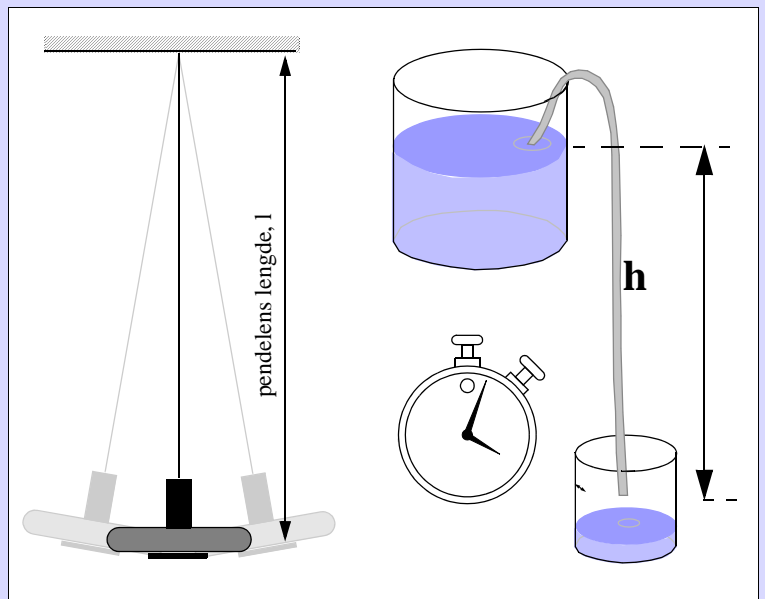


Skolelaboratoriet
for matematikk, naturfag
og teknologi

Nils Kr. Rossing
Frode Øren

Matematisk modellering - Ett idehefte



MATEMATISK MODELLERING

Matematisk modellering - et idehefte

Trondheim 2009

Layout og redigering: Nils Kr. Rossing

Tekst og bilder: Nils Kr. Rossing, Skolelaboratoriet/Vitensenteret

Faglige spørsmål rettes til:

Skolelaboratoriet for matematikk naturfag og teknologi, NTNU

v/Nils Kr. Rossing, 73 55 11 91

nils.rossing@plu.ntnu.no

Realfagbygget, Høgskoleringen 5
7491 Trondheim

Skolelaboratoriet

Telefon: 73 55 11 43

Telefaks: 73 55 11 40

<http://www.skolelab.ntnu.no/>

Prøvetrykk 3.6 - 17.10.09

Matematisk modellering - et idehefte

Nils Kr. Rossing
Frode Øren

Skolelaboratoriet for matematikk, naturfag og teknologi, NTNU



Forord

Heftet er en samling enkle forsøk som egner seg til matematisk modellering. Noen forsøk er utprøvd flere ganger, andre er ideer som ennå ikke er skikkelig utprøvd.

Det har vært viktig å velge forsøk som både er enkle å gjennomføre, krever lite utstyr, lar seg modellere ved hjelp av relativt enkle matematiske sammenhenger og ikke minst, at det er mulig å etterprøve modellene som utvikles av elevene. Etter endt uttesting er det viktig at en sammen med elevene tar seg tid til både å forstå de ulike modellene som er utviklet og å diskutere forskjeller og likheter mellom dem. Dessuten bør en reflektere over mulige feilkilder.

Meningen er ikke at all undervisning innen dette feltet må være så praktisk som antydnet her, men at elevene minst en gang i løpet av skoleløpet får anledning til å gjennomgå hele prosessen fra begynnelse til slutt. Selv om vi finner temaet matematisk modellering først og fremst i videregående skole, kan en med fordel gjøre lignende forsøk i forbindelse med introduksjon av funksjonsbegrepet tidligere i skoleløpet.

En takk til Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen ved **Kjersti Wæge** som har tilrettelagt og videreutviklet "Strikkhopp med Barbie". Opplegget er opprinnelig svensk, men er introdusert for bruk i norsk skole ved forannevnte. **Trond Storaker** ved Læringscenteret var i sin tid initiativtaker til matematisk modellering med kastemaskiner. Likeså er ideen til å sammenligne kurver for temperaturfall i ulike pappkrus o.l. en ide som kommer fra **Hilde Hov** ved Brundalen videregående skole. Selv om disse har vært viktige i utvikling av de beskrevne oppleggene, er vi som forfattere ansvarlig for alt som er skrevet i dette heftet. Videre rettes en takk til **Arne Amdal** ved Program for lærerutdanning som har lest gjennom og kommentert deler av heftet.

Kurvetilpasningen er dels utført med **GXP for Windows Versjon 1.01 2000** utviklet av **Jostein Våge**, Program for lærerutdanning, NTNU, som han velvilligst har latt oss bruke vederlagsfritt. Vi har også benyttet programvare som er funnet på internett.

Dette prøvetrykket er fortsatt mangelfullt, men vi vil etterhvert suppleres med forskjellige forslag til forsøk. Selv om de fleste forsøkene er tett knyttet til fysikken, så er det viktig at det under gjennomføringen holdes fokus på de matematiske sidene ved forsøkene.

Nils Kr. Rossing
Frode Øren
17. okt. 2009



Innhold

| | |
|--|-----------|
| 1 Innledning | 11 |
| 1.1 Hva er matematisk modellering | 11 |
| 1.2 Hva sier læreplanene | 12 |
| 1.3 Modellering som matematisk kompetanse | 13 |
| 1.4 Fra observasjoner til fysiske lover – litt vitenskapsteori | 14 |
| 1.4.1 Den induktive metode – avhengige og uavhengige variable | 15 |
| 1.4.2 Den hypotetisk deduktive metode | 16 |
| 1.4.3 Hypotesetesting ved stokastiske sammenhenger | 18 |
| 1.4.4 Kort oppsummering | 19 |
| 1.4.5 Historiske eksempler på vitenskapelige metoder | 19 |
| 1.4.6 Når skitne fingermerker blir til matematiske modeller | 21 |
| 1.5 Hvorfor eksperimenter i matematikktimen? | 22 |
| 1.6 Noen statistiske sammenhenger | 24 |
| 1.6.1 Middelerdi | 24 |
| 1.6.2 Standardavvik på enkeltmålinger | 25 |
| 1.6.3 Median og typetall | 26 |
| 1.7 Regresjon | 26 |
| 2 Enkle klasseromsforsøk | 30 |
| 2.1 Lengdemål | 30 |
| 2.1.1 ...om å skyte strikk | 30 |
| 2.1.2 ...om å dyrke humle | 33 |
| 2.2 Telling | 37 |
| 2.2.1 ... om telle pendelens svingninger | 37 |
| 2.2.2 ... om å telle andemat-planter i en bolle | 40 |
| 2.2.3 ... om å telle lydsvingninger i flaske | 43 |
| 2.3 Mengdemål | 47 |
| 2.3.1 ... om å måle vannmengder | 47 |
| 2.4 Måling av temperatur | 50 |
| 2.4.1 ... om å måle temperaturfall i vann | 50 |
| 2.5 Måling av tid | 54 |
| 2.5.1 ...om å måle falltid for papirhelikopter | 54 |
| 3 Klasseromsforsøk som krever noe spesieltstyr | 59 |
| 3.1 Strikkhopp med Barbie | 59 |



| | | |
|----------|--|------------|
| 3.1.1 | Utfordringen | 59 |
| 3.1.2 | Målefasen | 60 |
| 3.1.3 | Modelleringsfasen | 61 |
| 3.1.4 | Utprøvningsfasen | 62 |
| 3.1.5 | Drøfting | 63 |
| 3.2 | Kast med katapult | 65 |
| 3.2.1 | Bygging av katapult | 65 |
| 3.2.2 | Variasjon av variabler (parametere) | 65 |
| 3.2.3 | Måleresultater | 66 |
| 3.2.4 | Noen mulige feilkilder | 68 |
| 3.3 | Radioaktiv stråling som funksjon av avstand | 69 |
| 3.4 | Kortslutningsstrøm i solceller som funksjon av lysintensitet | 72 |
| 4 | Andre ideer til modelleringsoppgaver | 76 |
| 5 | Modellering ved hjelp av den deduktive metode | 77 |
| 5.1 | Modellering av fallhøyden ved strikkhopp med Barbi | 78 |
| 5.1.1 | Beskrivelse av eksperimentet | 78 |
| 5.1.2 | Beregningsunderlag, energilign. | 78 |
| 5.1.3 | Fjærkonstant og måling av denne | 79 |
| 5.1.4 | Strategi for beregning | 80 |
| 5.1.5 | Uttrykk for fallhøyde, h og forlengelse h_f | 80 |
| 5.1.6 | Beregning av antall strikk | 81 |
| 5.1.7 | Antall strikk, n_t , som funksjon av fallhøyde, h | 81 |
| 5.1.8 | Fallhøyde, h , som funksjon av antall strikk n_t | 82 |
| 5.1.9 | Måling av fjærkonstanten | 82 |
| 5.1.10 | Måling av fjærkonstant ved hjelp av fjærvekt | 82 |
| 5.1.11 | Måling av fjærkonstant ved hjelp av svingeperioden | 84 |
| 5.1.12 | Et regneeksempel | 85 |
| 5.2 | Modellering av kastelengden hos katapult | 86 |
| 5.2.1 | Beregning av utgangshastighet | 87 |
| 5.2.2 | Beregne kastebanen og nedslagspunktet | 90 |
| 5.2.3 | Oppsummering | 91 |
| 5.3 | Tømming av vanntank (differensial ligninger) | 92 |
| 6 | Referanser | 100 |
| 6.1 | Litteraturliste | 100 |
| 6.2 | Nettreferanser: | 100 |



| | | |
|------------------|--|------------|
| Vedlegg A | Hva sier læreplanene i matematikk (Kunnskapsløftet) | 101 |
| A.1 | Kompetansemål etter 10. årssteget | 102 |
| A.2 | Kompetansemål i matematikk, Vg1T | 102 |
| A.3 | Kompetansemål i matematikk, Vg2T | 102 |
| A.4 | Kompetansemål i matematikk, Vg1P | 103 |
| A.5 | Kompetansemål i matematikk, Vg2P | 103 |
| A.6 | Grunnleggende ferdigheter i Naturfag (Vg1) | 103 |
| A.7 | Grunnleggende ferdighet i Biologi (Vg2 og Vg3) | 104 |
| A.8 | Grunnleggende ferdighet i Fysikk (Vg2 og Vg3) | 104 |
| Vedlegg B | Byggebeskrivelser | 105 |
| B.1 | Bygging av katapult | 105 |
| B.1.1 | Materialer | 109 |
| B.1.2 | Verktøy | 110 |
| B.1.3 | Eksempler på katapultter hentet fra nettet | 110 |
| Vedlegg C | Brukerveiledning GXP for Windows | 112 |
| C.1 | Oppstart og etablering av datasett | 112 |
| C.2 | Plotting av funksjoner | 115 |
| C.3 | Oversikt over spesialfunksjoner | 117 |





1 Innledning

Matematisk modellering er en del av matematikken som har naturlige tilknytningspunkter til de fleste realfagene. Fysikk og teknologi er nærliggende, men også biologi og kjemi benytter i stor grad matematisk modellering. I dette heftet ønsker vi å vise eksempler på enkle øvelser som kan gjennomføres i klasserommet og som egner seg til matematisk modellering.

1.1 Hva er matematisk modellering

Kort sagt kan en si at matematisk modellering beskriver sammenhenger og oppførselen til et system eller en prosess ved hjelp av matematiske funksjoner. Prosessen er ofte knyttet til naturfenomener eller andre prosesser som er styrt av naturlover eller avledninger av disse. Biologiske og samfunnsmessige prosesser (økonomi, befolkningsvekst o.l.) kan også beskrives ved hjelp av matematiske modeller, men er ofte svært sammensatte.

Dersom modellen utsettes for pådrag (*endring i uavhengige variable*), skal den gi en respons (*endring i avhengigevariable*) som i størst mulig grad harmonerer med oppførselen til den "naturlige" prosessen modellen skal beskrive. De matematiske modellene må derfor testes nøye mot det systemet de skal modellere, slik at modellen i størst mulig grad oppfører seg på samme måte som det virkelige systemet.

Matematiske modeller brukes oftes ved simulering av prosesser. Ved å simulere en prosess eller et system, kan en undersøke hva som skjer dersom systemet påvirkes av ulike pådrag. Når en først har funnet en god modell for et system, kan en på en enkel og billig måte teste ut prosessen. En kan kontrollere alle variabler og en kan tillate seg å utsette modellen for parameterendringer som ville ha vært katastrofalt for det virkelige systemet.

En flysimulator er et godt eksempel. Denne gjenskaper de fleste aspekter ved det å fly. Samtidig kan en endre variable, det være seg værforhold, tekniske feil eller andre situasjoner, det ville vært umulig eller fullstendig uansvarlig å utsette et fly og en flyver for i virkeligheten, men som piloter er avhengige av å trene på om slike situasjoner skulle inntreffe.

Matematiske modeller kan grovt klassifiseres i fire kategorier.

1. *Lineære* kontra *ikke lineære* modeller

Dersom et system kan beskrives ved hjelp av førstegradsligninger, kalles system *lineært*. Dersom en eller flere av ligningene som beskriver systemet er av 2. eller høyere grad kalles systemet *ikke-lineært*.

Eksempelvis er sammenhengen mellom en strikks forlengelse og kraften som påføres strikken, linær innen et visst område og kan beskrives ved hjelp av en førstegradsligning. Dersom strikken strekkes ut mot grensen av hva den tåler, vil vi stadig måtte øke den kraften som skal til for å øke strikkens lengde med en lengdeenhet, og sammenheng mellom forlengelse og kraft er ikke lenger lineær og må beskrives av ligninger av høyere grad.

2. *Deterministiske* kontra *stokastiske* modeller

En deterministisk modell vil, dersom alle uavhengige variable er like fra gang til gang, oppføre modellen seg likt. For en stokastisk modell vil tilfeldighet råde, modellen vil derfor



oppføre seg forskjellig fra gang til gang. Stokastiske modeller kan beskrives ved hjelp av sannsynlighetfunksjoner, som anslår sannsynligheten for at en prosess vil oppføre seg “slik” eller “slik”.

Eksempler. Klassiske eksempler på stokastiske prosesser er levetiden for lyspærer, kast med terninger, mynter eller tegnestifter o.l.. For flere eksempler se avsnitt 1.4.6.

3. *Statisk* kontra *dynamiske* modeller

En statisk modell vil oppføre seg likt uavhengig av tiden, mens en dynamisk modell vil endre oppførsel etter som tiden går.

Eksempelvis vil det være en sammenheng mellom turtallet til en elektrisk motor og tilført strøm og spenning. På grunn av slitasje vil egenskapene til motoren endre seg med tiden og modellen som beskriver den nevnte sammenhengen vil endre seg. Dette kan f.eks. skyldes slittasje av lagrene, sotete børster, manglende smøring o.l.

4. *Konsentrerte* (eng. *lumped*) variable kontra *distribuerte* variable.

En homogen modell vil ha konsentrerte variable, dvs. at samme variabel er uforandret uansett hvor i systemet den inngår. Et inhomogent system vil ha distribuerte parametere, det vil si at en parameter vil endre seg avhengig hvor i systemet den måles.

Eksempelvis vil temperaturen i et system en distribuert variabel, og kan meget vel være forskjellig fra sted til sted i et system. Vi forutsetter at temperaturen er en variabel i den prosessen vi studerer.

At en matematisk sammenheng er *entydig* betyr at en gitt verdi av uavhengige variabler gir én og bare én verdi for de uavhengige variable.

1.2 Hva sier læreplanene

Praktisk modellering er kommet inn i læreplanen i matematikkfagene både på Vg1 og Vg2. Ikke minst uttrykker læreplanen at en skal utføre konkrete måleoppgaver til forskjell fra tidligere hvor oppgaver av denne typen var rent teoretisk.

Eksempelvis står det i læreplanen for faget Vg2P at eleven skal kunne:

- *gjere målinger i praktiske forsøk, formulere ein enkel matematisk modell på grunnlag av dei observerte data, bruke teknologiske verktøy i utforsking og modellbygging og vurdere modellen og kor gyldig han er*
- *bruke matematikk i praktiske samanhengar og vurdere kva han kan brukast til, og kva han ikkje kan brukast til, i samband med utgreiingar og avgjerder*

For detaljer om kompetansemålene se vedlegg A.



1.3 Modellering som matematisk kompetanse

Mogens Niss og Thomas Højgaard Jensen la i 2002 fram en rapport om matematiske kompetanser: “*Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspirasjon til utvikling af matematikundervisning i Danmark*” [2].

De definerer en matematisk kompetanse på følgende måte:

“En matematisk kompetanse som en innsiktsfull beredskap til å handle på en fornuftig og veloverveid måte i situasjoner der matematikk inngår” [2].

I alt opererer de med 8 ulike kompetanser inndelt i to grupper:

1. Krever evne til å stille og besvare spørsmål.

- Kompetanse til å kunne utøve **matematisk tankegang**
- Kompetanse knyttet til å kunne **behandle problemer**
- Kompetanse til å analysere og bygge opp **matematiske modeller**
- Kompetanse til å **resonnere matematisk**

2. Krever evne til å beherske matematisk språk og redskaper

- Kompetanse til å håndtere ulike matematiske representasjoner
- Kompetanse til å håndtere matematisk symbolbruk og formalisme
- Kompetanse til å kommisere i, med og om matematikk
- Kompetanse til å håndtere hjelpemidler beregnet for arbeid med matematikk

Alle disse kompetansene er grundig behandlet i den nevnte publikasjonen. Her vil vi bare utdype modelleringskompetansen.

Denne kompetence består på den ene side i at kunne analysere grundlaget for og egenskapene ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Hertil hører at kunne "afmatematisere" (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelementer og resultater i forhold til det felt eller den situation som er modelleret. På den anden side består kompetencen i at kunne udføre aktiv modelbygning i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv [2].

Dette innebærer på den ene siden at en er istand til å analysere en matematisk modell og kunne bedømme egenskapene og rekkevidden av modellen. Videre at en er istand til å se sammenhengene mellom modellenes konstantledd og variable og egenskaper i den virkelige prosessen som modellen beskriver.

På den annen side innebærer det at en er istand til å analysere et fenomen eller en prosess slik at en er istand til å bestemme *uavhengige* og *avhengige* variabler og på et slikt grunnlag kunne planlegge og gjennomføre en måleserie for å etablere og etterprøve en matematisk modell.

Vi siterer Niss og Jensen:

*Aktiv modelbygning indeholder en række forskellige elementer. Først at kunne **strukturere** det felt eller den situation der skal modelleres. Dernæst at kunne gennemføre en **matematisering** heraf, dvs. en oversættelse af objekter, relationer, problemstillinger m.v. til et område*



af matematikken, resulterende i en matematisk model. At kunne **behandle** den opståede model, herunder løse de matematiske problemer den måtte give anledning til, samt at kunne **validere** den færdige model, dvs. bedømme dens holdbarhed både internt (i forhold til modellens matematiske egenskaber) og eksternt (dvs. i forhold til det felt og den situation modellen omhandler). Der indgår tillige at kunne **analysere modellen kritisk**, både i forhold til dens egen brugbarhed og relevans og i forhold til mulige alternative modeller, og at kunne **kommunikere** med andre om modellen og dens resultater. Endelig indgår det i aktiv modelbygning at have **overblik** over og kunne **styre** den samlede modelleringsproces [2].

Niss og Jensen nevner også en rekke eksempler hvor det er aktuelt å analysere en modell og hvor en selv kan bygge opp og teste ut modellen:

Modelanalyse

Når det gjelder analysen af foreliggende (eller foreslåede) modeller, kan man fx

- betrakte en model, der opererer med eksponentiel vækst af verdens befolkning i perioden 1900-2000 og sammenholde den med tilgængelige befolkningsdata.
- undersøge den preskriptive body-mass-index model ($BMI = \text{vægt [kg]} / (\text{højde})^2 [m^2]$) for undervægt, normalvægt, overvægt og fedme af mennesker.

Modelbygning

Hvad angår aktiv modelbygning, kan man fx opstille en model til behandling af udfordringer som de nedenstående. I alle tilfælde er det nødvendigt at foretage afgrænsninger, gøre antagelser, eller indhente data for at behandlingen kan foretages.

- En undersøgelse af hvordan grundplanen for et hus kan se ud, hvis dets areal skal være $120 m^2$.
- En undersøgelse af hvor dyrt det er at tale i mobiltelefon.
- "Hvad er den effektive beskatning af en krone tjent af en lønmodtager, hvis der også tages hensyn til moms, afgifter m.m.?"
- En bestemmelse af den optimale form på en konservesdåse.
- En vurdering af hvor stor en del af energiforbruget i Danmark der kan dækkes af vindmøller, og hvor mange møller det ville give anledning til.
- "Hvordan udvikler antallet af AIDS-tilfælde i Danmark sig?"

"Er det muligt, at gennemsnitsalderen i en befolkning er 35 år samtidig med at mindst 40% af befolkningen er 60 eller derover?" [2].

1.4 Fra observasjoner til fysiske lover – litt vitenskapsteori

Fysikken er kanskje den disiplin de fleste forbinder med matematisk modellering. La se på noen metoder som gjennom de siste 500 årene har vært benyttet for å bygge opp naturvitenskapelig kunnskap.

Vi kan si at en **naturlov** er et mønster i naturen som uten unntak gjentar seg under gitte betingelser. En av fysikkens oppgaver er å avsløre denne lovmessigheten for så å formulere en lov knyttet til fenomenet. Et redskap fysikeren bruker er å samle inn måledata om fenomenet, og på



Matematisk modellering

bakgrunn av disse dataene, *formulere en matematisk sammenheng* som i størst mulig grad gjen-speiler fenomenet og evner å peke *ut over de målingene som er utført* (generalisering).

Ekspirerimenter settes opp for om mulig å “rendyrke” fenomenet for at lovmessigheten skal tre tydeligere fram. Lovens evne til å prediktere framtidige hendelser er også meget viktig.

La oss før vi går videre, ytterligere presisere forskjellen mellom *lover* og *teorier*.

I følge Svein Sjøberg [4] så er **lover** “sammenhenger mellom målbare størrelser” og “kan ofte formuleres på en enkel matematisk måte.” Han nevner videre Ohms lov, gasslovene, falloven og brytningsloven for lys, som eksempler. Innen naturvitenskapen er gyldigheten av slike lovmessige sammenhenger strengt tatt bare gyldig under ideelle betingelser, men gir i svært mange tilfeller den nøyaktighet som er nødvendig. Lovene gir imidlertid ingen dypere forklaring på hvorfor det er slik.

“Betegnelsen **teori** brukes ofte om sammenhenger på et høyere nivå enn de enkelte lovene. Teori brukes oftest om de større (og dypere) sammenhengene. Ofte kan man si at en teori kan være en slags forståelsesramme som samler en lang rekke lovmessigheter og gir dem en slags felles begrunnelse eller forankring” [4]. Sjøberg nevner kvanteteorien, evolusjonsteorien og relativitetsteorien som eksempler på slike overordnede teorier.

Begrepet **modell** brukes på forskjellige måter innen naturvitenskapen. Ofte benyttes modeller for å gi mentale bilder av et fenomen eller en struktur. Sjøberg nevner Bohrs atommodell som eksempel. Men begrepet modell brukes også når en har funnet en “matematisk formulering av en sammenheng” [4]. Slike **matematiske modeller** danner igjen grunnlaget for datasimuleringer. Prosessen for å finne fram til de matematiske modellene, kaller vi i denne sammenheng **matematisk modellering**, som også er temaet for dette heftet.

Den vitenskapelige metode er et begrep som gjennom mange år har vært brukt i skolen. Dette er imidlertid temmelig misvisende, da det i virkeligheten ikke finnes *én* metode, men et sant mangfold av metoder. Det er heller ikke slik at en forsker setter seg ned å bestemmer seg for hvilken naturvitenskapelig metode som skal brukes. Som oftes vokser metoden fram under arbeidet og vil inkludere mange av de metoder som vitenskapsteoretikere har formalisert og beskrevet.

La oss likevel se nærmere på to fremgangsmåter (metoder) som har vært beskrevet for å bestemme lovmessige (gjerne matematiske) sammenhenger i naturen.

1.4.1 Den induktive metode – avhengige og uavhengige variable

Denne metoden har ofte også gått under betegnelsen: *Den vitenskapelige metode*, hvilket som nevnt foran, er noe misvisende. I sin reneste form kan den imidlertid beskrives som følger:

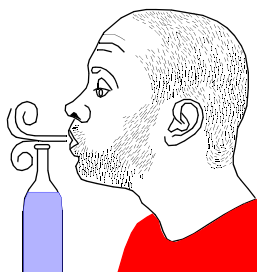
Først utføres eksperimentelle målinger hvor en tilstreber å endre kun *en* variabel (av gangen). Denne variabelen kalles **uavhengig variabel**. Andre variable blir forsøkt holdt konstante. Dernest måles en annen variabel som er avhengig av den første. Denne variabelen kalles derfor en **avhengig variabel**. Målingene gir en rekke tallpar som kvantitativt beskriver sammenhengene mellom den uavhengige og den avhengige variabelen. Målingene kan tabelleres eller framstilles som en graf. Oppgaven går ut på å finne den matematiske funksjonen som i størst mulig grad stemmer overens med tallparene. Dersom avvikene mellom målingene og den matematiske funksjonen er små, sier vi at vi har funnet en lov.



