska och ett antal rör med olika dimensioner kommer vätskan att befinna sig på olika höjd (se figur D.1) beroende på ytspänningen som ger upphov till en kapillärstigning. För den som inte vet vad ytspänning är rekommenderas att man tittar i en bok eller på webben.

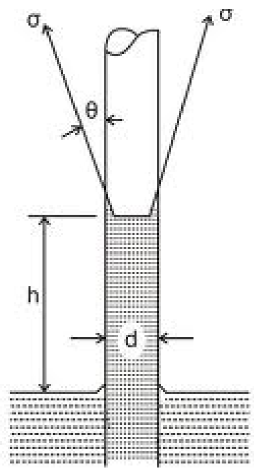


Figur D.1: Kapillärstigning

Här är den sökta storheten stighöjden (h) och vi skall se vilka variabler som kan tänkas påverka. Vi tittar på en förstorad bild av situationen i figur D.2.

Vi ser att diametern på röret (d) bör påverka. Ytspänningen(σ) hos vätskan, vätskans densitet(ρ) och tyngdaccelerationen (g), här kommer även en dimensionslös storhet, kontaktvinkeln (θ), att komma in.

Vi sätter upp en tabell över storheterna och deras dimensioner.



Figur D.2: Närbild av kapillärstigning

Storhet	symbol	Dimension
Stighöjd	h	L
Diameter	d	L
Ytspänning	σ	MT^{-2}
Densitet	ρ	ML^{-3}
Tyngdacceleration	g	LT^{-2}
Kontaktvinkel	θ	

Sambandet (funktionen vi söker är:
$h = k \cdot d^\alpha \cdot \sigma^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot g^\delta \cdot \theta^\epsilon$
Med dimensionssambandet:
$L = L^\alpha \left(MT^{-2}\right)^\beta \left(ML^{-3}\right)^\gamma \left(LT^{-2}\right)^\delta$
vilket vi sätter upp i ett ekvationssystem i de olika dimensionerna:

$$\begin{aligned} L: &\quad 1 = \alpha - 3\gamma + \delta \\ T: &\quad 0 = -2\beta - 2\delta \\ M: &\quad 0 = \beta + \gamma \end{aligned}$$

Här ser vi ett samband mellan β, γ och δ.
$\beta = -\gamma$
$\delta = \gamma$
vilket ger:
$\alpha = 1 + 2\gamma$
med andra ord:
$h = K \cdot d^{1+2\gamma} \cdot \sigma^{-\gamma} \cdot \rho^\gamma \cdot g^\gamma$
det enda vi behöver göra är att mäta stighöjden som funktion av rörens diameter. En sådan mätning ger att stighöjden är omvänt proportionell mot rördiametern, det vill säga att $\alpha = 1 + 2\gamma = -1$ vilket ger $\gamma = -1$ och:
$h = K \cdot d^{-1} \cdot \sigma \cdot \rho^{-1} \cdot g^{-1} = K \cdot \frac{\sigma}{d\rho g}$
Ytterligare mätningar ger $K = 4\cos\theta$.

Här kan vi inte få ett fullständigt samband med dimensionsbetraktning men problemet blir mycket enklare, då experimentens omfattning minskas.

Litteraturförteckning

[1] Bridgman P.W., Dimensional Analysis, 2nd edition, Yale University Press. (1931).

[2] Buckingham, E., "On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Analysis", Physical Review, 4, 345-376. (1914)

[3] International Bureau of Weights and Measures, The International System of Units (SI) (8th ed.), ISBN 92-822-2213-6 (2006)

[4] Alder K. The Measure of all Things – The Seven-Year-Odyssey that Transformed the World. ISBN-13: 978-0743216760 (2003)

[5] Taylor G. I. , "The formation of a blast wave by a very intense explosion. II. The atomic explosion of 1945," Proc. Roy. Soc. London A201, 159 (1950).

[6] Jackson J.D. , Classical Electrodynamics (3rd ed.) Wiley (1998), Chapter 14.2, p 665ff

ISBN 978-82-7923-073-1

NTNU

Kunnskap for en bedre verden