Et eksempel kan være den lovmessige sammenhengen mellom svingetiden og lengden til en pendel.

Senere varieres en annen uavhengig variabel for å se hvordan denne nye variabelen påvirker den avhengige variabelen.

Et annet eksempel er dette:



Vi bestemmer oss for å finne hvilke uavhengige variable som bestemmer tonen (avhengig variabel) som fremkommer når vi blåser over tuten av en flaske. I tillegg til at vi vil tallfeste sammenhengene. Vi har en hypotese om at frekvensen er avhengig av luftvolumet i flaske. Vi måler derfor frekvensen til tonen (avhengig variabel) som funksjon av luftvolumet, ved at vi gradvis fyller flasken med vann mens vi måler frekvensen mellom hver fylling. Vi har imidlertid en mistanke om at det er andre uavhengige variable som er med på å bestemme frekvensen. Disse kan være lydshastigheten, temperaturen, størrelsen av flasketuten og

flaskehalsens lengde m.fl. Alle disse uavhengige variable er det relativt lett å holde konstant, om enn i praksis, ikke så lette å variere på en kontrollert måte. F.eks. vil det komplisere forsøket betydelig om vi ønsket å endre lydshastigheten på en kontrollert måte. Dette kan vi foreksempel gjøre ved i tur og orden å innhalere He, CO₂ eller SF₆, samt fylle flasken med de respektive gassene for så å måle frekvensen når vi blåser. I praksis ville man konstruere et instrument som gjorde det lettere å kontrollere de uavhengige variable.

Vi skal senere i heftet se nærmere på dette eksperimentet (avsnitt 2.2.3).

Det sentrale i denne metoden er at **vi ut fra ett eller et mindre antall eksempler, forsøker å finne en generell lovmessighet** som gjelder ut over eksemplene vi har utført målinger på. Den endelige loven som beskriver sammenhengen mellom de variable i eksperimentet foran, gjelder for eksempel for alle hulromsresonatorer.

Dette er den metoden det er mest naturlige å gripe fatt i sett fra matematikkundervisningens ståsted, og som vi primært velger å anvende i dette heftet.

1.4.2 Den hypotetisk deduktive metode

Utgangspunktet for denne metoden er også observasjon av et fenomen som man foreløpig ikke kjenner den lovmessige beskrivelse av. Ut fra tidligere kunnskaper og andre kjente lover og teorier, kan man imidlertid sette opp **hypoteser** (påstander eller antagelser) om hva som ligger til grunn for fenomenet. På bakgrunn av hypotesene utledes en **målbare forutsigelse** (deduksjon) som kan etterprøves ved hjelp av nye observasjoner eller eksperimenter. Alle forutsigelser som stemmer, støtter lovens gyldighet, mens forutsigelser som ikke stemmer, vil svekke loven.

En hypotese kan enten være sann eller falsk, og en forutsigelse kan også være sann eller falsk. I teorien har vi derfor fire muligheter [13]:



Matematisk modellering

- **Hypotesen er sann og forutsigelsen er sann**
Dette vil styrke hypotesen og etter hvert legge grunnlaget for å etablere en lov når flere bekeftelser kommer til. Men bare unntaksvis fullt ut “bevise” lovens gyldighet.
- **Hypotesen er sann, men forutsigelsen er falsk**
Dette er en umulig situasjon under forutsetning av at det er etablert en korrekt og enkel sammenheng mellom hypotese og forutsigelse. Det som imidlertid er tilfelle er at problemstillingen *ikke* er enkel, men at det finnes en del hjelpehypoteser, eller forutsetninger som en ikke fullt ut kontrollerer. I såfall er man ikke helt sikker på om det er hypotesen eller noen av hjelpehypotesene som ikke holder mål. Dette kalles ofte *Duham's problem* etter den franske vitenskapsteoretikeren Pierre Duham [5].
- **Hypotesen er falsk, men forutsigelsen er sann**
Denne er en interessant mulighet. I utgangspunktet skulle en tro at også denne var umulig, men et enkelt, litt humoristisk, eksempel viser at denne varianten er fullt mulig. *Det var forskeren som satte opp en hypotese om at lopper hører med beina. Når han ropte hopp, så hoppet de. Så klippet han beina av loppene og ropte igjen “hopp”, men ingenting skjedde.* Selv om dette er et spøkefullt eksempel, så illustrerer det muligheten for at en hypotese kan være falsk, men gi en korrekt forutsigelse. Dette er også noe av bakgrunnen for at en lov aldri kan bekreftes 100%.
- **Hypotesen er falsk og forutsigelsen er falsk**
Dette tilfellet vil svekke hypotesen og i ytterste konsekvens avkrefte den. Kan hypotesen avkreftes, kan vi si at den er **falsifisert**. En hypotese om at alle svaner er hvite, vil lett bli falsifisert og avkreftet så snart vi har funnet én svart svane. Det er imidlertid ikke alle hypoteser som like lett kan falsifiseres. En falsk forutsigelse vil derfor svekke hypotesen eller avgrense gyldighetsområdet, men skjelden helt avkrefte en hypotese.

Som vi har antydnet foran så kan det være omtrent umulig å bevise (eller motbevise) en naturlov en gang for alle. En lov er gyldig helt til den erstattes av en ny og bedre lov. *Ny og bedre*, i denne sammenheng, betyr *lovens evne til å forutsi lovmessige prosesser i naturen på en mest mulig eksakt måte*.

Ulike lover som beskriver de samme fenomenene kan imidlertid leve side om side. Et klassisk eksempel på dette er Galileo Galileis bevegelseslover som fortsatt brukes i svært mange sammenhenger, til tross for at Einstein har vist at de ikke er gode nok for hastigheter nær lysets. Til daglig er det imidlertid svært skjelden at noe beveger seg med slike hastigheter, og Galilei er fortsatt tilstrekkelig nøyaktig til fleste formål.

I sine bestrebelser på å finne lovene for bevegelse, brukte Galilei den hypotetisk deduktive metode. Han antok en sammenheng og gjorde deretter eksperimenter for å finne støtte for den sammenheng. På bakgrunn av sine observasjoner og målinger formulerte han bl.a. sine lover for bevegelse og fall.

Sentralt for denne metoden er at **man tar utgangspunkt i (generelle) kjente lover og teorier, og på bakgrunn av disse, etablerer matematiske modeller for de (spesielle) fenomener** vi ønsker å studere. Deretter etterprøves modellene (hypotesene) ved å sammenligne de predikterte verdiene med målinger utført på det aktuelle fenomenet.



1.4.3 Hypotesetesting ved stokastiske sammenhenger

Noen ganger er sammenhengene så komplekse at det er vanskelig, for ikke å si umulig, å kontrollere de ulike variablene. Biologiske prosesser er ofte av denne typen. Enten det gjelder årsakene til at dyrebestander endrer seg, graden av effektiv medisinerings, årsaksammenhengene knyttet til klima o.l. I slike tilfeller vil de innsamlede dataene være beheftet med (stor) usikkerhet.

Likevel vil man sette opp hypoteser om hvordan ulike variable avhenger av hverandre. Det er da vanlig å betegne hypotesen om at det *ikke* finnes noen sammenheng mellom to variabler som *nullhypotesen* (H_0). Mens hypotesen om at det *er* en sammenheng, kan f.eks. betegnes H_1 .

Følgende eksempel klarlegger metoden [5]:

Vi tenker oss at det er utviklet en ny medisin for å helbrede en sykdom. Vi ønsker å finne ut om den nye medisinen er mer effektiv enn den gamle. Vi antar at med tradisjonell medisinerings blir ca. 60 % av pasientene friske. Vi skjønner at vi må teste medisinen på et stort antall personer.

Umiddelbart vil en tro at om man finner ut at den nye medisinen gir en helbredelseeffekt på 65 %, så har man "bevist" at den nye medisinen er mer effektiv enn den gamle. Slik trenger det nødvendigvis ikke å være. Vi kan nemlig ha blitt lurt av at det utvalget vi testet, hadde spesielt gode forutsetninger for å bli frisk, uavhengig av medisineringsen. Sannsynligheten for å bli lurt på denne måten reduseres når størrelsen på testmaterialet økes.

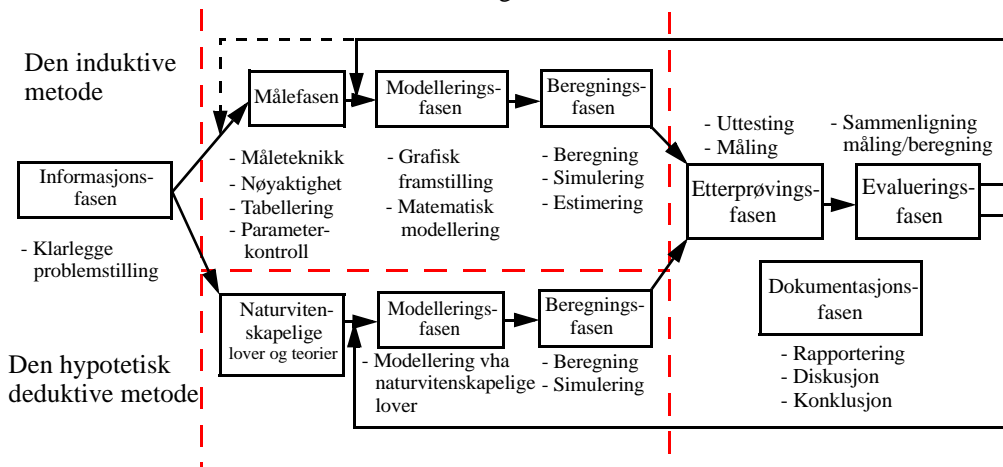
*Normalt vil man kreve at sannsynligheten for få bli lurt skal være mindre enn 0,05 (5%). Dette sannsynlighetskravet kalles **signifikansnivået** til testen. Dersom vi prøver ut vår nye medisin på 100 personer ($n=100$), vil vi typisk måtte ha en helbredeshyppighet på hele 68 %, for at sannsynligheten for å bli lurt skal være mindre enn 0,05. Dvs. vår måling på 65 % helbredelse er ikke tilstrekkelig for å si at den nye medisinen er mer effektiv enn den gamle. Tilsvarende kan et testresultat på 45 % helbredelse ($n=100$) ikke fastslå at den nye medisinen er dårligere enn den gamle. For å bli sikker, må vi derfor øke testmaterialet. Dersom vi beholder en helbredelse på 65 % selv med et mye større testmateriale, kan vi etter hvert fastslå at den nye medisin er bedre enn den tradisjonelle.*



Matematisk modellering

1.4.4 Kort oppsummering

Figuren under oppsummerer og sammenligner *Den induktive* og *Den hypotetisk deduktive* metode. Som vi ser så har de to metodene mange likhetstrekk.



Figur 1 Den induktive og Den hypotetisk deduktiv metode.

1.4.5 Historiske eksempler på vitenskapelige metoder

For å se at begge disse metodene er brukt av kjente vitenskapsmenn, skal vi ganske kort se på noen eksempler fra historien.

Tyco Brahe (1546 - 1601), var dansk astronom som i mange år ble beskyttet av danske kong Fredrik II. I 1597 mistet han støtten og flyttet til Tyskland før han til slutt endte opp i Praha hvor han levde sine sist år. Tyco B. var en meget nøyaktig observatør som gjennom store deler av livet daglig registrerte posisjonen til de kjente planetene. Han var på jakt etter hvordan de beveget seg, men hadde ikke de nødvendige matematiske kunnskapene for å modellere bevegelsene. Han godtok imidlertid aldri at jorda beveget seg, hvilket medførte at de matematiske modellene som var nødvendig for beskrive den observerte bevegelsen ble særdeles kompliserte.

I 1600 ansatte Tyco Brahe Johannes Kepler (1571 - 1630) som sin assistent. Da Tyco døde i 1601 overtok Kepler alle de innsamlede dataene. Han gikk ut fra Copernicus lære med sola i sentrum. Med dette som utgangspunkt oppdaget han etter mange års hardt arbeid at planeten Mars beskrev en ellipse og ikke en sirkel (eller episirkler) slik man tidligere hadde trodd. Etter nitidige studier av Brahes data, kom han fram til sine to første lover for planetbevegelse, senere kom også en tredje.



Med **utgangspunkt i observasjoner** klarte han å lage en teori som med stor nøyaktighet beskrev planetbevegelsene. Denne måten å arbeide på kalles altså den **“Den induktive metode”** eller “Den vitenskapelige metode”. Med induktiv mener vi at Kepler gikk **fra det spesielle til det generelle tilfellet**.

Vi legger også merke til at den matematiske modellen i dette tilfellet var avhengig av hvilket verdensbilde de to hadde. Det er ingen ting i veien for at Brahe kunne ha kommet fram til en matematisk modell for planetbevegelsen til Mars, med jorda som sentrum av solsystemet. Imidlertid ville modellen hans ha vært langt mer komplisert og mer krevende å komme fram til enn den Kepler kom fram til bygget på det **Kopernikanske** verdensbildet.

Siden Kepler laget sine formuleringer ut fra observasjoner kaller vi dem lover.

I 1642 ble Isaac Newton født (1642-1727). Han var også interessert i bevegelsen til himmellegemene, og han kjente godt til arbeidene til Johannes Kepler. Gjennom sitt studium av gravitasjon, klarte han på bakgrunn av sin gravitasjonslov å utlede Keplers tre lover.

Med **utgangspunkt i en naturlov**, gravitasjonsloven, utledet han teorier for planetbanene. Disse kunne han i sin tur kontrollere opp mot Tycho Brahes observasjoner. Denne måten å arbeide på kalles den **“Hypotetisk deduktive metoden”**. Newton gikk **fra det generelle tilfellet** (den universelle gravitasjonsloven) **til det spesielle** (bevegelsen til f.eks. Mars).

Siden Newton utledet sine formuleringer på bakgrunn av en universell lov, kaller vi dem gjerne teorier.

*Overenstemmelsen mellom beregninger av planetbaner på grunnlag av teoriene var meget gode. Det var imidlertid **en** planet som hadde et avvik som var større enn hva en skulle forvente. Dette var den innerste planeten, Mercur.*

Det var ikke før Albert Einstein publiserte sin generelle relativitetsteori i 1915 at dette problemet fant sin forklaring. Pga. det sterke gravitasjonsfeltet nær sola, endret planetens masse seg lite grann, dette var nok til å forklare det avviket en hadde registrert i planetens presesjon (dreining av aksen over tid).

Vi legger merke til at **en teori har et gyldighetsområde**. Om en kommer utenfor dette vil den ikke stemme eller gi uakseptable avvik og en ny eller modifisert teori, som har et større gyldighetsområde, bør utvikles.

Selv om en har slått fast at en matematisk modell av et fenomen ikke er istand til å beskrive fenomenet fullstendig, kan den være fullt levedyktig, bare en er klar over begrensningene. Selv om vi etter Einsteins arbeider vet at Newtons lover ikke er “riktige”, er de fullt brukbare i de aller fleste situasjoner.

Så en underlig historie om matematisk modellering fra et helt annet fagfelt:



1.4.6 Når skitne fingermerker blir til matematiske modeller

Å forfalske tall er vanskeligere enn du tror!

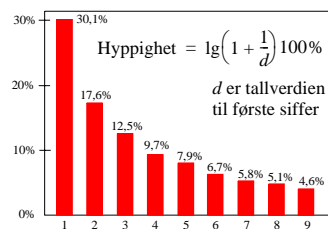
En dag ga **Theodore P. Hill** ved Georgia Institute of Technology studentene følgende hjemmeoppgave: *Gjør ett av to. Enten kaster dere en mynt 200 ganger og noterer resultatet, eller dere fingerer 200 resultater. Ut fra resultatene skal jeg avsløre hvem av dere som har kastet en mynt og hvem av dere som hentet resultatet fra eget hode.* Studentene fulgte oppfordringen og ga resultatene til Hill. Selv om han ikke klarte å avsløre alle, fikk han rett i 95% av tilfellene.

Da han ble spurt om hvordan han klarte å oppnå en så høy skår, sa han: *Sannheten er at de fleste ikke kjenner hva som er et sannsynlig resultat. De er derfor ikke i stand til å lage troverdige fiktive data*¹. Dette gjelder også andre typer data enn kasting med mynt.

I 1881 oppdaget astronomen og matematikeren **Simon Newcomb** (1835 - 1909) at de første sidene i bibliotekets logaritmetabeller var betydelig mer slitt enn sidene lenger bak. Logaritmetabeller ble før regnemaskinens tid brukt til å forenkle multiplikasjon av tall. Han tolket dette slik at tall med et ETT-tall som første siffer måtte opptre betydelig hyppigere enn tall som begynte med sifrene 2 til 9. Dette forundret ham.

Umiddelbart skulle en tro at **første** siffer i et tilfeldig utvalg av tall, f.eks. tall funnet i en bunke aviser, ville fordele seg omtrent likt mellom tallene 1 - 9.

Newcomb undersøkte tallmateriale fra ulike sammenhenger, og fikk bekreftet sin mistanke. Han fant ut at i ca. 30% av tilfellene begynte tallene med et 1-tall. Deretter falt hyppigheten med økende tallverdi. Han kom fram til en formel for hvordan hyppigheten typisk avtar med økende tallverdi.



Ulike talls hyppighet i første siffer etter Newcombs formel.



Benford

Til tross for at resultatene ble publisert, var de glemt helt til fysikeren **Frank Benford** (1883-1948) ved General Electric gjenoppgaget denne lovmessigheten i 1938. Han gikk meget systematisk til verks og undersøkte bl.a. tall han fant i "Det beste", baseballstatistikker og arealet av flomrammede områder. Tallene fra så vidt forskjellige områder fulgte alle denne lovmessigheten. Til og med tall hentet fra hans lokale avis for en uke stemte i forbløffende grad med Newcombs resultater. I løpet av flere år undersøkte han over 20 000 sett av tall. På grunn av hans omfattende undersøkelser

kalles dette merkelige fenomenet for Benfords lov.

Han fant selvfølgelig også tall som ikke fulgte denne loven, som f.eks. telefonnummer og tabeller over talls kvadratrøtter, men de fleste fulgte loven.

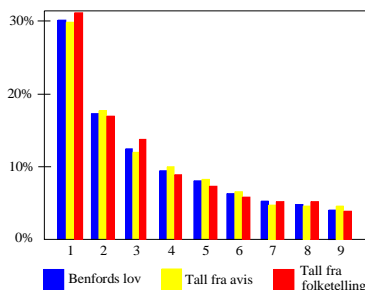
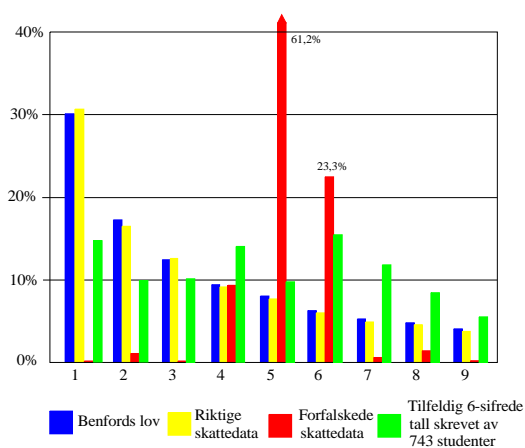
1. Hemmeligheten er at sannsynligheten for å få 6 eller flere like resultater etter hverandre når en kaster en mynt 200 ganger, er mye større enn en skulle tro (96%). Han sjekket derfor om dataene inneholdt slike serier av like. Gjorde de ikke det, antok han at dataene var falske. Prøv selv!



Hva kan dette brukes til? På begynnelsen av 1990-tallet ble Benfords lov brukt til å avsløre manipulering av regnskaps- og skattetall.

Mark J. Nigrini ved St. Michaels College undersøkte fordelingen av tall i første siffer for skattedata fra et stort antall firmaer over hele USA og fant at disse fulgte Benfords lov med stor presisjon. Så sammenlignet en disse med skattetall fra Brooklyn i New York som en visste var forfalsket. I tillegg lot en 743 studenter finne på tilfeldig 6-sifrede tall.

En oppdaget at de forfalskede skattedataene og studentenes tall i stor grad avvok fra Benfords lov. Det viste seg at de forfalskede dataene hadde en betydelig overhyppighet av 5- og 6-tall i første siffer, mens 1-tallet omtrent var fraværende.



Diagrammet viser fordelingen av første siffer i tall hentet fra aviser. Tilsvarende viser den også fordelingen av første siffer i folketallet i 3141 distrikter i USA. Begge følger Benfords.

En kan sannsynliggjøre Benfords lov ved f.eks. å ta utgangspunkt i et innbygertall på 1000. For at innbygertallet skal øke til et 2000, kreves en relativ økning på 100%. Derneft skal det bare en relativ økning på 50% for at 2000 skal endres til 3000 osv. Slik vil størrelser med konstant relativ vekst oppholde seg lenger ved lave førstesiffer.

Moraleen må bli at en må tenke seg grundig om før en forfalsker tallmateriale.

1.5 Hvorfor eksperimenter i matematikktimen?

Matematikken har gjennom mange år levd et isolert liv i grunnskolen. Når en er ferdig med mål og vekt, myntenheter og deler av geometrien, begynner det å bli vanskelig å finne gode eksempler på anvendelse av matematikken, som også oppleves meningsfulle av elevene. Det er først når elevene kommer opp i videregående skole og får fysikk og til dels kjemi og biologi, at de oppdager at matematikken de har læret på ungdomsskolen og i Vg1 er et meget viktig redskap for å kunne beskrive prosessene i naturen. Som kjent gjelder dette bare en liten av elevene. Mange vil derfor aldri forstå hvorfor skulle lære om funksjoner og matematiske sammenhenger.

Som en ekstra motivasjon i denne "vanskelige" tiden hvor matematikken blir hengende i luften, er det viktig å bringe inn enkle matematiske sammenhenger hentet fra andre realfag. Det er dette heftets hovedintensjon å motivere elevene til å se hvordan matematikk og enkel funksjonslære har en praktisk anvendelse.



Matematisk modellering

Modellering av fenomener har vært en del av matematikkundervisningen i mange år. Vanligvis er dette presentert på følgende måte:

1. En problemstilling med tilhørende måledata presenteres
2. Elevene etablerer en matematisk sammenheng (modell) ved å anvende regresjon eller enkel visuell kurvetilpasning.
3. En bruker den matematiske sammenhengen til å finne verdier utenfor det området det finnes måledata for (ekstrapolering), eller mellom målepunktene (interpolering).

Fordelen med denne framstillingen er at den er rask og enkel, og ikke krever annet enn en kalkulator.

Utvidet bruk av matematisk modellering omfatter hele prosessen:

1. Presentere problemstilling
2. **Tolke problemstillingen og planlegge måleoppstilling og føre kontroll med variabler (parametre)**
3. **Gjennomføre målinger på fenomenet og systematisere dataene i en tabell. Endre en og en variabel (parameter)**
4. Bestemme den matematiske modellen som harmonerer best med de tabellerte dataene
5. Bruke modellen til å *beregne* hvordan fenomenet vil oppføre seg utenfor måleområdet
6. **Undersøke kvaliteten til modellen ved å utføre målinger på fenomenet for aktuelle verdier**
7. **Sammenligne beregnede verdier med målte verdier**
8. **Analysere modellen med tanke på å forstå sammenhengen mellom den virkelige prosessen og den matematiske modellen**
9. **Diskuter avvik mellom beregnede og målte data og mulige feilkilder**

Det som kan oppfattes som en ulempe ved denne siste, og mer omstendelige metoden, er at den er tidkrevende, i tillegg til at den ofte krever ekstra utstyr. Fordelen er at elevene arbeider både praktisk og teoretisk og på den måten oppdager sammenhenger som de ellers ikke ville ha sett.

Dybdeforståelse for modellbygging

Dessuten åpner det seg muligheter for å drøfte de matematiske sammenhengene i lys av erfaringene fra den praktiske målesituasjonen. Dette er kanskje den viktigste gevinsten ved å la elevene selv gjøre målinger. En oppmerksom lærer kan bruke elevenes “bevissthetsbilde av prosessen” som “knagger” til å “henge” teorien på. Når en gjennomgår den matematiske modellen, er det viktig at hver del av modellen gjenkjennes og knyttes til fenomenet. Denne prosessen vil også føre til spørsmål det kan være vanskelig å gi gode svar på. Elevene vil dessuten oppdage at det er faktorer som forstyrrer målingene. For virkelig å oppdage feilkildene kan det være nødvendig å gjennomføre tilleggsmålinger hvor elevene har fokus rettet mot usikkerheten i målingene. Det samme gjelder å avsløre variabler de ikke har tilstrekkelig kontroll over.



Eksempel på skjulte variabler:

Ved måling av svingetiden for en pendel som funksjon av tyngden på loddet, kan en lett la seg lure av en forskyvning av tyngdepunktet når flere lodd henges på. Her er det viktig at en sørger for at pendelens lengde fra opphengningspunkt til tyngdepunktet er konstant.

Eksempel med spredning i målingene:

En vil alltid ha spredning i måleresultatene. I noen tilfeller er denne spredningen så stor at den kan ødelegge måleresultatet. Som vi skal se så gjelder dette i særlig grad skyting med strikk og slipp av papirhelikopter.

Dersom en kun gjør én måling for hver endring av variabel, vil en kanskje ikke oppdage usikkerheten. Gjør en derimot flere målinger hvor en tilstreber å holde alle variabler uforandret, vil en derimot kanskje oppdage at det likevel er store variasjoner i målingene. Dette kan bety at en likevel ikke er istand til å kontrollere variablene godt nok. I slike tilfeller kan en, om variasjonene er tilfeldige, gjøre mange målinger under "samme" betingelser for så å finne et gjennomsnitt. Det kan til og med være fornuftig å luke ut de mest ekstreme målingene.

Elever vil ikke få denne typen erfaring med mindre at de selv planlegger, gjennomfører og evaluerer måleserien.

På den annen side kan de bli så opptatt av å løse praktiske måleproblemer at den teoretiske forståelsen drukner i de mange praktiske utfordringene.

Metodefrihet

De nye læreplanene åpner også for metodevalg. Hvilket i praksis betyr at læreren kan velge den metoden han mener passer best for sine elever. Dette åpner ikke bare for en praktisk tilnærming av funksjonsbegrepet, men at man kan nærme seg nye tema innen matematikken på mange forskjellige måter. Slik kan en åpne for et større mangfold og imøtekomme forskjeller i elevmassen. Dessuten kan en slik variasjon gi en *dypere* forståelse for tematikken.

Metodefriheten gir også rike muligheter til å jobbe tverrfaglig, hvilket kan være med å bryte ned kunstige grenser mellom fagene.

1.6 Noen statistiske sammenhenger

La oss før vi avslutter dette kapitlet vil vi oppsummere noen viktige statistiske sammenhenger.

1.6.1 Middelerverdi

Kalles også noen ganger for *gjennomsnittet* og brukes gjerne når vi gjennomfører mange målinger som ikke er spredd for langt fra hverandre. Middelerverdien er spesielt anvendelig når vi gjør mange målinger av en og samme parameter, men hvor målingene er beheftet med tilfeldige feil.

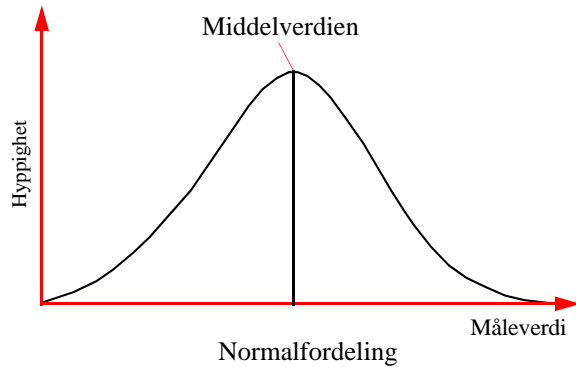
Middelerverdien bestemmes ved at vi summerer alle enkeltmålinger for så dele resultatet på antall målinger.



$$\bar{t} = \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (1.1)$$

Dersom vi f.eks. gjør mange målinger av temperaturen ($t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$) i en væske som skal være stabil, kan vi bestemme gjennomsnittstemperaturen (\bar{t}) ved ligning (1.1).

Dersom vi tegner hyppigheten for ulike måleverdier for målinger som er beheftet med tilfeldige feil, vil denne fordelingskurven ha en “klokkeform”. Siden målinger alltid vil være diskrete med en minste oppløsning, vil kurven egentlig være et stolpediagram. Blir derimot antallet målinger tilstrekkelig stort, kan vi tilnærme resultatet til en glatt kurve som vist på figuren over.



Kurven går enten under navnet *Gauss-fordeling* eller *normalfordeling*, og gir et inntrykk av hvordan hyppigheten av de ulike måleverdiene avtar med økende avstand fra middelverdien.

Bredden på kurven sier noe om hvor usikre målingene er. Stor usikkerhet vil gi en bredere normalfordeling.

1.6.2 Standardavvik på enkeltmålinger

Standardavviket (σ) sier noe om hvor samlet måleserien er, og defineres som:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n - 1}} \quad (1.2)$$

Standardaviket beregnes ved at vi summerer kvadratet av differansen mellom hver måling og middelverdien av alle målingene. Denne summen deles på antall målinger minus en, før vi tar kvadratroten av hele uttrykket. *Variansen* er kvadratet av standardavviket (σ^2).

Vanligvis brukes greske bokstaver for å angi eksakte verdier for middelverdi (μ) og standardavvik (σ), mens vi bruker latinske bokstaver (\bar{m} , s) for estimerte verdier når vi baserer verdiene på et utvalg av hele “populasjonen”.

Vi kan tenke oss to mulige situasjoner for en måleserie. Enten har vi hele måleserien, f.eks. 78 målinger av temperaturen i en væske. Eller vi kan tenke oss at vi har et utvalg av en serie, f.eks. kroppsvekten til ett år gamle spurver.

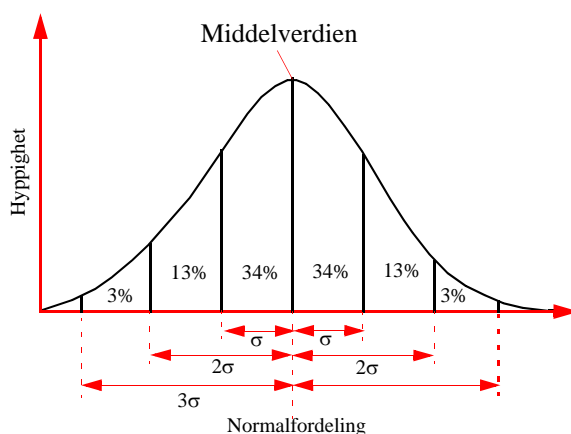


I det første tilfellet kan vi finne en eksakt verdi for både middelværdi og standardavvik fordi alle målinger er tilgjengelig. I det andre tilfellet vil vi alltid bare ha et utvalg av alle spurvene som finnes, og både middelværdi og standardavvik må bli et estimat av de virkelige verdiene.

Vi legger merke til at bidraget til standardavviket fra en måleverdi blir den samme, enten den ligger over eller under middelværdien. Vi legger også merke til at standardavviket er en tallverdi som angir en avstand fra middelværdien. Fra figuren over legger vi merke til at ca. 68 % (68,3 %) av måleverdiene ligger innenfor to standardavvik (2σ), mens ca 96 % (95,4 %) av måleverdiene ligger innenfor en bredde på fire standardavvik (4σ).

Et nærliggende spørsmål er hvorfor vi deler på $(n-1)$ og ikke bare n . Om vi tenker oss at vi har alle verdiene i en måleserie.

Det viser seg imidlertid at når vi deler på $n-1$ så får vi et mere forventningsrett estimat av standardavviket enn om vi bare delte på n . Det er vanlig å kalle denne verdien for det *empiriske standardavviket*.



1.6.3 Median og typetall

Typetallet i en måleserie er den tallverdien som har det største antall observasjoner. Det vil si den verdien det er flest av. Betegnelsen brukes gjerne hvis datasettet består av observasjonsverdier som går igjen. Typetallet kalles i enkelte sammenhenger også *modus*.

Datasettets verdier sorteres i stigende rekkefølge. **Median** er den midterste verdien i datasettet. Hvis medianen faller mellom to verdier, kan man velge å bruke gjennomsnittet mellom de to verdiene.

1.7 Regresjon

I dette siste avsnittet i dette kapitlet skal vi beskrive en metode for å kurvetilpasning, eller en metode for å finne den verdien eller det matematiske uttrykket (kurven), som best kan tilpasses en måleserie av observerte data. Det finnes flere metoder, her vil vi nøye oss med å beskrive *Minste kvadraters metode*.

Normalt vil en bruke kalkulator eller ulike typer programvare for å utføre en regresjon. Dette avsnittet er derfor tatt med for å få en viss forståelse for hva som ligger bak regneprogrammene.



Matematisk modellering

“Regresjon” med ingen uavhengig variabel.

Det enkleste tilfellet har vi når vi ønsker å anslå *en verdi* for en enkelt størrelse etter å ha fortatt en rekke målinger av denne. Dvs. at måleserien vår har *ingen uavhengig variabel*. Følgende kan være et eksempel:

Vi foretar 5 målinger av temperaturen i en kokende væske. Måleserien gir følgende verdier 120.3 °C, 119.8 °C, 119.5 °C, 120.1 °C og 121.2 °C.

Vi ønsker å bestemme den verdien som gir det minste avviket fra samtlige av de målte temperatu-
rene t_1 til t_5 . Denne verdien kaller vi \bar{t} . Vi finner da \bar{t} ved å minimalisere følgende uttrykk:

$$(\bar{t}-t_1)^2 + (\bar{t}-t_2)^2 + (\bar{t}-t_3)^2 + (\bar{t}-t_4)^2 + (\bar{t}-t_5)^2 \quad (1.3)$$

Dersom vi bestemmer minimumsverdien for dette uttrykket, finner vi at dette gir:

$$\bar{t} = \frac{1}{5}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5) \quad (1.4)$$

Som nettopp er middelverdien til de fem målingene. Generelt vil dette kunne skrives

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (1.5)$$

hvor $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ er de målte verdiene og n er antall målinger i måleserien.

Vi ser at regresjonen “koker” ned til å bli en middelverdeberegning.

“Regresjon” med en uavhengig variabel.

Ofte er ikke målingene gjort under helt like forhold, noen ganger ønsker vi nettopp å gjøre målinger av en *avhengig variabel* som funksjon av *én uavhengig variabel*. Dermed vil målingene ikke falle omkring én verdi (middelverdi), men omkring en “midlere” kurve som da vil være den kurven som gir det minste avviket i forhold til de målte verdiene. Den optimale kurven kan være av første, andre, tredje eller av en høyere grad. Eller kurven kan være en eksponensiell funksjon (e^x), en potensfunksjon (a^x) eller utvise en annen sammenheng.

Vi tenker oss at vi måler den avhengige variabel y'_i for en rekke verdier for den uavhengige variabelen x'_i . Dersom vi gjør n målinger får vi en måleserie (x'_i, y'_i) . Vi tenker oss at denne måleserien synes å fordele seg tilfeldig langs en rett linje som kan uttrykkes på følgende måte:

$$y = a \cdot x + b \quad (1.6)$$

Setter vi inn verdiene for den uavhengige variabelen x_i i denne ligning, finner vi beregnede verdier for den avhengige variabelen y_i . Avviket mellom den målte og den beregnede verdien for den i 'te målingen kan uttrykkes slik:



$$y'_i - y_i = y'_i - a \cdot x_i + b \quad (1.7)$$

Vi ønsker nå å finne de verdiene for koeffisientene a og b som gjør at det totale avviket mellom *alle* de målte og de beregnede verdiene blir minst mulig. For at måleverdier som faller under kurven og gir et negativt avvik ikke skal utligne avvik over kurven, kvadrerer vi avvikene:

$$(y'_i - y_i)^2 = (y'_i - a \cdot x_i + b)^2 \quad (1.8)$$

Vi kan nå finne uttrykk for koeffisientene a og b som minimaliserer det totale avviket. De optimale verdiene for a og b kan uttrykkes slik:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (1.9)$$

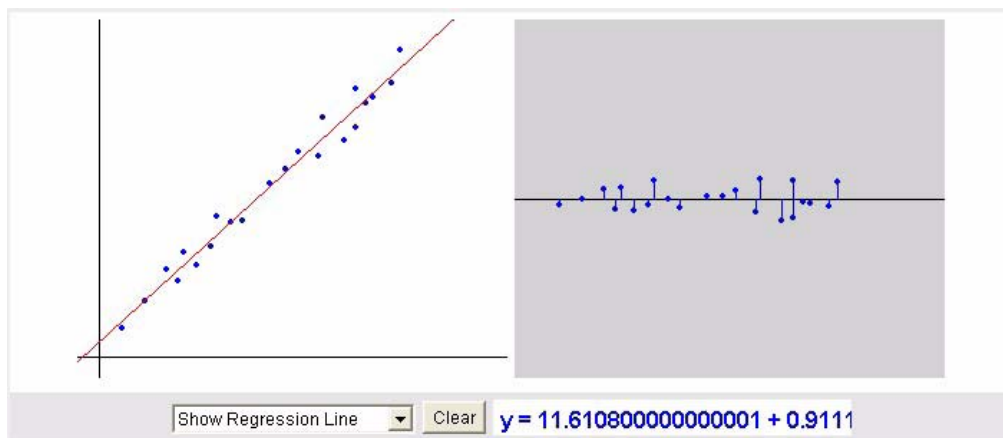
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.10)$$

Slike beregningene løses enkelt med programmer som utfører regresjon (for eksempel programmet GXP som er beskrevet i vedlegg C). Tilsvarende programmer finnes dessuten på de fleste avanserte kalkulatorer.



Matematisk modellering

Til venstre på figuren under er måleserien (x'_i, y'_i) plottet i et koordinatsystem. Videre ser vi den best tilpassede førstegradskurven gjennom måleserien. Figuren til høyre viser avvikene mellom den optimale kurven og de enkelte målepunktene. Det er summen av kvadratet av disse avvikene som minimaliseres når vi finner den optimale kurven².



Den endelige kurveligningen gir imidlertid intet mål for hvor mye målepunktene avviker fra kurven. For å få et inntrykk av spredningen kan vi beregne punktenes korrelasjonskoeffisient med hensyn til den optimale kurven. Korrelasjonskoeffisienten er gitt av ligning (1.11):

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left[n \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[n \sum_{i=1}^n (y_i^2) - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}} \quad (1.11)$$

Dersom denne er 1, vet vi at det er perfekt korrelasjon, dvs. at alle målepunktene ligger på kurven. Er den langt borte fra 1, vet vi at spredningen er relativt stor³.

-
2. Figuren gjengir en Java-applikasjon som dynamisk beregner den optimale regresjonslinjen etter som punktene legges inn.

Se: <http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/regress/regress.html>

3. Matematikken er hentet fra: <http://phoenix.phys.clemson.edu/tutorials/regression/index.html>



2 Enkle klasseromsforsøk

I dette kapittelet vil vi gi noen forslag til enkle eksperimenter som kan rigges til i klasserommet og som hjelper elevene til å se sammenhengen mellom måleresultat og de variable i den matematiske modellen.

2.1 Lengdemål

2.1.1 ...om å skyte strikk⁴

Problemstilling:

En ønsker å undersøke sammenhengen mellom strikkens tøyning og hvor langt den rekker når den skytes bortover gulvet.

Læringsmål:

Elevene skal tegne en kurve i et koordinatsystem som viser sammenhengen mellom tøyning og rekkevidde. De skal kunne gjøre rede for hva som menes med linearitet, og vurdere om resultatene er lineære eller ikke. Dernest skal de med egne ord tolke resultatene. De skal også få erfare at måleverdiene kan ha stor variasjon slik at de må gjøre flere like målinger og bestemme middelerverdier.

Utstyr:

- Ett strikk ca 5 - 8 cm
- En linjal minimum 30 cm

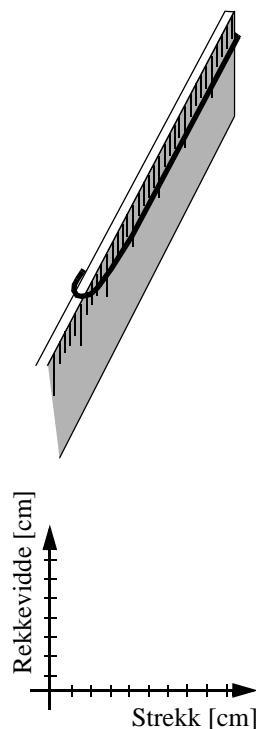
Gjennomføring:

Linealen holdes vannrett ca. 75 cm over gulvet. Den kan f.eks. legges på et sete eller bord. Strikken legges rundt enden av linealen og strekkes langs oversiden. Registrer hvor langt strikken tøyes før den slippes. Mål rekkevidden til "skuddet" i centimeter.

Mål rekkevidden for hver økning i strekket. Gjør måling for hver økning på 2cm. Gjenta forsøket til strikken ikke kan tøyes lenger.

Lag et koordinatsystem med passende målestokk på aksene, og plott inn rekkevidden som funksjon av hvor langt strikkens tøyes.

Undersøk om kurven er lineær. Evt. hva skyldes det at kurven er ulineær.



4. Etter en ide av Ingvill Stedøy ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen



Flere eksperimenter:

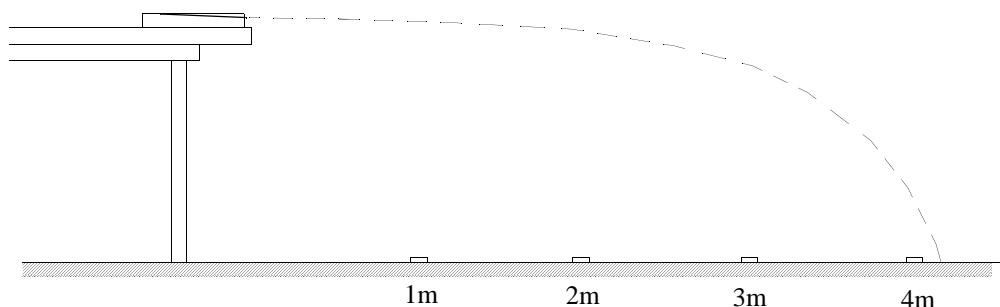
Hvilken betydning har helningsvinkelen til linjalen i skuddøyeblikket?

Undersøk om målingene kan gjentas, dvs. at rekkevidden er omtrent uforandret dersom strikkens skytes flere ganger etter hverandre med samme tøyning.

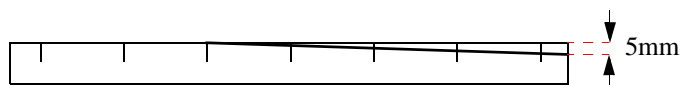
Måleeksempel:

Utskytingen ble foretatt fra en bordkant 79 cm over gulvet (bredden på linjalen er inkludert). Det ble brukt en 30 cm lang og 4 cm bred linjal.

Strikken var i utgangspunktet 8 cm lang når den ikke var slakk. Strikken var festet rundt forkanten av linjalen ca 5 mm under oversiden av linjalen. Dvs. at strikken peker slakt nedover.



Det klistres tapebiter med 1 meters mellomrom bortover gulvet. En tommestokk brukes til å måle nøyaktig lengde på skuddet. I tillegg ble retningen og plasseringen av linjalen markert med tape på bordet..



Dette er et eksperiment hvor det er vanskelig å kontrollere parameterne. Her er noe en må passe på:

- Strikket vil tøyes etter hvert
- Vanskelig å slippe akkurat likt hver gang
- Festepunktet til strikken må være på samme sted under hele forsøket
- Det er også en fordel av retningen er omtrent den samme
- Strikkens flukt gjennom luften vil variere fra skudd til skudd og gi forskjellig lengde
- Hvordan strikken treffer gulvet har mye å se hvor langt den glir etter nedfallet

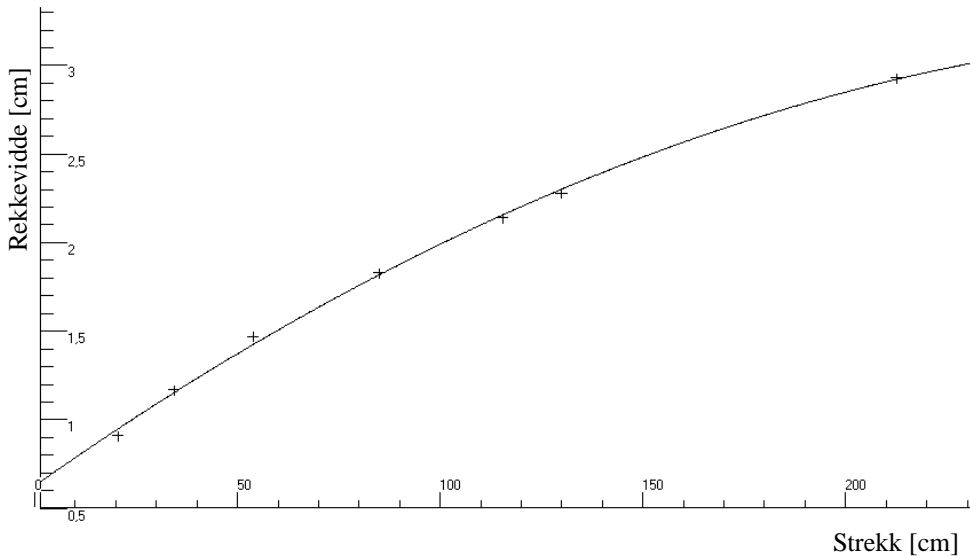
Siden usikkerheten er så stor er det lurt å gjennomføre flere skudd for hver stramming, en får da et inntrykk av spredningen. Til slutt beregnes en gjennomsnittlig lengde for hver stramming.



Table 2.1 Målte lengder med strikkskyting

| Strekk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Gj. snitt |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| 9 | 45 | 55 | 70 | 85 | 78 | 66,6 |
| 11 | 175 | 173 | 180 | 194 | 186 | 181,6 |
| 13 | 270 | 276 | 270 | 270 | 256 | 268,4 |
| 15 | 319 | 340 | 322 | 327 | 320 | 325,6 |
| 17 | 350 | 392 | 381 | 393 | 397 | 382,6 |
| 19 | 425 | 444 | 403 | 432 | 465 | 433,8 |
| 21 | 500 | 433 | 465 | 505 | 474 | 475,4 |
| 23 | 483 | 462 | 512 | 437 | 490 | 476,8 |

Som vi ser av tabell vedlegg 2.1 så er spredningen størst ved liten strekk og stor strekk. Vi ser også at det er lite å hente på lengde når strekket blir stort. Dersom vi setter verdiene inn i regresjonsprogrammet⁵ får vi følgende.



5. Graf-X-pert for Windows ver. 1.01 av Jostein Våge ved PLU



Matematisk modellering

Selv om ikke den valgte funksjonen var den beste, så ser vi at den gir en ganske god tilnærming til kurven.

$$L = ax^2 + bx + c \quad (2.1)$$

hvor:

$$a = -1,77$$

$$b = 85,6$$

$$c = -554,7$$

Vi ser at kurven kan tilpasses en parabellignende kurve.

2.1.2 ...om å dyrke humle

Humle eller *Humulus* er en svært voksevillig staude som gjerne slynger seg opp langs pergula, vegger eller det som ellers måtte finnes av ting å støtte seg til. Planten kan vokse fra 4 til 6 meter i løpt av sommeren. Om våren skyter planten lange skudd opp fra rota, mens den om høsten visner helt ned. Er været varmt og fuktig, kan den lett vokse 10 - 15 cm i døgnet. Planten formerer seg ved stiklinger eller ved deling. Den trives over hele landet og kan vokse høyt over havet.

Problemstilling:

I denne øvelsen ønsker vi å finne en sammenheng mellom veksthastighet og lufttemperatur.

Læringsmål:

Elevene skal utføre målinger på plante (f.eks. humle), undersøke og tolke resultatene, samt studere sammenhengen mellom ulike variabler (f.eks. temperatur og tilvekst).

Utstyr:

- Humle
- Tommestokk eller målbånd
- Ev. stige eller gardintrapp

Gjennomføring:

Målingene kan begynne idet planten titter opp av jorda i slutten av april eller i begynnelsen av mai. Velg et tidspunkt for måling da det er størst sannsynlighet for at du er hjemme. Av praktiske grunner måles temperaturen på samme tidspunkt. Temperaturen kan imidlertid svinger sterkt over døgnet. Det





ideelle ville vært å målt mellom kl. 14.00 - 15.00 når det er som varmest, men målingene kan også utføres senere på ettermiddagen.

Siden planten kan bli svært høy vil det være praktisk å ha mulighet til å sette opp en stige eller plassere en gardintrapp inntil måleplassen. Planten sprer seg lett, det er derfor vanlig at skuddene står tett-i-tett. Av den grunn vil det være lurt å merke den stengelen som er valgt ut for måling. For å forenkle målingen, bør en feste stengelen langs "vokseveien". Dersom en noterer lengen opp til disse feastepunktene, slipper en hver gang å måle fra rota.

Selv om vi primært er interessert i å studere den daglige tilveksten, er det greit å måle total lengden. Ved avsluttet måleserie kan dataene legges inn i et regneark som beregner vekstøkningen fra dag til dag.

Det er helt sikkert mange parametere som påvirker vekstraten, her er noen:

- Temperatur gjennom døgnet
- Fuktighet i bakken
- Plassering (vindfullt eller i le)
- Belysning (sol, skygge)
- Næringstoffer i bakken (gjødsling)

Siden det er vanskelig å kontrollere alle disse parametrene, må en regne med en betydelig usikkerhet i målingene. En kan imidlertid sørge for å holde det fuktig, om mulig sørge for at den plasseres i skyggen slik at den ikke så lett påvirkes av om det er strålende sol eller overskyet. Plasseres den i le, så vil resultatene være mindre avhengig av trekk.

Måleeksempel:

Vi foretok en måling av ett skudd av humle fra 15. mai til 22. juni 2007. I denne perioden hadde stengelen vokst fra å være 26 cm den 15. mai, til å være 293,5 cm den 22. juni. Dvs. en gjennomsnittlig vekst på 6,7 cm i døgnet. Tabellen til høyre viser måleresultatene.

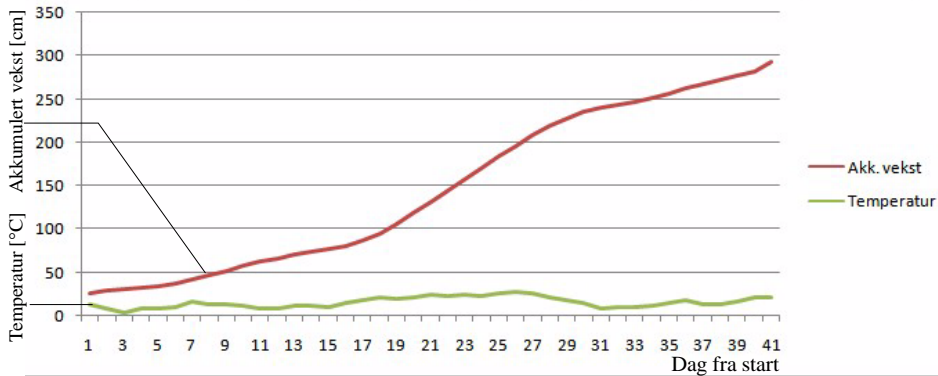
Kolonnene viser:

- A. Måling nummer
- B. Akkumulert lengde
- C. Utetemperatur
- D. Tilvekst siste døgn

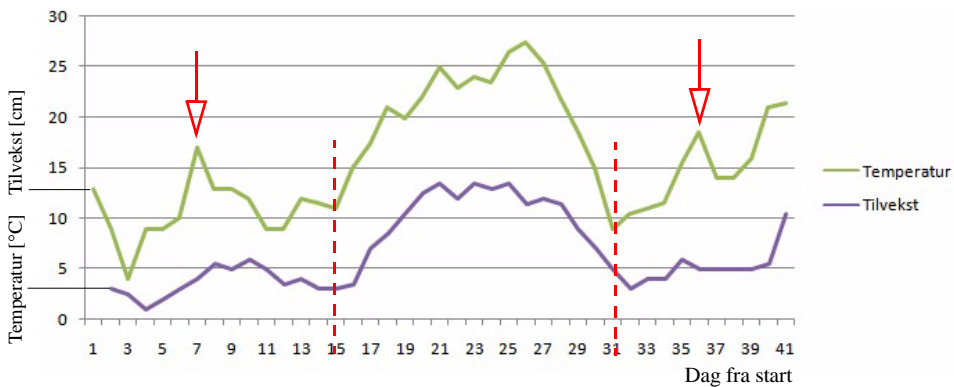
Dersom vi framstiller akkumulert vekst som funksjon av temperaturen, får vi grafen øverst på neste side.

Vi kan ane at veksten er kraftigere når det er godt og varmt, enn når det er kaldt.

| A | B | C | D | A | B | C | D |
|----|-------|------|------|----|-------|------|------|
| 1 | 26 | 13 | | 21 | 132 | 25 | 13,5 |
| 2 | 29 | 9 | 3 | 22 | 144 | 23 | 12 |
| 3 | 31,5 | 4 | 2,5 | 23 | 157,5 | 24 | 13,5 |
| 4 | 32,5 | 9 | 1 | 24 | 170,5 | 23,5 | 13 |
| 5 | 34,5 | 9 | 2 | 25 | 184 | 26,5 | 13,5 |
| 6 | 37,5 | 10 | 3 | 26 | 195,5 | 27,5 | 11,5 |
| 7 | 41,5 | 17 | 4 | 27 | 207,5 | 25,5 | 12 |
| 8 | 47 | 13 | 5,5 | 28 | 219 | 22 | 11,5 |
| 9 | 52 | 13 | 5 | 29 | 228 | 18,5 | 9 |
| 10 | 58 | 12 | 6 | 30 | 235 | 15 | 7 |
| 11 | 63 | 9 | 5 | 31 | 240 | 9 | 5 |
| 12 | 66,5 | 9 | 3,5 | 32 | 243 | 10,5 | 3 |
| 13 | 70,5 | 12 | 4 | 33 | 247 | 11 | 4 |
| 14 | 73,5 | 11,5 | 3 | 34 | 251 | 11,5 | 4 |
| 15 | 76,5 | 11 | 3 | 35 | 257 | 15,5 | 6 |
| 16 | 80 | 15 | 3,5 | 36 | 262 | 18,5 | 5 |
| 17 | 87 | 17,5 | 7 | 37 | 267 | 14 | 5 |
| 18 | 95,5 | 21 | 8,5 | 38 | 272 | 14 | 5 |
| 19 | 106 | 20 | 10,5 | 39 | 277 | 16 | 5 |
| 20 | 118,5 | 22 | 12,5 | 40 | 282,5 | 21 | 5,5 |
| | | | | 41 | 293 | 21,5 | 10,5 |



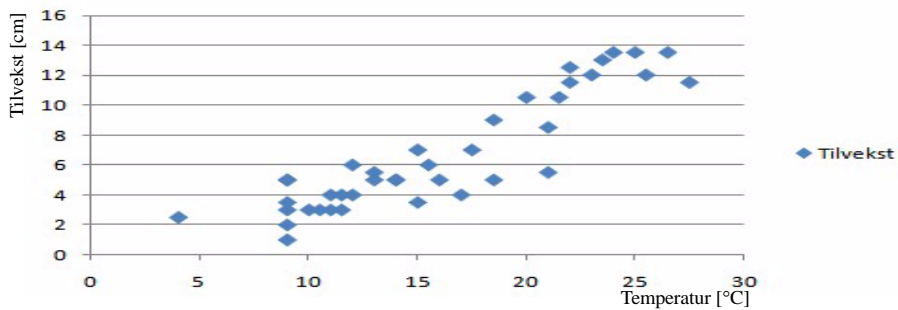
Sammenhengen mellom temperatur og tilvekst, kommer imidlertid langt tydeligere fram når vi tegner grafene for temeperatur og tilvekst alene som vist i figuren under.



Vi kan også ane et lite etterslep (se stiplede linjer) ved at endringer i temperaturen gir endring i tilvekst ca ett døgn senere. Dessuten ser vi at kortvarige varmeperioder ikke gjenspeiles i tilvekstkurven (se piler).

Dersom vi framstiller tilvekst som funksjon av utetemperatur, ser vi den samme tendensen som i grafen over.

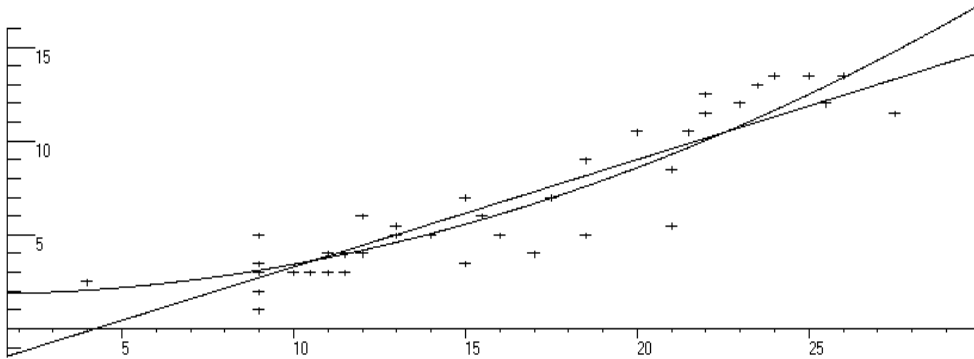
Tilvekst som funksjon av temperatur





Vi ser også at det er relativ stor spredning i dataene. Dette gjenspeiler at det er mange parametere som påvirker tilveksten. Mye tyder likevel på at temperatur er en av de viktigste.

Vi kan nå legge inn en best tilpasset funksjon ved hjelp av regresjon⁶. Figurene under viser regresjon ved hjelp av polynomer av både 1. og 2. grad.



Under er funksjonene uttrykt algebraisk, først med regresjon av 1. grads (lineær regresjon), der-
nest med 2. grad:

Regresjon ved hjelp av 1. grads polynom (lineær regresjon):

$$\Delta L = 0,57T - 2,42 \text{ [cm]} \quad (2.2)$$

hvor

ΔL er tilveksten i cm

T er temperaturen i °C

Standardaviket for denne funksjonen er beregnet til 1,67

Regresjon ved hjelp av 2. grads polynom:

$$\Delta L = 0,018T^2 - 0,019T - 1,842 \text{ [cm]} \quad (2.3)$$

hvor

ΔL er tilveksten i cm

T er temperaturen i °C

Standardaviket for denne funksjonen er beregnet til 1,57

Det kan dermed se ut som om vi får en bedre tilpassning med et 2. grads polynom.

6. Regresjonen er gjort ved hjelp av Graph-X-pert.



Matematisk modellering

Siden spredningen er relativt stor så er det vanskelig å si hvilke av disse to funksjoene som beskriver den virkelige prosessen best. Inntil videre er det naturlig å holde fast ved en 1. grads tilnærning.

Flere eksperimenter:

En kan gjøre målinger med flere stengler som tilhører to separate planter. Vil vekstraten endre seg dersom den ene vannes og gjødsles jevnlig, mens den andre overlates til seg selv?

En kan også studere vekstraten til andre tider i vekstperioden. Hvordan er for eksempel tilveksten i august - september?

Tilsvarende målinger kan gjøres på andre planter, for eksempel solsikke.

2.2 Telling

2.2.1 ... om telle pendelens svingninger

Problemstilling:

Vi ønsker å undersøke sammenhengen mellom pendelens lengde og antall svingninger i minuttet.

Læringsmål:

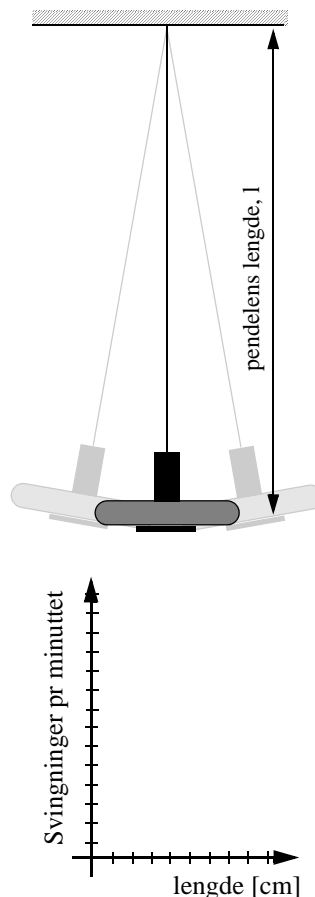
Elevene skal forstå at det er en sammenheng mellom pendelens lengde og antall svingninger pr. minutt, og at denne sammenhengen kan fremstilles som en graf i et koordinatsystem. De skal også kunne betydningen av kurveformen med egne ord.

Utstyr:

- Ett lodd hengende i en snor ca. 1,5 meter
- En klokke

Gjennomføring:

Lag en pendel ved hjelp av et lodd og en snor og heng den opp slik at den kan svinge fritt. Sørg for at pendelen er ca. 1,5 meter lang. Mål pendelens lengde fra festepunktet og ned til midtpunktet av loddet (tyngdepunktet). Dra pendelen ut til siden og tell antall svingninger i løpet av ett minutt. Gjør pendelen 5 cm kortere og gjenta forsøket. Forsett slik til pendelen er ca. 50 - 70 cm lang. Skriv resultatene inn i en tabell og tegn en graf som viser sammenhengen mellom pendelens lengde og antall svingninger i minuttet.





Flere eksperimenter:

- Undersøk svingetida som funksjon av tyngden av lodd. Hvilke parametere er det viktig å kontrollere?
- Undersøk sammenhengen mellom svingetiden og utslaget.

Eller en kan simpelthen lage en åpen problemstilling av typen:

- Hvilke parametere påvirker svingetiden til pendelen.

Teori:

Fra fysikken vet vi at svingetiden (T) kan uttrykkes som funksjon en funksjon av pendellengden (l) i meter.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.4)$$

hvor

T = svingetiden (sek)

l = pendelens lengde (m)

g = tyngdeakselerasjonen ($9,81\text{m/s}^2$)

Dersom vi setter inn verdier i ligning (2.4) får vi:

$$T = 2\sqrt{l} \quad (2.5)$$

Vi kan også ordne ligning (2.4) slik at den uttrykker antall svingninger pr. sekund

$$\text{Antall svingninger pr. minutt} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.6)$$

Bruk ligning (2.6) og regn ut antall svingninger i minuttet som funksjon av lengden l .

Måleeksempel

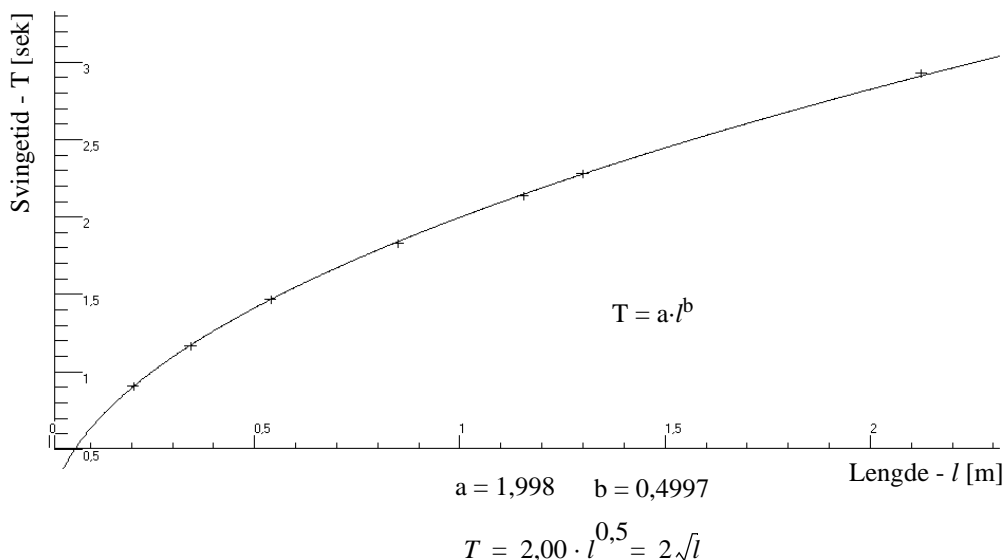
Ett lodd på 1 kg opphengt i en flettet nylonsnor gir følgende målinger.

| Lengde (cm) | Svingninger pr. min. | Svingetid T (sek) |
|-------------|----------------------|-------------------|
| 212,5 | 20,5 | 2,93 |
| 130,0 | 26,3 | 2,28 |



| Lengde (cm) | Svingninger pr. min. | Svingetid T (sek) |
|-------------|----------------------|-------------------|
| 115,5 | 28,0 | 2,14 |
| 85,0 | 32,7 | 1,83 |
| 54,0 | 40,8 | 1,47 |
| 34,5 | 51,3 | 1,17 |
| 20,5 | 66,0 | 0,91 |

Målingene er plottet og det er utført en eksponensiell regresjon hvor parameterne a og b er beregnet⁷.



Vi ser at målingene stemmer godt med ligningen fra fysikken.

Kontrolloppgave

Bruk pendelen og formelen til å bestemme lengden av et ukjent tidsintervall.

Alle klokker samles inn.

7. Graf-X-pert for Windows ver. 1.01 av Jostein Våge ved PLU



2.2.2 ... om å telle andemat-planter i en bolle

Andemat er en vannplante som formerer seg raskt. Den egner seg derfor godt til forsøk der en vil studere tilveksten av planter som funksjon av tida. Forsøket kan knyttes til populasjonslæren i biologi og naturfag. Formeringen av andematplanten foregår ved at en plante deler seg i to. Man kan derfor forvente en eksponentiell vekst i dette forsøket.

Problemstilling:

Finn en matematisk modell som beskriver veksten av andemat som funksjon av tida. Sørg for å kontrollere de variable.

Læringsmål:

Med dette forsøket ønsker vi å vise at matematikk med hell kan brukes til å beskrive biologiske prosesser.

Utstyr:

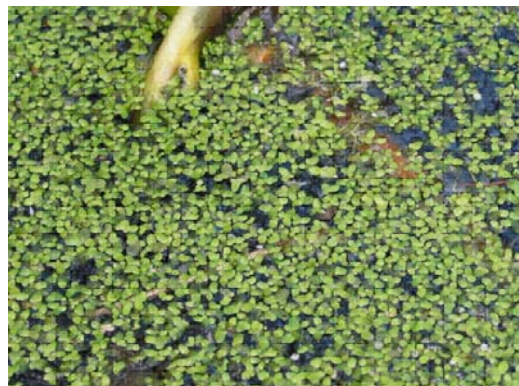
- Andematplanter
- Store begerglass eller andre stor beholdere,
- Miljøpåvirkere som for eksempel Substral

Gjennomføring:

Plantene kan kjøpes i akvariebutikker, eller samles inn fra en stille dam i marka. I eksemplet nedenfor startet vi med 4 planter i et begerglass, men man kan med fordel starte med flere og benytte et større kar. Dette er for øvrig et element som bør drøftes med elevene før man setter i gang.

Man kan også start med flere kar med andemat og gi populasjonene i det enkelte karet forskjellige vekstbetingelser. På denne måten blir forsøket mer interessant både biologisk og matematisk. Ikke minst må en sørge for å ha kontroll med de ulike variable som f.eks. temperatur, næringstilførsel, lys o.l.

Telling av antall andematplanter kan gjøres hver eller annenhver dag. Før man teller antallet etter en helg, bør det lages en matematisk modell for å prediktere antallet ved starten av uka. Så kan man telle det reelle antallet, for på den måten å etterprøve modellen. Modellen kan dermed forbedres for hver nye måling. Her kan man diskutere avvik fra modellen og om den blir bedre jo flere målinger som ligger til grunn. Forsøket kan med fordel kjøres i 3-4 uker.





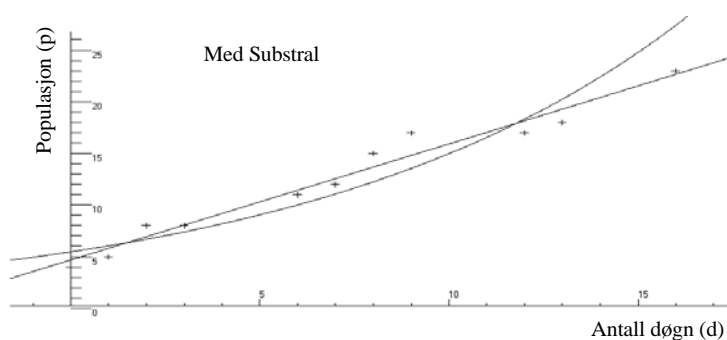
Matematisk modellering

Eksempel:

Forsøket i dette eksempelet er gjennomført i løpet av 16 dager og det er utført med og uten næring (Substral).

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| Dager etter start (d) | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 | 7 | 8 | 9 | 12 | 13 | 16 |
| Antall (m/Substral) | 4 | 5 | 8 | 8 | 11 | 12 | 15 | 17 | 17 | 18 | 23 |
| Antall (u/Substral) | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |

Figuren under viser en lineær og en eksponensiell kurvetilpasning til dataene hvor kolonien er tilført næring (Substral). Som vi ser, så er kurvene relativt dårlig tilpasset.



Lineær tilnærming:

$$p = 1,12 \cdot d + 4,67 \quad (2.7)$$

hvor p er populasjonen (antall planter) og d er antall døgn. Standardavviket for denne tilnærmingen er 1,17

Eksponensiell tilnærming:

$$p = 5,46 \cdot e^{0,1d} \quad (2.8)$$

Standardavviket for denne tilnærmingen er 2,43, dvs. dåligere enn den lineære.

Ligning vedlegg 2.8 kan også uttrykkes med en vekstfaktor $k = e^{0,1} = 1,105$, hvilket betyr at midlere tilvekst med tilførsel av næring er 10,5% pr. døgn.

$$p = p_0 \cdot k^d = 5,46 \cdot 1,105^d \quad (2.9)$$



En mulig årsak til den dårlige tilnærmingen til de to modellene, kan være mange. En nærliggende årsak er at populasjonen er alt for liten for at de klare sammenhengene trer fram. En annen årsak kan være at næringstilgangen er noe ujevn.

Dersom vi gjør tilsvarende for en koloni som ikke er tilført næring, får vi følgende:

Lineær tilnærming:

$$p = 0,44 \cdot d + 3,88 \quad (2.10)$$

Standardavviket for denne tilnærmingen er 0,79

Eksponensiell tilnærming:

$$p = 4,33 \cdot e^{0,061d} \quad (2.11)$$

Uttrykt medvekstfaktor $k = e^{0,061} = 1,063$, hvilket betyr at midlere tilvekst er 6,3% pr. døgn.

$$p = p_0 \cdot k^d = 4,33 \cdot 1,063^d \quad (2.12)$$

Standardavviket for denne tilnærmingen er 0,59, dvs. litt bedre enn den lineære.

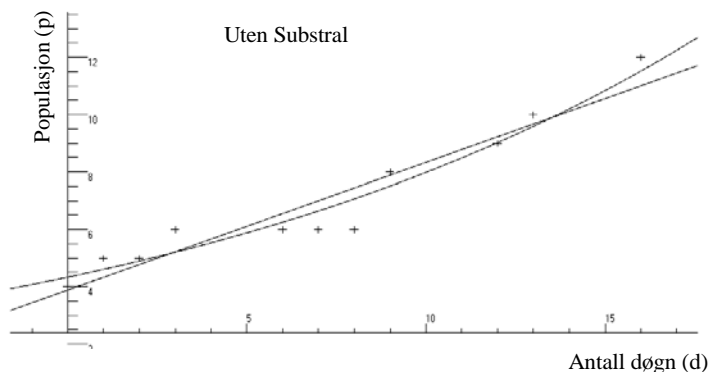
Tolkning:

Konstantene i den lineære modellen, er relativt enkle å tolke:

$$p = 0,44 \cdot d + 3,88 \quad (2.13)$$

Konstanten 0,44 uttrykker tilveksten pr. dag. Som vi ser, så gror det fram i underkant av én ny plante hvert annet døgn. 3,88 uttrykker hvor mange planter vi startet med ved dag 0. Vi husker at dette tallet var 4, men at kurvetilpasningen har endret denne verden noe.

$$p = p_0 \cdot k^d = 4,33 \cdot 1,063^d \quad (2.14)$$





Matematisk modellering

Konstanten 4,33 uttrykker antallet planter ved oppstart. Igjen ser vi at kurvetilpasningen har forrykket verdien noe. 1,063 uttrykker den gjennomsnittlige vekstraten (k) som i dette tilfellet er ca 6,3%.

Kurvetilpasningen er utført med Graf-X-pert for Windows⁸.

2.2.3 ... om å telle lydsvingninger i flaske

Problemstilling:

Finn en matematisk modell som beskriver sammenhengen mellom tonehøyde og luftvolumet i en 1/2 liter brusflaske.

Læringsmål:

Gjennom forsøk med å blåse over kanten av en flaske, skal vi bestemme matematisk sammenheng mellom tonehøyden (frekvensen) og luftvolumet i flasken.

Utstyr:

- Tomflaske (1/2 liter)
- PC med mikrofon og nødvendig programvare

Gjennomføring:

Til dette forsøket trengs en frekvensteller. Slike kan være dyre. Det finnes imidlertid en billig løsning dersom en disponerer en PC m/mikrofon. På nettet finnes en rekke gratisprogrammer som teller frekvensen til en akustisk tone, sunget eller spilt i mikrofonen. *Musical Tuner* er et eksempel på et slikt program⁹.

De fleste bærbare PC'er er utstyrt med en intern mikrofon, denne kan brukes til forsøket. Det er likevel å foretrekke og bruke en ekstern mikrofon. En kan få en brukbar mikrofon til ca 60,- kr.

8. Graf-X-pert for Windows ver. 1.01 av Jostein Våge ved PLU

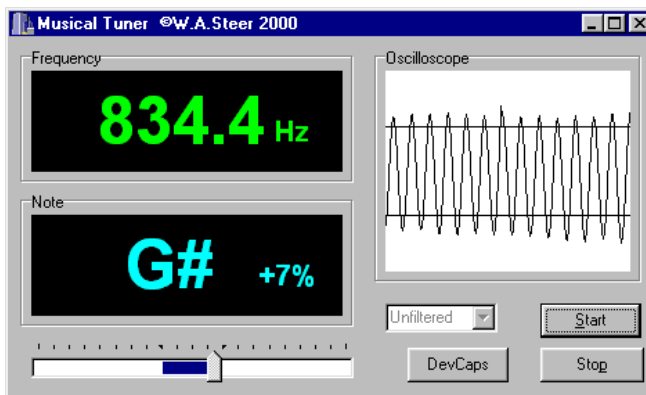
9. Ett bruk f.eks. W. A. Steer's program: Musical Tuner som kan hentes ned på siden:
<http://www.techmind.org/audio/index.html#mustun>



Installer og start programmet (trykk START), koble til mikrofonen, og plystre en tone. Frekvensen framkommer på displayet.

I tillegg til å vise frekvensen, angir programmet avvik fra nærmeste tone på skalaen og viser bølgeformen i sann tid.

I dette forsøket skal vi lage en tone ved å blåse over tuten på en flaske. Ved gradvis å fylle flasken, kan vi tabellere sammenhengen mellom luftvolumet i flasken og tonehøyden.



Eksempel:

I vårt eksempel har vi brukt en 1/2 liter brusflaske.

Vi starter med tom flaske. Deretter benyttes en 50 ml sprøyte til gradvis å fylle opp flasken. Vi gjør målinger av frekvensen hver gang vi øker vannvolumet med 50 ml.

Når vi nærmer oss full flaske blir det vanskeligere og oppnå en målbar tone. Til slutt fyller vi opp restvolumet. Da vet vi volumet på denne høyeste tonen og vi kan lett beregne volumet for de øvrige tonene ved å trekke fra det nødvendige antallet 50 ml. Vi har i dette eksempelet valgt å regne volumet helt fra toppen av tuten.

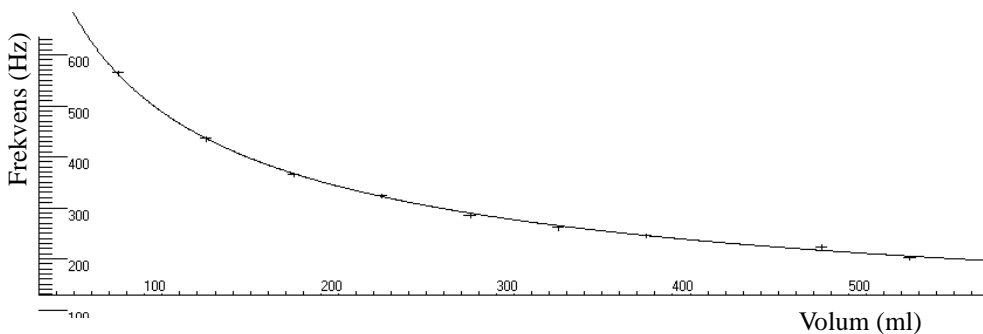


Tabellen under viser resultatet av målingen. Den høyeste frekvensen må ansees å være usikker.

| | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|
| Mengde tilført vann | 0,0 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,50 |
| Luftvolum, V [ml] | 535 | 485 | 435 | 385 | 335 | 285 | 235 | 185 | 135 | 85 | - |
| $\sqrt{\frac{1}{V}} \cdot 10^{-3}$ | 1,87 | 2,06 | 2,30 | 2,60 | 2,99 | 3,51 | 4,26 | 5,41 | 7,41 | 11,76 | |
| Tone | 202 | 215 | 224 | 246 | 261 | 286 | 324 | 365 | 436 | 565 | - |



Dersom vi foretar en regresjonsanalyse på dataene¹⁰, får vi følgende kurvetilpasning:



Kurvetilpasningen gir følgende resultat:

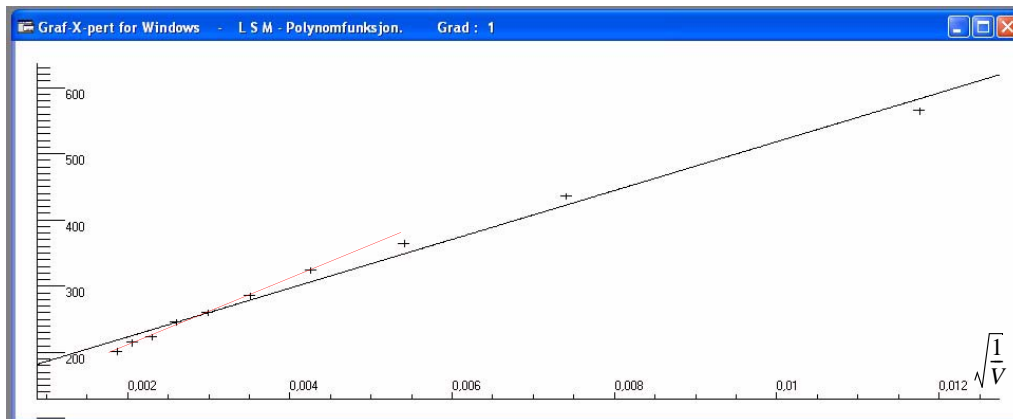
$$F = 6392,8 \cdot V^{0,54} \quad (2.15)$$

$$F = 6392,8 \cdot V^{-0,54} = 6392,8 \frac{1}{V^{0,54}} \approx 6392,8 \sqrt{\frac{1}{V}} \quad (2.16)$$

Standardavviket er beregnet til ca. 4,0.

Av dette kan vi slutte at frekvensen er omvendt proporsjonal med noe i nærheten av rota av volumet.

Dersom vi plotter frekvensen som funksjon av $\sqrt{\frac{1}{V}}$, vil vi få en omtrent lineær sammenheng.



Selv om datasette ikke er eksakt linært, så ser vi at det tenderer mot en slik sammenheng. Så kan en fundere på hvorfor de tre siste målingene bøyer av, dvs. frekvensen blir lavere enn forventet.

10.Graf-X-pert for Windows ver. 1.01 av Jostein Våge ved PLU



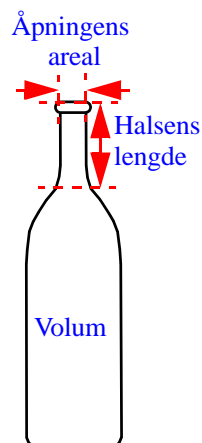
Tolkning/teori:

La oss sammenligne dette resultatet med den tradisjonelle formelen for resonans i en hulromsresonator.

Når vi blåser over tuten på ei flaske, puffer vi luft ned i flasken, trykket i flasken øker slik at luften støtes ut igjen. Siden vi fortsatt blåser så dytter vi ny luft ned i flasken som igjen støtes ut. Slik går luften raskt ut og inn av flasken.

Tonen vi får er bestemt av flere ting. Jo fortere luften i flasken kan komme ut og inn, jo høyere tone får vi. De viktigste faktorene er:

- **Lengden av flaskehalsen.**
Jo lengre hals jo tregere går luften ut og inn og jo dypere tone (under brøkstreken)
- **Størrelsen av volumet.**
Jo større volum, jo lengre tid tar det å bevege luften ut og inn og jo dypere tone (under brøkstreken)
- **Størrelsen på åpningen:**
Jo større åpning jo lettere kan luften gå ut og inn og jo høyere (lysere) tone (over brøkstreken).



Denne sammenhengen kan uttrykkes på følgende måte.

$$f_{\text{resonans}} = \frac{\text{Lydhastighet}}{2\pi} \sqrt{\frac{\text{Åpningens areal}}{\text{Hulrommets volum} \cdot \text{Åpningens lengde}}} \quad (2.17)$$

Kontroll

For å kontrollere om modellen er korrekt, kan elevene utfordres til å lage en mest mulig korrekt skala. De ulike arbeidsgruppene kan beregne og måle opp vann til en eller to toner i skalaen alt etter hvor mange som deltar i aktiviteten.

Dernest kontrollmåles flaskene med frekvensmålinger og alle utfordres til å spille en melodi på flaskene.

| | | | | | | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-------|-----|-------|-------|
| Tone | C3 | C3# | D3 | D3# | E3 | F3 | F3# | G3 | G3# | A3 | A3# | B3 |
| Frekvens | 130,8 | 138,6 | 146,8 | 155,6 | 164,8 | 174,6 | 185 | 196 | 207,7 | 220 | 233,1 | 246,9 |
| Tone | C4 | C4# | D4 | D4# | E4 | F4 | F4# | G4 | G4# | A4 | A4# | B4 |
| Frekvens | 261,6 | 277,2 | 293,6 | 311,1 | 329,6 | 349,2 | 370 | 392 | 415,3 | 440 | 466,2 | 493,9 |

Tabellen over gjengir sammenhengen mellom frekvens og tone i skalaen.



Matematisk modellering

2.3 Mengdemål

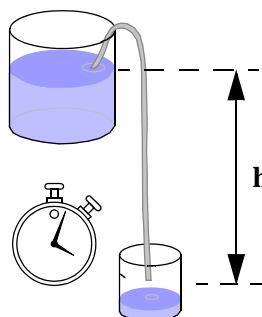
2.3.1 ... om å måle vannmengder

Problemstilling:

Vi ønsker å undersøke sammenhengen mellom vannstrøm og fallhøyde.

Læringsmål:

Ved hjelp av en hevert skal elevene finne en sammenheng mellom fallhøyden, h , fra overflata i det øverste reservoaret ned til utløpet av slangen, og mengde vann som renner gjennom slangen i løpet av 30 sekunder. Sammenhengen skal fremstilles som en graf.



Utstyr:

- En plastboks som rommer ca. 2 liter
- Ett desilitermål
- En 80 cm plastslange (diameter. ca. 5 mm)
- En stoppeklokke

Gjennomføring:

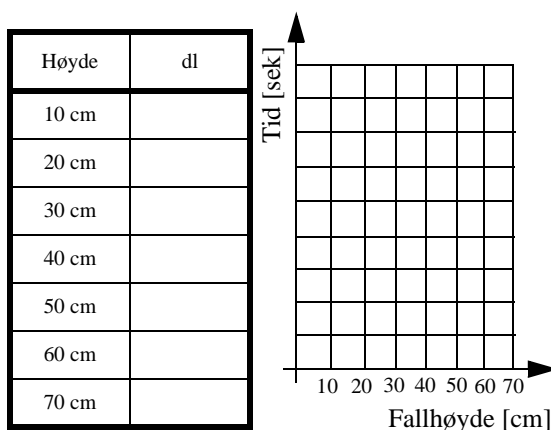
Den store plastboksen fylles med vann. Slangen dyppes i vannet og suges full av vann. Den ene åpningen tettetes med fingeren, mens den andre senkes ned i det øverste karet. Så senkes den nederste enden ned til ønsket høydeforskjell. Idet vi åpner for vannet som renner ned i desilitermålet, startes klokka. Vi registrerer så tiden det tar for at 2,5 dl vann har rent ned i desilitermålet.

Dette gjentas for alle aktuelle fallhøyder og resultatene føres først inn i tabellen, for deretter å plottes i koordinatsystemet til venstre.

Flere eksperimenter:

- Endre dimensjonen på slangen å gjenta eksperimentet. Sammenlign resultatene.

Renner vannet forttere eller langsommere etterhvert som vannstanden i den øverste avtar?



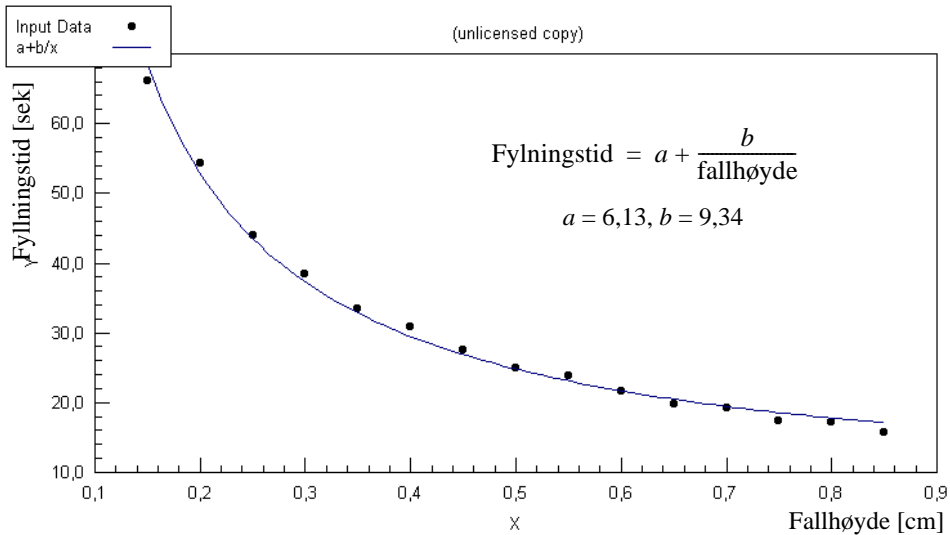


Måleeksempel

Det er utført målinger på fyllhastigheten i et målebeger på 2,5 dl. Det øvre karet hadde en diameter på 23 cm. Indre diameter på plastrøret som ble brukt som hevert, var 4 mm.

| Fallhøyde (m) | Fyllhastighet (sek) | Fallhøyde (m) | Fyllhastighet (sek) |
|---------------|---------------------|---------------|---------------------|
| 0,85 | 15,8 | 0,45 | 27,5 |
| 0,80 | 17,2 | 0,40 | 30,9 |
| 0,75 | 17,4 | 0,35 | 33,4 |
| 0,70 | 19,3 | 0,30 | 38,4 |
| 0,65 | 19,8 | 0,25 | 44,0 |
| 0,60 | 21,7 | 0,20 | 54,2 |
| 0,55 | 23,8 | 0,15 | 66,2 |
| 0,50 | 24,9 | | |

Plotter vi disse dataene og utfører en ulineær regresjon¹¹ kan vi få følgende.



Vi kan få en rimelig god tilnærming ved formelen:

$$\text{Fyllningstid} = 6,13 + \frac{9,34}{\text{fallhøyde}} [\text{sek}]$$

11.Datafit 8.1.69 Okedale Engineering: <http://www.curvefitting.com/download.htm>



$$\text{Fyllningstid} = 6,13 + \frac{9,34}{\text{fallhøyde}} \quad (2.18)$$

innenfor måleområdet.

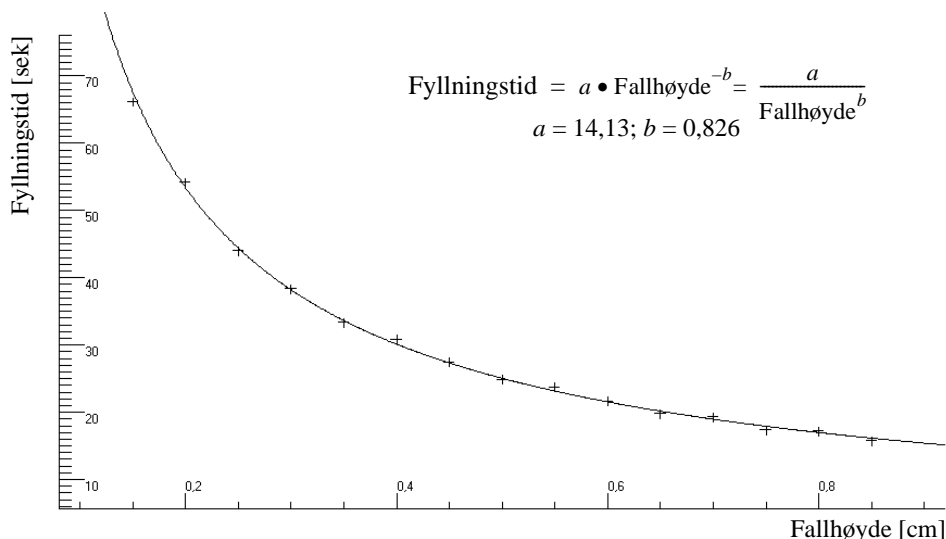
Men er formelen fornuftig? La oss undersøke grensetilfellene.

Ut fra formelen ser vi at når fallhøyden blir uendelig stor så blir fyllningstida 6,1 sek hvilket ikke høres urimelig ut. Det betyr at vannhastigheten øker med økende fallhøyde, men ved en viss høyde er det lite å vinne i fyllningshastighet ved ytterligere å øke fallhøyden. I praksis betyr det at friksjonen i røret er blitt så dominerende at den opphever gevinsten ved å øke fallhøyden.

Når fallhøyden nærmer seg null ser vi at fyllningstiden går mot uendelig hvilket også synes fornuftig.

Ut fra målinger og etterfølgende diskusjon så ser det ut som vi har funnet en matematisk sammenheng som er gyldig i det området vi har undersøkt og har fornuftige grenseverdier.

Vi kan imidlertid få meget god kurvetilpasning ved hjelp av en potensfunksjon:



La oss undersøke grensebetingelsene.

Dersom vi lar fallhøyden gå mot uendelig, vil fyllningstiden gå mot null. Dette vil være tilfellet for en ideell slange uten friksjon. Dersom fallhøyden går mot null vil fyllningstida gå mot uendelig som synes fornuftig.

Det kan derfor se ut som om denne modellen ikke er så nær virkeligheten som den forrige selv om standardavviket er mindre (0.62). Likevel kan det være riktig å bruke denne dersom vi holder oss innen gyldighetsområdet.



Kontrolloppgave

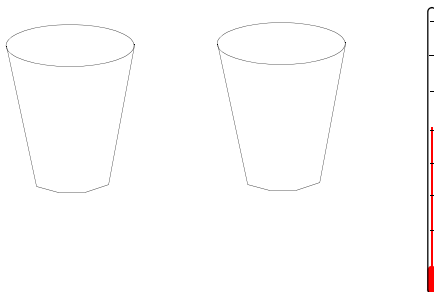
Ved å la deltagerne beregne fyllningstiden for en bøtte på f.eks. 10 liter med en fallhøyde på 1,5 meter kan en kontrollere hvor nøyaktig modellene er. Disse verdiene ligger utenom måleområdet og dessuten er 10 liter et langt større volum enn det de har målt på.

2.4 Måling av temperatur

2.4.1 ... om å måle temperaturfall i vann¹²

Problemstilling:

Vi ønsker å undersøke hvordan temperaturen faller i en kopp med varmt vann. Dessuten ønsker vi å sammenligne kurvene for temperaturfall for to ulike typer beger.



Læringsmål:

Elevene skal forstå hvordan kurven som beskriver temperaturfallet avtar raskest i starten for så å nærme seg temperaturen i rommet som er en asymptote til kurven.

Utstyr:

- To eller flere kopper (ulik type)
- Vannkoker
- En vekt
- En klokke
- Ett termometer

12. Etter en idé av Hilde Hov ved Brundalen videregående skole.



Matematisk modellering

Gjennomføring:

Kok opp tilstrekkelig vann til å fylle opp alle koppene. Sett koppene på vekta etter tur og fyll opp med like mye av det varme vannet. Mål temperaturen med jevne mellomrom og noter resultatet i tabellen.

| Tid (sek) | Temp (°C) (I og II) | | Tid (sek) | Temp (°C) (I og II) | |
|-----------|---------------------|--|-----------|---------------------|--|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Flere eksperimenter:

- Endre antall og type kopper.
- Endre mengden vann i koppene.

Måleeksempel

I vårt eksempel ble det bruket to engangskopper som rommet ca 1,5 dl vann. Vi fylte opp 152 gram kokende vann i hvert av krusene og målte temperaturen med jevne mellomrom. Romtemperaturen ble målt til 20°C.

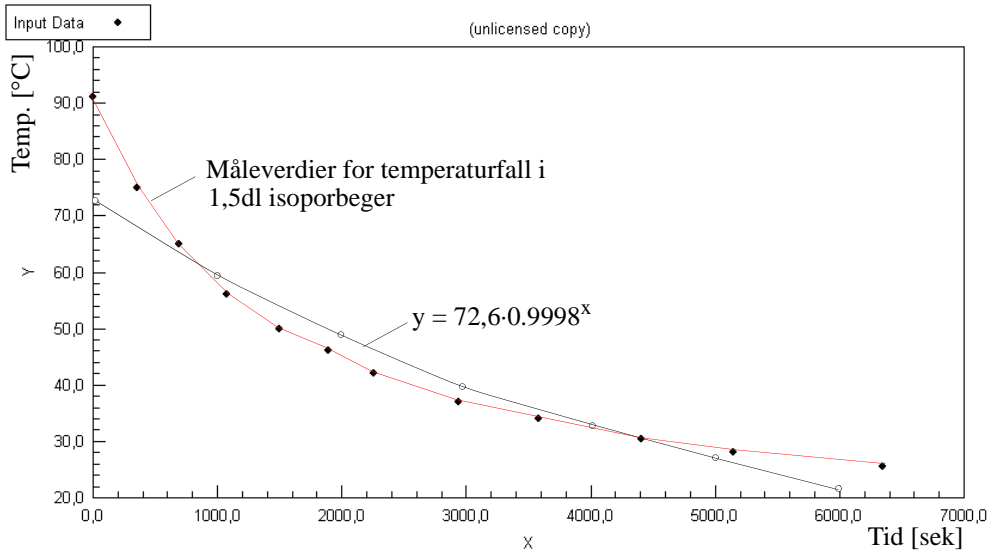
| Tid (sek) | Temp (°C) (I og II) | | Tid (sek) | Temp (°C) (I og II) | |
|-----------|---------------------|----|-----------|---------------------|----|
| 0 sek | 91 | 90 | 2260 sek | 42 | 39 |
| 360 sek | 75 | 71 | 2940 sek | 37 | 34 |
| 690 sek | 65 | 61 | 3580 sek | 34 | 31 |
| 1080 sek | 56 | 55 | 4410 sek | 30,5 | 28 |
| 1500 sek | 50 | 47 | 5145 sek | 28 | 26 |
| 1890 sek | 46 | 42 | 6350 sek | 25,5 | 24 |

Bruk av Casio calculator og eksponensialfunksjon gir en funksjon som antydnet under.

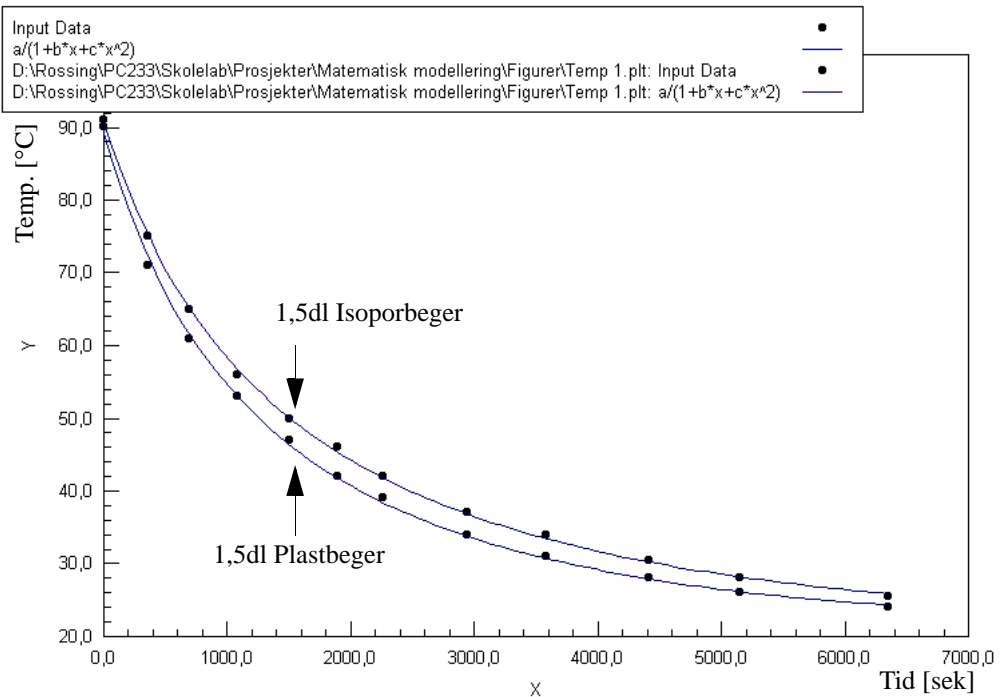
$$\text{Temperatur} = 72,6 \cdot 0,9998^{(\text{tiden})} \quad (2.19)$$



Av plottet under ser vi at denne eksponentfunksjonen gir relativt dårlig tilpasning. Ikke minst ser vi at den er dårlig i grenseområdene (ved $t = 0$ og når t går mot uendelig)



Med en litt mer komplisert funksjon får vi en betydelig bedre kurvetilpasning (se under)¹³.





Matematisk modellering

Vi kan få en rimelig god tilnærming for temperaturen som funksjon av tiden t med formelen:

$$T = \frac{a}{(1 + bt + ct^2)} \quad (2.20)$$

innenfor måleområdet.

Hvor parameterne er litt forskjellige for de to begrene

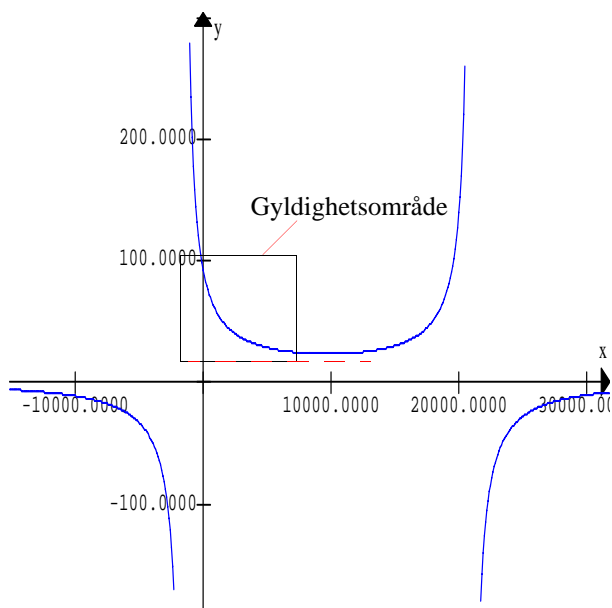
| Isoporbeiger | Plastbeiger |
|-------------------------|-------------------------|
| $a = 90,68$ | $a = 89,3$ |
| $b = 5,85 \text{ E-}4$ | $b = 6,76 \text{ E-}4$ |
| $c = -3,01 \text{ E-}8$ | $c = -4,03 \text{ E-}8$ |

Men er formelen fornuftig? La oss undersøke grensetilfellene.

Når $t = 0$ ser vi at temperaturen T blir omtrent 90°C hvilket er fornuftig.

Når $t = \infty$ skal temperaturen nærme seg romtemperaturen som i dette tilfellet er 20°C .

Dersom vi plottet hele funksjonen så ser vi at den har liten gyldighet utenfor måleområdet. Derfor vil det være vanskelig å teste denne funksjonen når tiden går mot uendelig.



Denne kurven er plottet ved hjelp av Winplot¹⁴.

13.Datafit 8.1.69 Okedale Engineering: <http://www.curvefitting.com/download.htm>



Kontrolloppgave

Dersom elevene utfører målingene for ulike mengde vann og tidsforløp. Kan en gi dem å beregne temperaturen ved et gitt tidspunkt og en gitt mengde vann når starttemperaturen er gitt. De kan for eksempel bruke et standard beger til forsøket.

2.5 Måling av tid

2.5.1 ...om å måle falltid for papirhelikopter

Problemstilling:

Vi ønsker å undersøke sammenhengen mellom falltiden og størrelsen på papirhelikopteret.

Læringsmål:

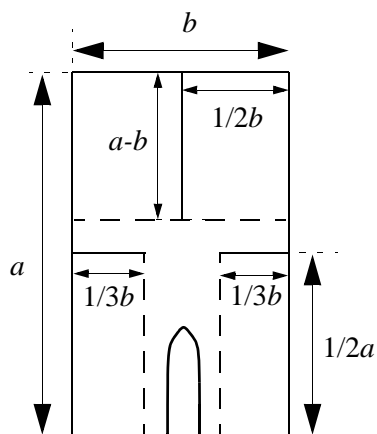
Elevene skal tegne en kurve i et koordinatsystem som viser sammenhengen mellom størrelse og falltid. De skal kunne gjøre rede for hva som menes med linearitet, og vurdere om resultatene er lineære eller ikke. Dernest skal de med egne ord tolke resultatene. De skal også få erfare at måleverdiene kan ha stor variasjon slik at de må gjøre flere målinger under mest mulig like betingelser for deretter å bestemme middelverdier.

Utstyr:

- A4 kopipapir
- Saks
- Linjal
- Stoppeklokke

Gjennomføring:

1. Klipp ut et gylent rektangel, dvs. hvor forholdet mellom sidene a og b er $a/b = 1,618$.
2. Klipp opp langs de heltrukne linjene, og brett langs de stiplede linjene.
3. Fest en liten binders til "halen" til helikopteret



14. Plotteprogrammet Winplot er gratis og kan hentes fra:
<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>



Matematisk modellering

4. Lag helikopter med forskjellig totalareal og mål tiden disse bruker på "å falle" en bestemt høyde. I denne sammenhengen regner vi totalarealet av hele rektangelet. Fyll ut tabellen under for ulike verdier av sidekanten b .

Table 2.2 Helikopter parametere

| b (cm) | a (cm) | $a - b$ | $1/2 a$ | $1/3 b$ | Areal (cm ²) |
|----------|----------|---------|---------|---------|--------------------------|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

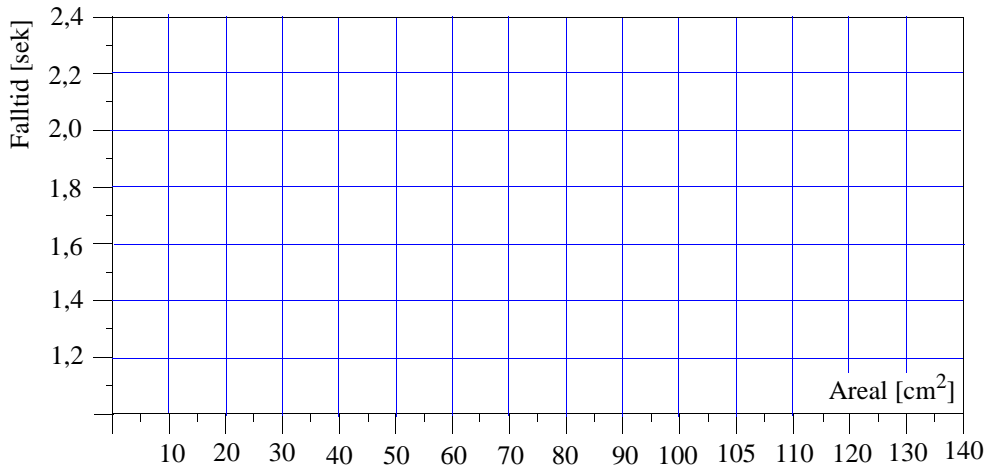
Falltiden måles 6 ganger for hvert areal. Deretter beregnes gjennomsnittlig falltid.

Table 2.3 Falltid for ulike arealer for ulike helikopter

| Areal (cm ²) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Gj.snitt falltid [sek] |
|--------------------------|---|---|---|---|---|---|------------------------|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |



5. Tegn kurve og finn den matematiske sammenhengen som passer best til grafen.



Måleeksempel

Følgende målinger er gjort:

Table 2.4 Falltid for ulike arealer for ulike helikopter

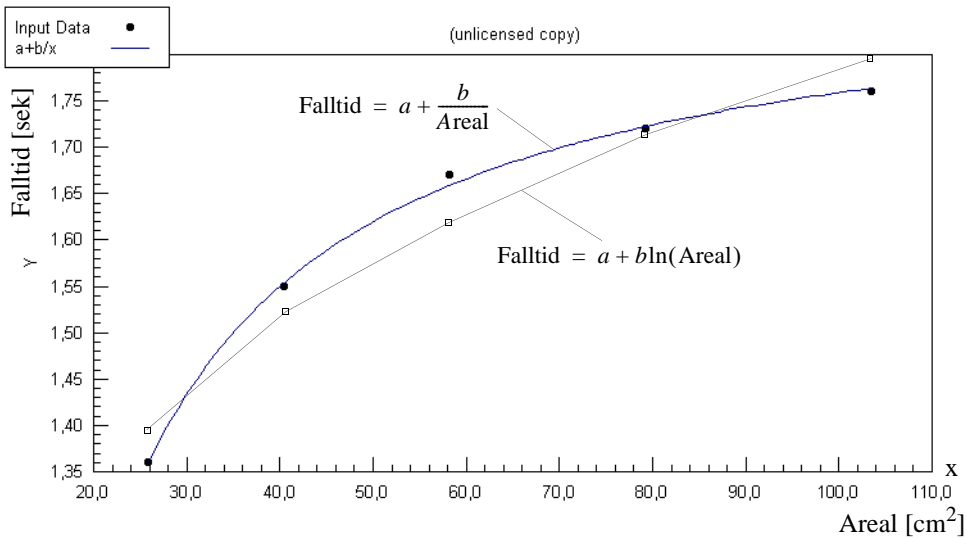
| Areal (cm ²) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Gj.snitt falltid [sek] |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------------------------|
| 25,9 | 1,41 | 1,34 | 1,31 | 1,40 | 1,40 | 1,32 | 1,36 |
| 40,5 | 1,47 | 1,65 | 1,50 | 1,56 | 1,53 | 1,56 | 1,55 |
| 58,2 | 1,53 | 1,69 | 1,69 | 1,72 | 1,69 | 1,72 | 1,67 |
| 79,3 | 1,66 | 1,69 | 1,75 | 1,78 | 1,75 | 1,69 | 1,72 |
| 103,6 | 1,72 | 1,75 | 1,78 | 1,78 | 1,69 | 1,84 | 1,76 |
| | | | | | | | |



Legg merket til at høyeste og laveste verdi i hver måleserie er strøket.

| b (cm) | a (cm) | a - b | 1/2 a | 1/3 b | Areal (cm ²) | Gj.snitt falltid [sek] |
|--------|--------|-------|-------|-------|--------------------------|------------------------|
| 4.0 | 6,472 | 2,5 | 3,2 | 1,33 | 25,9 | 1,36 |
| 5.0 | 8,09 | 3,1 | 4,0 | 1,67 | 40,5 | 1,55 |
| 6.0 | 9,708 | 3,7 | 4,9 | 2,00 | 58,2 | 1,67 |
| 7,0 | 11,326 | 4,3 | 5,7 | 2,33 | 79,3 | 1,72 |
| 8,0 | 12,944 | 4,9 | 6,5 | 2,67 | 103,6 | 1,76 |
| | | | | | | |

Måleresultatene plottes i diagrammet.



Vi ser at funksjonen:

$$\text{Falltid} = a + \frac{b}{\text{areal}} \quad (2.21)$$

hvor

$$a = 1,89$$

$$b = -13,93$$



gir rimelig god kurvetilpasning¹⁵.

Ved bruk av kurvetilpasningsalgoritmen i Casio lommeregner finner vi ulike funksjoner.

$$\text{Falltid} = a + b \ln(\text{Areal}) \quad (2.22)$$

hvor:

$$a = 0,458$$

$$b = 0,288$$

Også denne funksjonen er tegnet inn som en graf på figuren over. Vi ser at denne gir langt dårligere tilpasning enn ligning (2.21).

Flere eksperimenter:

Undersøk falltida for en av helikopterene sluppet fra forskjellig høyde.

Falltiden fra hver høyde måles flere ganger for så å beregne en gjennomsnittlig falltid.

| Høyde (cm) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Gj.snitt falltid [sek] |
|------------|---|---|---|---|---|---|------------------------|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

Dernest finnes en grafisk og en algebraisk sammenheng mellom falltid og fallhøyde.

I forsøket foran har vi benyttet arealet av rektangelet før vi brettet helikopteret. Hvilken sammenheng finner vi dersom vi bruker arealet bare av de to vingene.

15.Datafit 8.1.69 Okedale Engineering: <http://www.curvefitting.com/download.htm>



3 Klasseromsforsøk som krever noe spesielutstyr

3.1 Strikkhopp med Barbie

Kapittelet beskriver et miniprojekt gjennomført ved KVT i Trondheim våren 2004 i samarbeide med *Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen* ved Kjersti Wæge¹⁶.

3.1.1 Utfordringen

En Barbidukke skal hoppe i strikk. Vi antar en relativt generell situasjon hvor strikken er festet til et tilfeldig sted i rett linje over dukka. Barbie har strikken festet rundt beina idet hun kaster seg utfor. Langt under henne går en stri elv (et kar med vann). Utfordringen er å justere strikken slik at hun når så langt ned mot vannflata som mulig uten å bli våt i håret.

Strikken skal lages ved å skjøte sammen det nødvendige antall strikk. Figuren til høyre viser situasjonen.

Følgende utstyr er tilgjengelig for en gruppe:

- Stor boks med strikk
- Stort kar med vann (om ønskelig)
- Nødvendig antall Barbidukker
- Målband (5 meter) eller 5 meter langt tau

Det vil ofte være normalt at strikken festes ved føttene til Barbie som er surret sammen med ett tynt snøre.

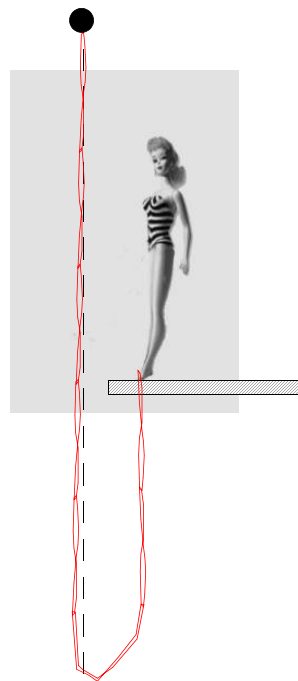
Deltagerne samarbeider to og to.

Oppgaven kan f.eks. formuleres som:

- *Finn en sammenheng (en matematisk funksjon) mellom fallhøyden og strikkens lengde (antall strikk) for dukken dere har fått.*

Ved slutten av øvelsen skal dere bruke den matematiske funksjonen til å beregne nødvendig antall strikk ved et hopp på et nærmere angitt sted. Poenget er at Barbie skal komme så nær vannflaten/bakken som mulig uten å berøre den.

De etterfølgende avsnittene viser hvordan en gruppe lærere ved KVT (Kristen Videregående skole i Trondheim) løste oppgaven.



16. Oplegget er utviklet av Kjersti Wæge som del av hennes doktorarbeid [1].



3.1.2 Målefasen

Etter litt famling kom de fleste fram til en hensiktsmessig måte å måle fallhøyden på. Et visst antall strikk ble skjøtt sammen. Deretter ble et tilstrekkelig høyt uthoppsted valgt. De fleste valgte å la dukka hoppe stående ved at de lot henne bikke ut fra plattformen. Fallhøyden ble målt ved å registrere når hodet så vidt berørte en papplatt. Målingen ble forenklet ved å tape målbåndet til veggen.



Flere målinger ble utført med forskjellig antall strikk. Etterhvert som antall strikk økte, ble det også nødvendig å ta i bruk flere pulter og lengre målbånd.

En gruppe lot imidlertid Barbie falle med hodet først. Dette medførte et renere fall hvilket skulle vise seg å redusere usikkerheten i målingen. Andre målte den statiske lengden av strikken under vekta av Barbi, i tillegg til fallhøyden.

Fallhøye vs antall strikk:

| ant. strikk | 5 | 4 | 3 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | | |
|---------------|----|----|----|-----|-----|-----|---|--|--|--|--|
| fallhøye i cm | 89 | 79 | 64 | 108 | 121 | 134 | | | | | |

Resultatene ble deretter tabellert.



Deretter ble resultatene lagt inn i kalkulatorens regresjonsalgoritme og parametrene til den matematiske ligningen falt ut.



Dette laget (over) tok tre målinger og undersøkte både en lineær og en eksponensiell (power) sammenheng. Det viste seg at i deres tilfelle kunne begge brukes. Den linjære sammenhengen ble imidlertid brukt da denne hadde noe mindre avvik fra målingene.

3.1.3 Modelleringsfasen

Laget kom fram til følgende formel på bakgrunn av målingene:

$$y = 11,83x + 42 \text{ [cm]} \quad (3.1)$$

y - fallhøyden i cm

x - antall strikk

En mer hensiktsmessig måte å uttrykke sammenhengen på, kan være å angi antall strikk som funksjon av ønsket fallhøyde:

$$x = 0,0845y - 3,5503 \text{ [antall strikk]} \quad (3.2)$$



Ønsket fallhøyde y settes inn i cm.

Andre lag fant andre sammenhenger etter litt tankearbeid.



3.1.4 Utprøvningsfasen

En trappegang hvor fallhøyden ble målt til 362 cm, ble valgt som hoppsted. Deltagerne fikk oppgitt fallhøyden og beregnet det nødvendige antall strikk ved hjelp av den matematiske modellen de hadde kommet fram til. Selve hoppet skulle nå vise hvor godet de hadde modellert tøyningen av strikken.

I dette tilfellet ble det ikke benyttet vannkar. Som tidligere nevnt lot noen Barbie "hoppe" med hodet først og andre med beina først.



Det skulle vise seg å være lurt å slippe dukka med hode først. I sitt første "hopp" var hodet kun et par cm fra gulvet. Ved andre forsøk berørte hodet så vidt gulvet.



Matematisk modellering

Andre lag som lot Barbie hoppe på mer ordinær måte, hadde større avvik. Ulike teorier ble diskutert mht. hva som var den beste måten å gjennomføre hoppet på. Konklusjonen var at fallet ble mer predikterbart og lettere å modellere når dukka stupte med hodet først. Dessuten hadde luftmotstanden mindre å si.

3.1.5 Drøfting

Drøfting er en meget viktig del av arbeidet med matematisk modellering. Nettopp når elevene har vært gjennom arbeidet med å finne et matematisk uttrykk for sammenhengene, er det viktig å knytte teorien til virkeligheten.

$$y = 11,83x + 42 \text{ [cm]} \quad (3.3)$$

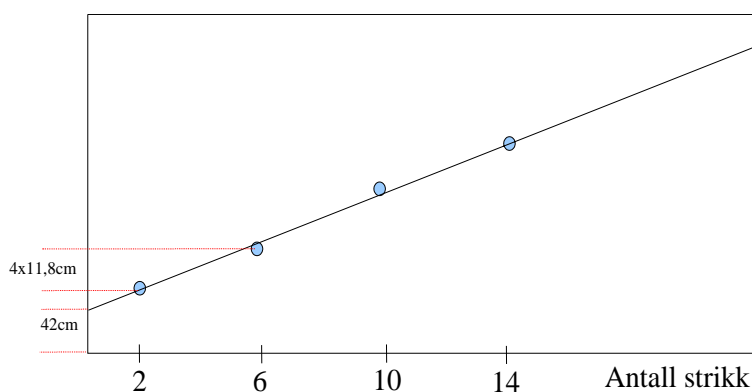
y - fallhøyden i cm

x - antall strikk

I tillegg inngår to konstanter:

11,83 [cm/strikk] er lengden av en strikk når den er strukket under vekten av Barbie. Det er også viktig å merke seg at dette gjelder en strikk som er knyttet sammen med andre strikk. Drøft gjerne også benevnningen med elevene.

42 [cm] uttrykker egentlig lengden av dukka. Men den er 28 cm og ikke 42 cm. Dersom flere grupper utfører modelleringseksperimentet, vil vi oppdage at dette er en parameter med stor variasjon. Dette skyldes sannsynligvis usikkerhet i målingene. Dersom vi gjør relativt få målinger som ligger et stykke fra y -aksen, vil forlengelsen av den linjære regresjonen til y -aksen kunne gi stor variasjon i verdien for krysningspunktet med aksene. Mest nøyaktig vil det bli dersom målepunktene ligger spredt godt utover, samtidig som det finnes ett målepunkt ikke langt fra y -aksen.



Av figuren over ser vi hvordan krysningspunktet av forlengelsen av regresjonslinjen med y -aksen lett kan variere avhengig av målepunktene plassering og nøyaktighet.



En mer hensiktsmessig måte å uttrykke sammenhengen på, kan være å angi antall strikk som funksjon av ønsket fallhøyde:

$$x = 0,0845y - 3,5503 \text{ [antall strikk]} \quad (3.4)$$

x - antall strikk

y - fallhøyden i cm

I tillegg uttrykker konstantene:

0,0845 [strikk/cm] er et uttrykk for *strukket strikk pr. cm*. Dvs. 1 cm utgjør 0,0845 strikk når dette befinner seg i utstruktet tilstand under vekten av Barbie. Verdien er selvfølgelig det inverterte av lengden av en strikk når den er struktet under vekten av Barbie.

-3,5503 [antall strikk] uttrykker *dukkas lengde målt i antall strukket strikk*. En kan også diskutere med elevene hvor mange siffer det er meningsfullt å ta med etter komma. 4 er sannsynligvis 2 siffer for mye. Konstantleddet har dessuten et minustegn. Dette uttrykker at lengden av dukka ikke skal regnes med når antall strikk skal beregnes, den vil likevel være en forlengelse av fallet uavhengig av antall strikk.

Det er særdeles viktig at elevene forstår betydningen av disse konstantene og kan sette ord på hva de betyr i den virkelige verden. ***Dette er kanskje det viktigste som skiller en ren teoretisk behandling av modellering fra det å gjennomføre hele prosessen.***

Drøftingen omfattet også hvilke faktorer som ga bidrag til usikkerhet i modellen. Følgende bidrag til måleusikkerhet kom opp under diskusjonen:

- Varierende lengde og kvalitet på strikkene
- Variasjoner i hvordan strikkene ble knyttet sammen
- Variasjoner mht. hvordan fallet ble utført
- Unøyaktigheter i målingene i den innledende fasen

Det var imidlertid enighet om at de frambrakte modellene var forbausende korrekte.

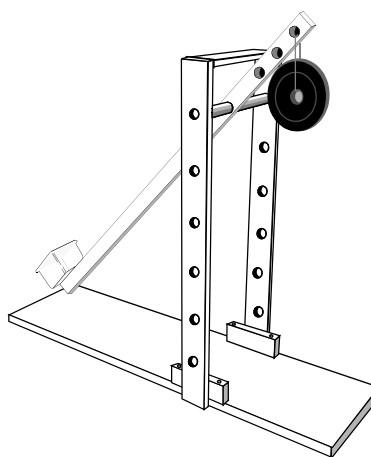
Prosjektet er også beskrevet ut fra en hypotetisk deduktiv metode i avsnitt 5.1.



3.2 Kast med katapult

3.2.1 Bygging av katapult

Deltagerne bygger først katapulten ved hjelp av ferdig kappede materialer. Et 2 kg lodd kan benyttes som motvekt.



For detaljert byggebeskrivelse av katapulten se vedlegg vedlegg A.

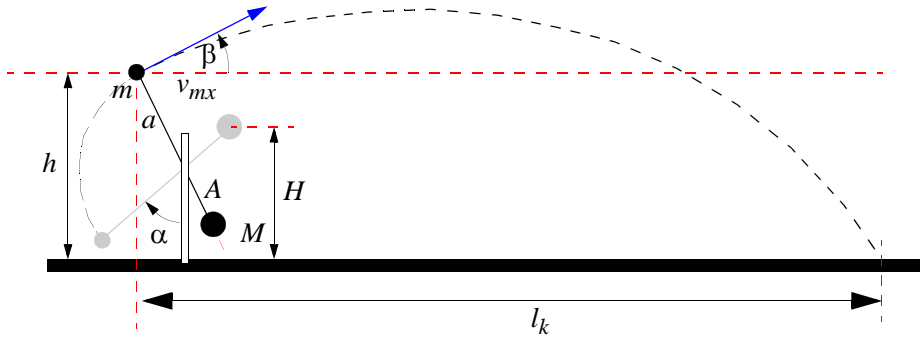
Bygging av katapulten kan også utføres ved en trearbeidslinje eller i kunst og håndverksfaget. Det vil være en fordel om modellen bygges slik at den egner seg til å endre ulike variabler, på den måten kan modellen gjenbrukes i ulike sammenhenger.

3.2.2 Variasjon av variabler (parametere)

Det er viktig å tenke grundig igjennom hvordan måleserien skal legges opp. Hvilke parametere som er uavhengige og hvilke som er avhengige. Denne planleggingen kan med fordel gjøres før man begynner å teste katapulten. Begynner man først å arbeide med selve katapulten kan en lett miste fokus på det som er oppgavens målsetning, nemlig å finne en matematisk sammenheng.



Hvilke parametere kan vi så variere?



Det er mange uavhengige parametere som kan varieres, men ikke alle er like lette å endre på. Her er noen forslag:

1. Utgangsvinkelen α , dvs. vi endrer h og H
2. Kastvinkelen β
3. Kastarmen a
4. Motvektsarmen A
5. Motvekten M
6. Kastmassen m

Oppgave:

Velg en av de nevnte parametrene (eller en annen). Beregn kastlengde og mål kastet for ulike parameterverdier. Gjør beregninger og sammenlign måling og beregning. Drøft resultatet.

En må også velge et kastobjekt som

3.2.3 Måleresultater

Dette avsnittet inneholder tabeller og underlag for å tegne grafer.



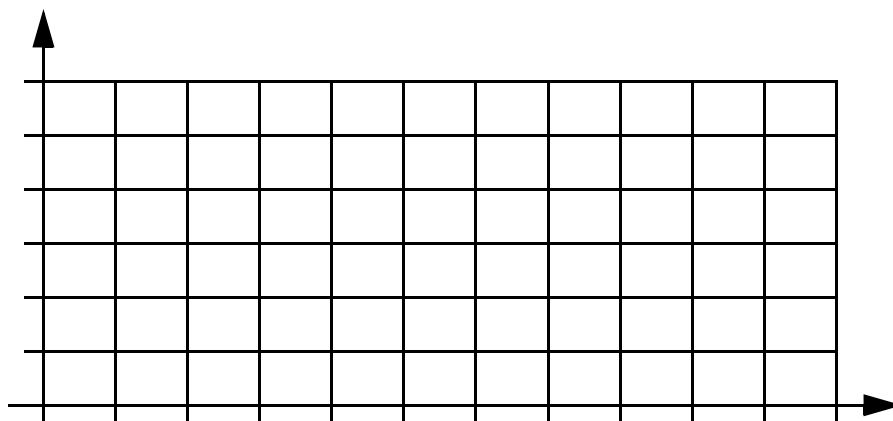
Ekspirement 2

Følgende parameter ønskes endret fra kast til kast.....

Table 3.1 Målt kastlengde som funksjon av.....

| <i>Parametervedi</i> | <i>Målt lengde</i> | <i>Beregnet lengde</i> |
|----------------------|--------------------|------------------------|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Tegn en graf som viser det målte og det beregnede resultatet. Studer avviket.



Drøft og forklar evt. avvik mellom beregnet og målt kurve.



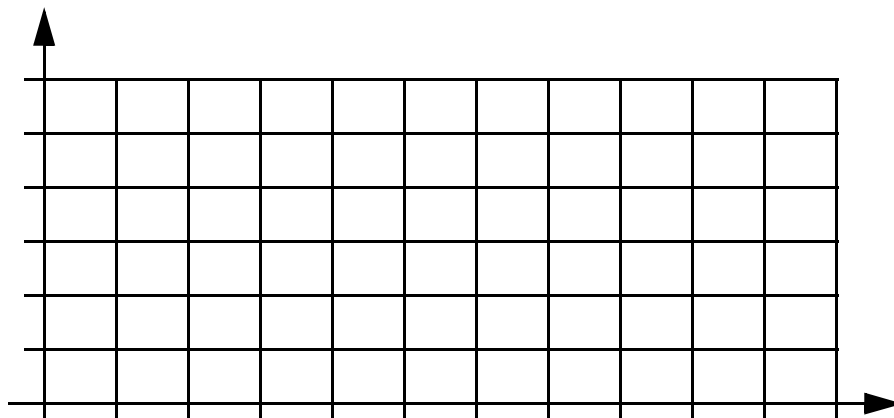
Eksperiment 2

Følgende parameter ønskes endret fra kast til kast.....

Table 3.2 Målt kastlengde som funksjon av.....

| <i>Parametervædi</i> | <i>Målt lengde</i> | <i>Beregnet lengde</i> |
|----------------------|--------------------|------------------------|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Tegn en graf som viser det målte og det beregnede resultatet. Studer avviket



Drøft og forklar ev. avvik mellom beregnet og målt kurve.

3.2.4 Noen mulige feilkilder

I dette avnittet skal vi nevne noen mulige feilkilder.

- Innstilling og måling av den valgt variabelen
- Måling av treffpunkt



Matematisk modellering

- Bamsens luftmotstand vil endres med hvordan den snur seg i luften
- Hvor lett bamsen slipper holderen
- Strikk som benyttes for å spenne opp katapulten vil endre karakter underveis

3.3 Radioaktiv stråling som funksjon av avstand

Problemstilling:

Elevene skal finne et matematisk uttrykk for sammenhengen mellom strålingsmengde og avstand til kilden. Kilden kan enten være av α -, β - eller γ -type. Eventuelt en røykvarsler basert på ionisering av luften i røykkammeret.

Læringsmål:

Oppgaven kombinerer læringsmål fra naturfag VG1 hvor en skal gjøre forsøk med radioaktivitet, og fra matematikken på VG1 og VG2 hvor elevene skal gjennomføre målinger og etablere matematiske modeller for et fenomen eller forløp.

Utstyr:

Til dette eksperimentet trengs:

- Metermål (tommestokk eller annet metermål)
- GM-teller (Fourier Systems - GM-teller DT116 - KPT Naturfag)
Registreringsenhet (Multilog PRO)
- Radioaktiv kilde (RISØ β -1 μ CiSr/Y – 90 1970 - Inst. for fysikk, 09-208-1)



Gjennomføring:

En β -type kilde ble lagt på et aluminium metermål. GM-telleren ble lagt ved enden av metermålet og koblet til Multilog instrumentet. Lokket ble fjernet fra GM-telleren og registreringene startet.



Multilog'en ble innstilt med følgende parametere:

- 10 målinger av ett minutt
- Avlesning i antall treff pr. minutt

Bequerel er en måleenhet for radioaktivitet. Den angir antall desintegrasjoner pr. sekund. I vårt tilfelle vil den radioaktive kilden avgi elektroner. Vår måling er relativ i den forstand at vi måler antallet elektroner som treffer målekammeret i proben pr. minutt.

Vi antar at utstrålingen er like stor i alle retninger, dermed er det rimelig å anta at intensiteten avtar med det inverse av kvadratet av avstanden.

Det skal gjøres 8 registreringer á 1 min. i hver avstand. Avstanden varieres fra 5 – 60 cm. I tillegg gjøres en måling langt fra kilden for å registrere bakgrunnsstrålingen. Registreringene føres i følgende tabell.

| # | ∞ | 60cm | 50cm | 40cm | 30cm | 25cm | 20cm | 15cm | 10cm | 5cm |
|----------|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| Gj.snit. | | | | | | | | | | |

Flere eksperimenter:

Vi påstår at kilden er rundstrålene. Dette bør verifiseres ved hjelp av målinger.

I tillegg bør det gjøres målinger for både β -, α -, og γ -type kilder om slike finnes.

Det bør også gjøres måling uten kilde. En slik måling gir en indikasjon på hvor stor bakgrunnsstrålingen er. Denne bør trekkes fra måleverdiene.

I vårt eksempel har vi foreslått å gjøre 8 målinger av 1 min. Hvorfor ikke like godt gjøre en måling á ett minutt?

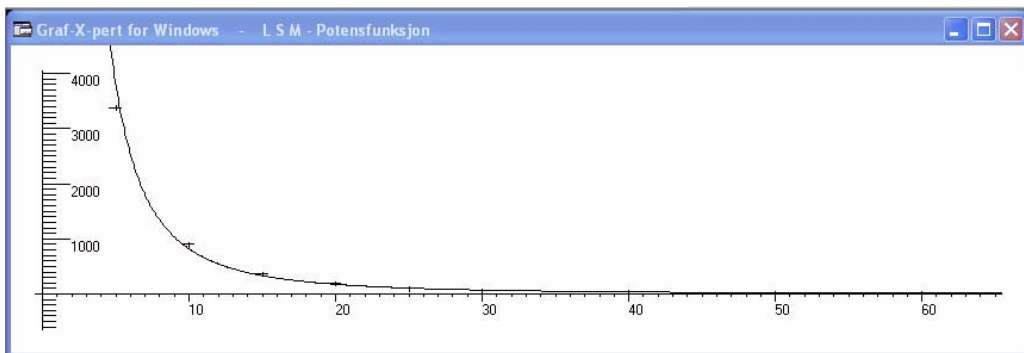


Måleeksempel:

I følgende eksempel ble målingene utført i henhold til beskrivelsen over.

| # | ∞ | 60cm | 50cm | 40cm | 30cm | 25cm | 20cm | 15cm | 10cm | 5cm |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 1 | 22 | 32 | 32 | 62 | 81 | 142 | 231 | 418 | 926 | 3487 |
| 2 | 12 | 34 | 43 | 62 | 87 | 111 | 222 | 358 | 867 | 3316 |
| 3 | 11 | 35 | 28 | 50 | 66 | 134 | 218 | 399 | 926 | 3296 |
| 4 | 16 | 35 | 37 | 46 | 70 | 127 | 201 | 386 | 958 | 3461 |
| 5 | 20 | 40 | 48 | 57 | 90 | 130 | 205 | 365 | 861 | 3438 |
| 6 | 12 | 26 | 38 | 54 | 56 | 152 | 204 | 392 | 931 | 3421 |
| 7 | 16 | 33 | 39 | 55 | 73 | 112 | 211 | 394 | 952 | 3445 |
| 8 | 17 | 19 | 35 | 49 | 82 | 142 | 214 | 399 | 919 | 3352 |
| Gj.snit. | 15,75 | 31,75 | 37,5 | 54,38 | 75,63 | 116,3 | 213,3 | 388,9 | 917,5 | 3402 |
| Korr. | | 16 | 21,75 | 38,63 | 59,88 | 100,6 | 197,6 | 373,2 | 901,8 | 3386 |

Figuren under viser plottede verdier sammen med den best tilpassede potensfunksjon:



Potensfunksjonen kan skrives som:

$$y = 136055x^{-2,22} = 136055 \frac{1}{x^{2,22}} \quad (3.5)$$

hvor y er målt aktivitet og x er avstand fra kilden. Standardavviket er målt til $\sigma = 165$.

Vi ser at vår hypotese ikke var så helt gal, men kan ev. bedres noe ved økt antall målinger.



Siden maksimalverdien for hver enkelt måleserie er 4096 vil vi få problemer med lange måleperioder på korte avstander.

Feilkilder:

Siden utsending av β -partikler fra en radioaktiv kilde er en stokastisk prosess (tilfeldig), vil vi ved relativt få målinger eller korte måleperioder, få relativt stor usikkerhet i målingene.

Videre har vi ingen garanti for at utstrålingen fra kilden er omnidireksjonal (ideelt rundtstrålende). En slik feilkilde vil imidlertid til en viss grad kunne avsløres dersom vi måler intensiteten i en gitt avstand, men i forskjellig retning. Dersom forskjellene er små vil en slik måling kreve stort målemateriale.

3.4 Kortslutningsstrøm i solceller som funksjon av lysintensitet

Problemstilling:

Det er nærliggende å tro at den leverte effekten fra en solcelle avtar med lysintensiteten. Vi ønsker å undersøke sammenhengen mellom lysintensitet og kortslutningsstrøm i et solcelle flak. Elevene skal karakterisere solcelleflaket (sensor). Ved hjelp av målinger skal de finne en matematisk sammenheng mellom kortslutningsstrømmen for en celle og effekten levert i en last på $0,33 \Omega$, begge som funksjon av innstrålt lysintensitet.

Læringsmål:

Oppgaven kombinerer læringsmål fra naturfag VG1 hvor en skal gjøre forsøk med radioaktivitet, og fra matematikken på VG1 og VG2 hvor elevene skal gjennomføre målinger og etablere matematiske modeller for et fenomen eller forløp.

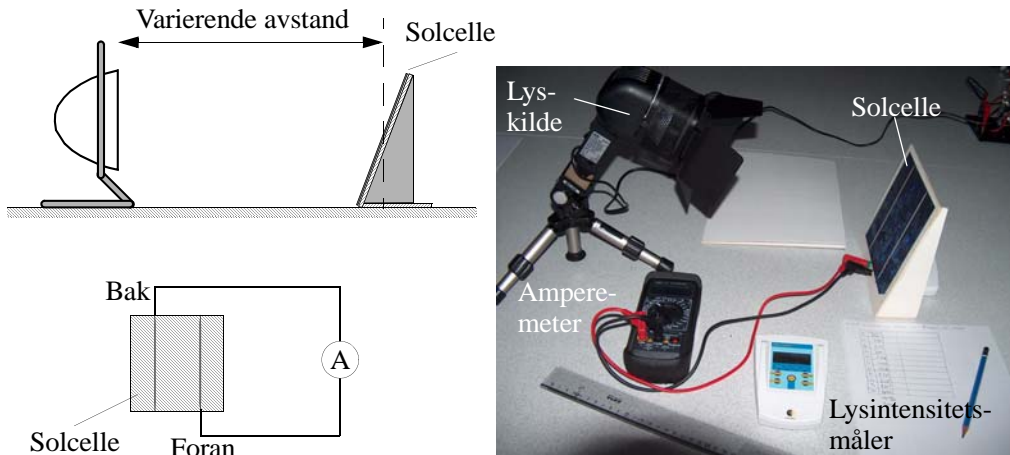
Utstyr:

- Lyskilde 300 Watt (Gammadata)
- Solcelle 155 x 155 mm, med holder (ScanCell)
- Lysintensitetsmåler, Watt/m^2 , MacSolar KPT Naturfag (29695)
- Lab.ledninger
- Multimeter, CHY 17 (amperemeter 10A)



Måleoppstilling:

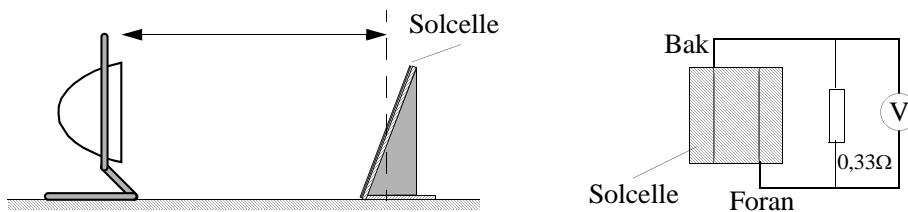
Måleoppstillingen er vist figur 2.



Figur 2 Måleoppstilling for måling av kortslutningsstrøm som funksjon av lysintensitet.

Kortslutningsstrømmen måles med multimeteret i stilling 10 A. Dette gir minst mulig shunt-resistans i instrumentet.

Leverte effekt måles med en last motstand lik $0,33 \Omega$ som er i nærheten av optimal lastmotstand ved en lysintensitet på ca. 450 W/m^2 .



Figur 3 Måleoppstilling for måling av levert effekt som funksjon av lysintensitet.

Målingene skal gjøres med lysintensitet i området 25 W/m^2 til 200 W/m^2 .



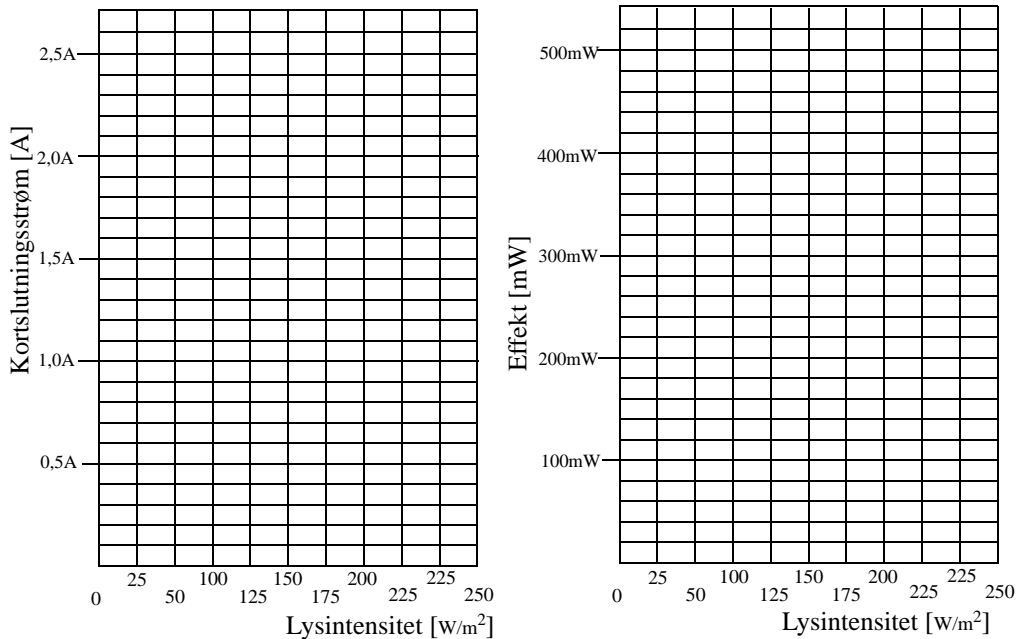
Gjennomføring:

Målingene skal utføres med varierende avstand mellom lyskilden og solcellepanelet. Kun én celle, med et areal på ca. **240 cm²** (15,5 x 15,5 cm), skal benyttes. Resultatet føres i tabellen under.

Tabell 1: Kortslutningsstrømmen og levert effekt som funksjon av lysintensitet.

| Lysintensitet [W/m ²] | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 |
|-----------------------------------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Kortslutningsstrøm [A] | | | | | | | | |
| Målt spenning over last [mV] | | | | | | | | |
| Beregnet levert effekt [mW] | | | | | | | | |

Framstill sammenhengen mellom kortslutningsstrøm/levert effekt og lysintensitet i diagrammet under.



Figur 4 Kortslutningsstrømmen og levert effekt for ett solcelleflak som funksjon av innstrålt lysintensitet i W/m².



Matematisk modellering

Måleeksempel

Målingene ble utført ved å la lampen stå fast for så å måle lysintensiteten ved ulike avstander. De aktuelle lysintensitetene ble merket av på benken i riktig avstand. Deretter ble solcellen plassert i riktig avstand og kortslutningsstrøm og spenning avlest. Først ble kortslutningsstrømmen målt, deretter spenningen over lastmotstanden.

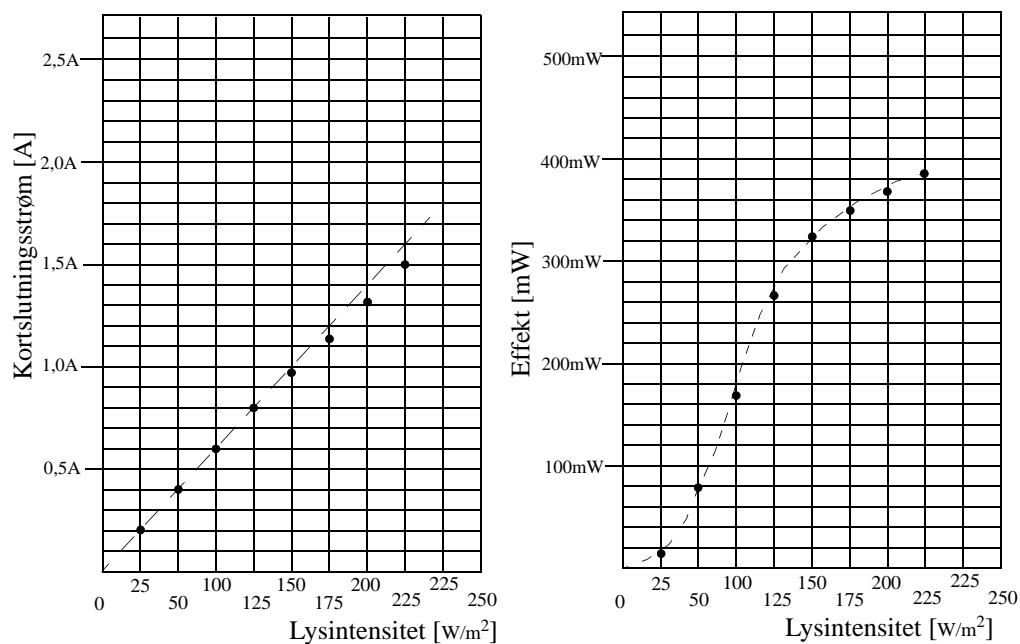
Table 3.3 viser resultatene av måleseriene.

Table 3.3 Kortslutningsstrømmen og levert effekt som funksjon av lysintensitet.

| Lysintensitet [W/m^2] | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Kortslutningsstrøm [A] | 0,20 | 0,40 | 0,60 | 0,80 | 0,97 | 1,17 | 1,32 | 1,50 |
| Målt spenning over last [mV] | 79 | 162 | 237 | 297 | 328 | 340 | 350 | 357 |
| Beregnet levert effekt [mW] | 18,9 | 79,5 | 170 | 267 | 326 | 350 | 371 | 386 |

Resultatet ble så plottet i diagrammet.

Figur 5 viser en grafisk framstilling av resultatene.



Figur 5 Kortslutningsstrømmen og levert effekt for en solcelle som funksjon av innstrålt lysintensitet i W/m^2 .



Vi registrerer at sammenhengen mellom lysintensitet og kortslutningsstrøm er omtrent lineær, men faller noe av ved intensiteter over 150 W/m^2 . Dersom vi fortsetter målingene med økende intensitet vil vi se at solcellen etterhvert går i metning og flater helt ut.

Levert effekt har derimot en underlig kurve. En skulle tro at det er en kvadratisk sammenheng mellom lysintensiteten og levert effekt. Slik er det ikke når vi passerer 100 mW .

Drøfting resultatene

Måling av lysintensitet som funksjon av avstand kan være utfordrende siden det kan være vanskelig å få full overenstemmelse mellom plasseringen av intensitetsmåleren og solcellen. Dette blir omtrent umulig når lysintensiteten passerer 400 W/m^2 . Vi har derfor valgt å avslutte måleserien ved 200 W/m^2 . Dessuten vil lysintensiteten til lampen falle noe med tiden, på samme måten som solcellens ytelse endres med tiden etter som den blir varmet opp. Vi antar imidlertid at denne siste effekten er relativt beskjeden når vi utfører målingene ved lav intensitet. Endringen i lampas lysintensitet kan være betydelig. Det kan derfor være lurt å vente til lysintensiteten til lampen har stabilisert seg, eller slå av lampen mellom hver måling.

At kortslutningsstrømmen faller av med økende lysintensitet er ikke urimelig, da metningsfenomener vil opptre i solcellen. Det er imidlertid vanskeligere å forstå at den leverte effekt avviker så sterkt når lysintensiteten passerer 100 mW . En mulig årsak er at optimal lastmotstand endres med økende intensitet. Her er det imidlertid rom for litt forskning.

4 Andre ideer til modelleringsoppgaver

Dette avsnittet gir ideer til tverrfaglige modelleringsoppgaver som kan gjøres i klasserommet.

- **Modell for sukkerinnhold i blodet**
Elevene måler blodukkeret i blodet som funksjon av tiden etter at de har spist en kontrollert mengde næringsstoffer.
- **Modell for fallhastighet med luftmotstand**
Ved hjelp av ulike antall muffinsformer stablet opp i hverandre, skal elevene modellere hvordan luftmotstanden avhenger av fallhastighet [3].
- **Modell for temperaturfallet i boller**
Når boller tas ut av ovnen vil de ha en temperatur på over 200°C . Temperaturen i kjernen av bollen vil raskt falle etter som tida går. Lag en matematisk modell for temperaturfallet som funksjon av tida.
- **Modell for nedbøying av plastlinjal**
En plastlinjal legges på bordkanten og bøyes ned ved å henge vekter i enden av linjalen. Undersøk nedbøyningen som funksjon av vekt og linjalens lengde.
- **Modell for strekking av seigmenner**
En undersøker sammenhengen mellom lengden til seigmannen og krafta som drar i seigmannen [3].



- **Modell for utlading av batteri**

En belaster ett 1,5V batteri med en 1 Ohms motstand og registrerer strøm og spenning i motstanden som funksjon av tiden.

5 Modellering ved hjelp av den deduktive metode

I dette kapitlet skal vi se hvordan vi ved å bruke kjente lover fra fysikken kan utvikle modeller som beskriver sammenhengen mellom ulike parametere.

- Ved strikkhopp med Barbie skal vi finne sammenhengen mellom fallhøyden og antall strikk.
- Ved kast med katapult skal vi bestemme kastlengden som funksjon av utgangsposisjonen og vekten av loddene.
- ved å lage hull nær bunnen av en beholder skal vi finne tømmefunksjonen som funksjon av tiden.



5.1 Modellering av fallhøyden ved strikkhopp med Barbi

I dette avsnittet skal vi se hvordan vi kan bruke kjente lover fra fysikken for å frambringe et formelapparat som kan brukes til å beregne det nødvendige antall strikk.

5.1.1 Beskrivelse av eksperimentet

For å få større klarhet i situasjonen stiliserer vi forsøket som vist på figuren til høyre. Parametrene har følgende betydning:

h_{sf} = Avstand mellom strikkens festepunkt og plattformen

h_b = Dukkas høyde

h_{sl} = Strikkens totale lengde i slakk tilstand

h_f = Strikkens forlengelse

h = Tyngdepunktets fallhøyde

m = Dukkas masse

n_t = Antall strikk

Siden vi antar at tyngdepunktet er midt på dukka, vil den totale fallhøyden, h , også være lik avstanden fra hoppkanten og til toppen av hodet. Dette er også den høyden vi ønsker å beregne.

5.1.2 Beregningsunderlag, energilign.

Vi benytter energibetraktninger.

Vi antar at dukka står oppreist på plattformen før hun hopper. Videre antar vi at tyngdepunktet hennes er midt på kroppen. Hun vil da ha en potensiell "høyde"-energi, E_{ph} , lik:

$$E_{ph} = m \cdot g \cdot h \quad (5.1)$$

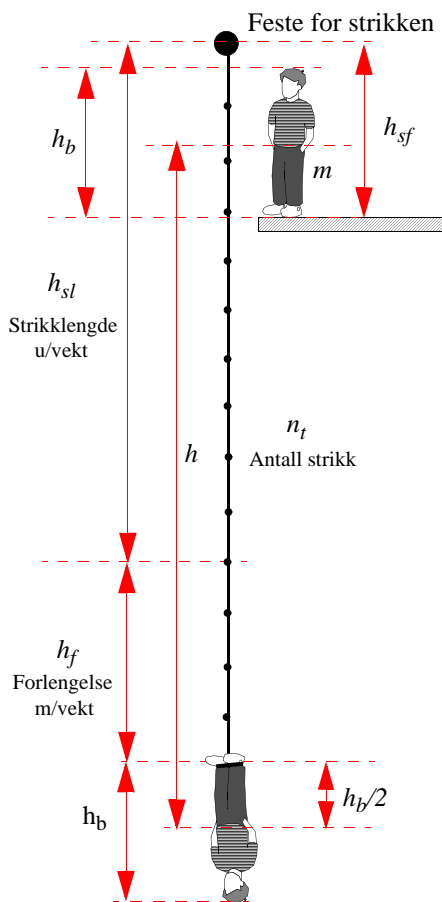
hvor:

m = Dukkas masse i kg

g = Tyngdeakselerasjonen $9,81 \text{ m/s}^2$

h = Dukkas totale fallhøyde når strikken er strukket som mest, målt i meter (se figuren over)

Vi antar at all potensiell energi knyttet til fallhøyden vil bli omgjort til potensiell energi i strikken, E_{ps} , som kan uttrykkes som:





$$E_{ps} = 1/2 \cdot k_t \cdot h_f^2 \quad (5.2)$$

hvor:

k_t = Strikkens totale fjærkonstant

h_f = Strikkens forlengelse

Under beregningene ser vi bort fra energitap på grunn av f.eks. luftmotstand.

Vi vet at:

$$E_{ph} = E_{ps} \quad (5.3)$$

$$m \cdot g \cdot h = 1/2 \cdot k_t \cdot h_f^2 \quad (5.4)$$

I denne legningen må vi bestemme fire parametere. La oss først se på fjærkonstanten k_t .

5.1.3 Fjærkonstant og måling av denne

Fjærkonstanten for en fjær eller en enkeltstrikk er definert ved:

$$\Delta F = -k \cdot \Delta l \quad (5.5)$$

hvor en økning ΔF av strekkrafta i strikken gir en forlengelsen Δl . k er fjærkonstanten til strikken. Den er en proporsjonalitetskonstant som uttrykker forlengelsen som funksjon av krafta. Fortegnet indikerer at forlengelsen Δl og krafta ΔF går i hver sin retning.

Ved måling av fjærkonstanten vil det være praktisk å bruke mer enn en strikk, men ikke så mange strikk som trengs til hoppet. La oss anta at vi i målesituasjonen bruker et antall n_m like strikk skjøtt etter hverandre. Ved måling finner vi fjærkonstanten k_m for strikken med n_m strikk.

Dette vil gi følgende sammenheng mellom krafta, ΔF , og forlengelsen Δl :

$$\Delta F = -k_m \cdot \Delta l \quad (5.6)$$

Vi må nå finne fjærkonstanten for *ett* strikk for deretter å finne fjærkonstanten for en strikk som er satt sammen av n_t strikk, som er det antall som skal brukes i den endelige måleoppstillingen.

Når vi øker antall strikk vil samme kraft gi en større forlengelse proporsjonal med antall strikk, n_t . Fjærkonstanten, k , for *en* av de n_m strikkene er lik:

$$k = k_m \cdot n_m \quad (5.7)$$

Vi finner fjærkonstanten, k_t , for den endelige strikken som består av n_t strikk, lik:

$$k_t = k/n_t \quad (5.8)$$



hvor k er fjærkonstanten til den enkelte strikken og n_t er det totale antall strikk.

5.1.4 Strategi for beregning

Før vi går videre må vi tenke gjennom strategien for de neste beregningene.

Om vi har valgt oss en hopp høyde og et punkt å feste strikken, så handler det om å finne det optimale antall strikk slik at hode på dukka kommer nærmest mulig målet. Hver gang vi skjøter til et strikk vil både strikkens lengde i slakk tilstand, h_{sl} , og strikkens forlengelse, h_f , endre seg.

Opgavene kan løses på to måter:

1. Når fallhøyden er kjent kan vi beregne det optimale antall strikk
2. Vi kan undersøke hva fallhøyden blir med et økende antall strikk

Ukjent:

$$n_t = \text{Totalt antall strikk}$$

I tillegg må vi gjøre en del målinger:

Målinger:

$$h = \text{Ønsket fallhøyde}$$

$$h_{sf} = \text{Avstand mellom strikkens festepunkt og plattform} = \text{_____m}$$

$$h_b = \text{Dukkas høyde} = \text{_____m}$$

$$h_{sl} = \text{Lengden av en strikk i slakk tilstand} = \text{_____m}$$

$$h_{sl} = n_t \cdot h_{sl} \text{ strikkens totale lengde i slakk tilstand}$$

$$m = \text{Dukkas masse} = \text{_____kg}$$

5.1.5 Uttrykk for fallhøyde, h og forlengelse h_f

Vi må kjenne hvor langt tyngdepunktet faller, h , dersom vi skal beregne dukkas potensielle energi idet hun skal til å hoppe:

$$h = h_{sl} + h_f - h_{sf} + h_b \quad (5.9)$$

Vi vet at $h_{sl} = n_t \cdot h_{sl}$

$$h = n_t \cdot h_{sl} + h_f - h_{sf} + h_b \quad (5.10)$$

$$h_f = h - n_t \cdot h_{sl} + h_{sf} - h_b \quad (5.11)$$

Se figuren på forrige side. h uttrykker dessuten avstanden fra hopp-punktet og toppen av hodet på dukka.



5.1.6 Beregning av antall strikk

Vi har tre uttrykk:

$$m \cdot g \cdot h = 1/2 \cdot k_t \cdot h_f^2 \quad (5.12)$$

$$k_t = k/n_t \quad (5.13)$$

$$h_f = h - n_t \cdot h_{sll} + h_{sf} - h_b \quad (5.14)$$

Setter ligning (5.13) og (5.14) inn i ligning (5.12) får vi:

$$m \cdot g \cdot h = 1/2 \cdot k/n_t \cdot (h - n_t \cdot h_{sll} + h_{sf} - h_b)^2 \quad (5.15)$$

Vi kan enten løse ligningen mht på det nødvendige antall strikk som funksjon av ønsket fallhøyde, eller vi kan beregne fallhøyden som funksjon av antall strikk.

5.1.7 Antall strikk, n_t , som funksjon av fallhøyde, h

Ligningen (5.15) løses mhp n_t , som da blir en funksjon av fallhøyde, h .

Setter

$$c_1 = h + h_{sf} - h_b \quad (5.16)$$

som innsatt gir:

$$m \cdot g \cdot h = 1/2 \cdot k/n_t \cdot (c_1 - n_t \cdot h_{sll})^2 \quad (5.17)$$

$$m \cdot g \cdot h = 1/2 \cdot k/n_t \cdot (c_1^2 + n_t^2 \cdot h_{sll}^2 - 2c_1 \cdot h_{sll} \cdot n_t) \quad (5.18)$$

Ordner vi denne ligning får vi:

$$h_{sll}^2 \cdot n_t^2 - (2mgh/k + 2c_1 \cdot h_{sll}) \cdot n_t + c_1^2 = 0 \quad (5.19)$$

Vi løser 2. gradsligningen og får:

$$n_t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.20)$$

hvor:



$$a = h_{s1l}^2 \quad (5.21)$$

$$b = -(2mgh/k + 2c_l h_{s1l}) \quad (5.22)$$

$$c = c_l^2 \quad (5.23)$$

5.1.8 Fallhøyde, h , som funksjon av antall strikk n_t

Ligningen (5.15) løses mhp. h , som da blir en funksjon av antall strikk n_t .

Setter

$$c = h_{sf} - h_b - n_t \cdot h_{s1l} \quad (5.24)$$

$$b = -(mgn_t/k - c) = -(mgn_t/k - h_{sf} + h_b + n_t \cdot h_{s1l}) \quad (5.25)$$

som gir 2. gradsligningen:

$$h^2 + 2bh + c^2 = 0 \quad (5.26)$$

Vi kan nå løse denne mhp h og får:

$$h_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2} \quad (5.27)$$

Vi kan nå sette inn ulike verdier av n_t å se hva som gir den nærmeste verdien til den ønskede fallhøyden, h .

5.1.9 Måling av fjærkonstanten

Strikkens fjærkonstant kan måles på flere forskjellige måter. Her skal vi beskrive to metoder:

1. Ved bruk av fjærvekt og måling av strekk som funksjon av kraft
2. Ved måling av svingeperioden til en masse, m , hengt i enden av strikken

5.1.10 Måling av fjærkonstant ved hjelp av fjærvekt

Fjærkonstanten beregnes ved å måle forlengelsen som funksjon av strekk-krafta. Det er fornuftig å måle fjærkonstanten ved bruk av flere strikk, n_m . Vi bruker da formelen:

$$k_m = -\Delta F / \Delta l_m \quad (5.28)$$

Eller dersom vi bruker n_m strikk kan vi beregne fjærkonstanden for det enkelte strikk ved sammenhengen:



$$k = - \Delta F \cdot n_m / \Delta l_m$$

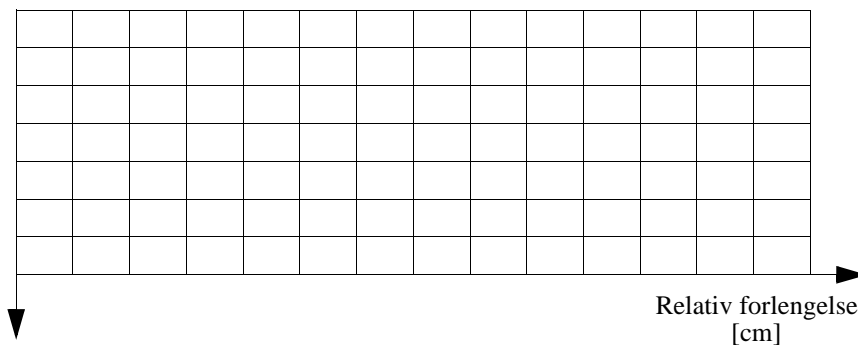
(5.29)

Table 5.1 Strekkraft, ΔF , som funksjon av forlengelse, Δl_m for n_m strikk

| Strekrafta F [N] | ΔF | Målt rel. forlengelse | Δl | Beregnet fjærkonstant k |
|-----------------------|------------|--------------------------|------------|------------------------------|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Tegn resultatet som en graf.

Strekraft [N]



Figur 6 Forlengelse som funksjon av strekkraft.



En mer nøyaktig måling kan oppnås ved hjelp av datalogger og kraftsensor som vist på figur 7.



Figur 7 Måling av fjærkonstant ved hjelp av kraftsensor og datalogger.

5.1.11 Måling av fjærkonstant ved hjelp av svingeperioden

Svingeperioden til en fjær (strikk) kan uttrykkes som:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_m}} \quad (5.30)$$

Denne kan vi løse mhp k_m .

$$k_m = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m \quad (5.31)$$

Ved å veie loddet m , henge det i strikken og måle periodetida, kan fjærkonstanten, k_f , beregnes.

Vi vet dessuten at:

$$k = k_m n_m \quad (5.32)$$

Ved å bruke flere strikk er det lettere å få en nøyaktig måling.



Matematisk modellering

5.1.12 Et regneeksempel

I dette kapitlet skal vi se på et konkret eksempel. Det første vi gjør er å måle fjærkonstanten.

Måling av fjærkonstant

Vi følger prosedyren i avsnitt 5.1.11.

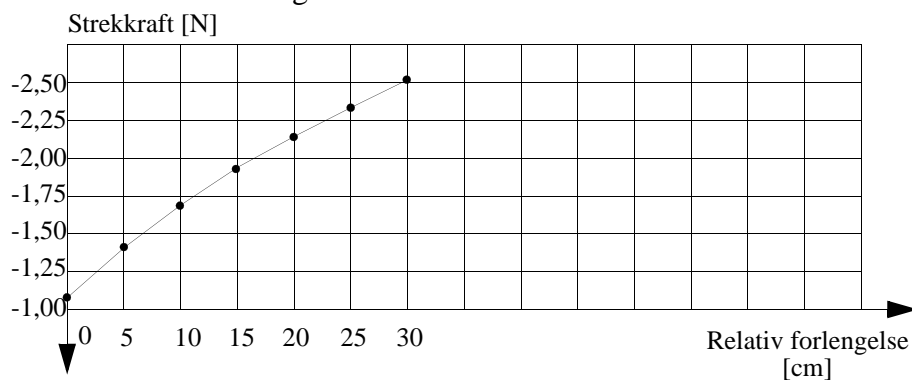
I vårt eksempel velger vi $n_m = 6$, dvs. vi bruker 6 strikk knyttet etter hverandre.

$$k = -\Delta F / \Delta l_m \quad (5.33)$$

Table 5.2 Strekkraft, ΔF , som funksjon av forlengelse, Δl_m , for $n_m=6$, strikk

| Srekkrafta F [N] | ΔF | Målt rel. forlengelse | Δl | Beregnet fjærkonstant k |
|-----------------------|------------|--------------------------|------------|------------------------------|
| -1.07 N | | 0 cm | | |
| -1,40 N | 0,33 N | 5 cm | 5 cm | 39,6 N/m |
| -1,68 N | 0,28 N | 10 cm | 5 cm | 33,6 N/m |
| -1,92 N | 0,24 N | 15 cm | 5 cm | 28,8 N/m |
| -2,14 N | 0,22 N | 20 cm | 5 cm | 26,4 N/m |
| -2,32 N | 0,18 N | 25 cm | 5 cm | 21,6 N/m |
| -2,53 N | 0,21 N | 30 cm | 5 cm | 25,2 N/m |

Resultatet framstilt som en graf.



Figur 8 Forlengelse som funksjon av strekkraft.



Vi registrerer at kurven ikke er lineær, dvs. at fjærkonstanten øker med økende forlengelse. Dette er ikke urimelig. Det er naturlig at det skal mer kraft til for å strekke den ytterligere 5 cm etter hvert som strekkrafta øker. På et punkt klarer vi ikke strekke strikken lenger, og ytterligere belastning vil forårsake brudd.

Figur 9 viser et Exel-program hvor ligningene i avsnitt 5.1.7 og 5.1.8 er lagt inn. Ved å skrive inn nødvendige parametere, beregner programmet forlengelse ved et gitt antall strikk, eller nødvendig antall strikk for å få en gitt forlengelse.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|----|--|----------|--------------------|---|-------------------------|---|------|---|
| 1 | Beregningsprogram for antall strikk | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | Antall strikk (nt) | 25 # | Fallhøyde (h) | | 4,89 m | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | Avstand, festepunkt strikk og plattform i cm (hsf) | 0 m | (hsf) | | 0 m | | | |
| 6 | Dukkens høyde i cm (hb) | 0,28 m | (hb) | | 0,28 m | | | |
| 7 | Lengden av en slakk strikk (hsl1) | 0,062 m | (hsl1) | | 0,062 m | | | |
| 8 | Strikkens totale lengde i cm (hsl) | 1,55 m | (hsl) | | 1,55 m | | | |
| 9 | Fjærkonstanten til en enkeltstrikk (k) | 40 N/m | (k) | | 40 N/m | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | Dukkens masse (m) | 0,156 kg | (m) | | 0,156 kg | | | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | Strikkens forlengelse (hf) | 3,06 m | Forlengelse (hf) | | m | | | |
| 14 | Tyngdepunktets fallhøyde i cm (h) | 4,89 m | Antall strikk (nt) | | 25,01 # | | 25 # | |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | b | -2,79 | a | | 0,003844 m ² | | | |
| 17 | c1 | -1,83 | b | | -0,945813 | | | |
| 18 | | | c | | 21,2521 m ² | | | |
| 19 | | | c1 | | 4,61 m | | | |
| 20 | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | |
| 23 | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | |
| 25 | | | | | | | | |

Figur 9 Exel program for beregning av nødvendig antall strikk.

Resultatene viser at en “dukke” på 28 cm, hvor strikken er festet ved utspringpunktet (ved føttene) og en vekt på 156 gram, vil falle 4,89cm. Vi har da benyttet en strikk satt sammen av 25 enkeltstrikk, hver med en lengde 6,2 cm. Fjærkonstanten er satt til 40N/m.

Foreløpige målinger med dukke viser at dette ligger i nærheten av det riktige svaret, men at en ren empirisk modellering kommer nærmere virkeligheten.

5.2 Modellering av kastelengden hos katapulter

I dette avsnittet skal vi se hvordan vi kan utlede sammenhenger mellom utgangsparametere ved kastets start og kastelengden ved hjelp av energibetraktninger.

Vi velger å studere den varianten av katapulter som utnytter tyngdekraften til å skape kastebevegelsen. Vi ønsker å dele opp beregningen i to deler:

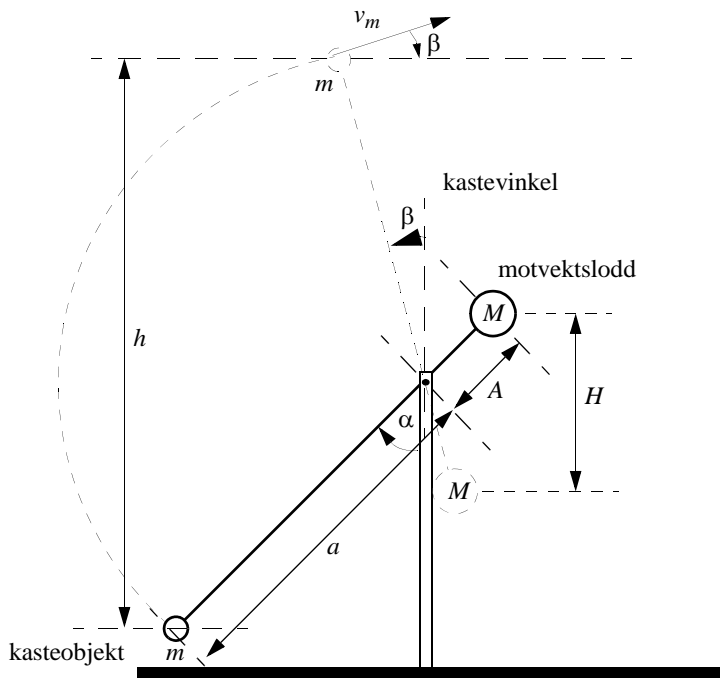
1. Beregne utgangshastigheten idet massen, m , forlater katapulten



2. Beregne kastebanen og nedslagspunktet

5.2.1 Beregning av utgangshastighet

Det første vi må finne ut er hvor stor fart og kastevinkel objektet, m , har idet det forlater katapulten.



Figur 10 Utgangspunkt for beregningene

I figur 10 har vi benyttet en del parametere:

m - massen av legemet som skal kastes [gram]

a - kastarmens lengde [meter]

M - massen til motvektsloppet [gram]

A - motvektsarmens lengde [meter]

α - utgangsvinkel

β - kastevinkel

Det er enklest å benytte energibetraktninger når vi skal beregne utgangshastigheten. Siden den eneste krafta som påvirker katapulten er tyngdekrafta, kan vi sette opp følgende:



$$MgH - mgh = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 \quad (5.34)$$

La oss forklare denne formelen som bygger på energiens bevarelse.

Den består av to ledd på høyre side og to ledd på venstre side av likhetstegnet.

En masse som befinner seg over et referansenivå, f.eks. bakken, vil ha en potensiell energi i forhold til dette nivået som er bestemt av størrelsen av massen (m), høyden over bakken (h) og tyngdekrafta som representeres av tyngdeakselerasjonen (g).

1. ledd venstre side - avgitt potensiell energi fra massen M

Det store loddet vil falle høyden H og vil derfor avgi følgende potensielle energi:

$$M \cdot g \cdot H \quad (5.35)$$

g - er tyngdeakselerasjonen lik 9.81 m/s^2

M - er motvektloddets masse

H - er vertikal forflytning motvektloddets gjennomløper i løpet av kastebevegelsen.

2. ledd venstre side - tilført potensiell energi til massen m

Massen som skal kastes løftes opp høyden h og vil derfor få tilført energien:

$$- m \cdot g \cdot h \quad (5.36)$$

g - er tyngdeakselerasjonen lik 9.81 m/s^2

m - er massen som skal kastes

h - er høyden denne massen løftes i løpet av kastebevegelsen.

Siden denne massen får tilført potensiell energi får dette leddet negativt fortegn.

1. ledd høyre side - tilført bevegelsesenergi (kinetisk) til massen m

Massen som skal kastes får i tillegg til potensiell energi tilført bevegelsesenergi som er gitt ved ligningen:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 \quad (5.37)$$

m - er massen som skal kastes

v_m - den tangensielle hastigheten til massen



Massen vil derfor opparbeide en fart i løpet av bevegelsen

2. ledd høyre side - tilført bevegelsesenergi (kinetisk) til massen M

Massen til motvekten M vil avgi potensiell energi, men vil også få tilført bevegelsesenergi som er gitt ved ligningen:

$$\frac{1}{2}Mv_M^2 \quad (5.38)$$

M - er massen til motvekten

v_M - den tangensielle hastigheten til massen til motvekten

Vi kan nå enten måle h og H eller bestemme høydene ut fra vinklene α og β . Vi velger å måle høydene med en tommestokk.

Siden armene har forskjellig lengde a og A vil også hastighetene v_m og v_M ha forskjellig verdi. Nå er vi primært interessert i utgangshastigheten, v_m til den massen som skal kastes. Det er imidlertid relativt lett å finne sammenhengen mellom v_m og v_M slik at vi kan eliminere den vi ikke er interessert i. Vi finner da at:

$$v_M = \frac{A}{a}v_m \quad (5.39)$$

Denne setter vi inn i ligning (5.34) og får:

$$MgH - mgh = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}M\frac{A^2}{a^2}v_m^2 \quad (5.40)$$

som kan omformes til:

$$g(MH - mh) = \frac{1}{2}\left(m + M\frac{A^2}{a^2}\right)v_m^2 \quad (5.41)$$

som igjen kan ordnes til:

$$v_m^2 = \frac{2g(MH - mh)}{\left(m + M\frac{A^2}{a^2}\right)} \quad (5.42)$$



$$v_m = \sqrt{\frac{2g(MH - mh)}{\left(m + M\frac{A^2}{a}\right)}} \quad (5.43)$$

Denne utgangshastigheten v_m har en kastevinkle på β som vi måler med en gradskive.

Oppgave:

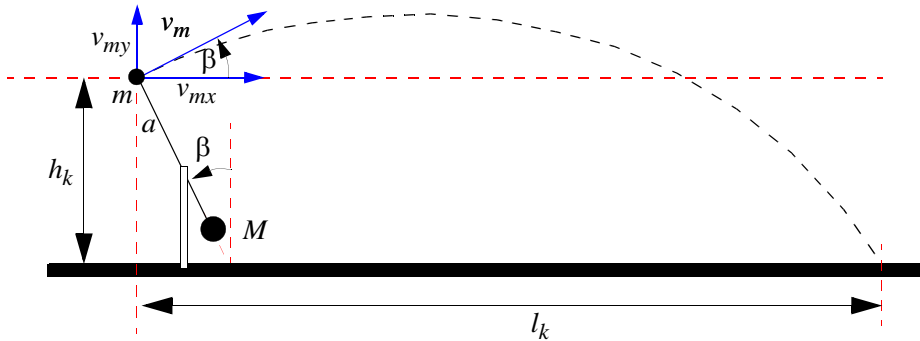
Drøft hvilke feilkilder denne beregningen er beheftet med.

Derneft må vi bestemme kastebanen når vi nå kjenner utgangshastigheten og vinkelen.

5.2.2 Beregne kastebanen og nedslagspunktet

I dette avsnittet skal vi forsøke å beregne kastlengden når vi kjenner utgangshastigheten, kastevinkelen og høyden over bakken idet objektet forlater katapulten.

Figur 11 viser hvordan vi tenker oss banen til massen m



Figur 11 Banen til massen m

I det forrige avsnittet har vi bestemt følgende parametere:

v_m - utgangshastigheten til den vesle massen m . Denne har både en skalar verdi v_m og en retning, β

β - kastvinkelen

h_k - høyden over bakken hvor massen m forlater katapulten

l_k - kastlengden

To viktige parametere vi må finne er hastigheten i vertikalretningen, v_{my} , og i horisontalretningen, v_{mx} . Disse bestemmes ved at vi dekomponerer hastighetsvektoren i x -og y -retning.

$$v_{my} = v_m \cdot \sin(\beta) \quad (5.44)$$



Matematisk modellering

$$v_{mx} = v_m \cos(\beta) \quad (5.45)$$

Vi vet at tyngdekrafta er den eneste krafta som påvirker massen etter at den har forlatt katapulten. Denne gir massen en akselerasjon mot bakken. Vi benytter bevegelsesligningen:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (5.46)$$

Hvor s er strekningen en gjenstand beveger seg i løpet av tiden t når det har en starthastighet på v_0 og en akselerasjon lik a .

Vi antar at massen m får en konstant hastighet horisontalt lik v_{mx} . Derneist gis den en vertikal hastighet v_{my} som vil avta fordi den motvirkes av tyngdeakselerasjonen g som virker i motsatt retning. Kastet avsluttes idet massen treffer bakken som ligger h_k under utgangspunktet. Vi ønsker nå å finne den tiden, t , det tar for massen, m , å treffe bakken. Vi setter våre kjente parametere inn i ligning (5.46) og får:

$$-h_k = v_{my} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (5.47)$$

Vi legger spesielt merke til fortegnene som indikerer at bakken ligger under utgangspunktet, mens utgangshastigheten peker oppover (positiv). Videre virker tyngdeakselerasjonen nedover i motsatt retning av utgangshastigheten.

Denne ligningen kan vi ordne slik at vi får følgende 2. gradsligning:

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_{my} t - h_k = 0 \quad (5.48)$$

Løser vi denne får vi:

$$t = \frac{v_{my} \pm \sqrt{v_{my}^2 + 2gh_k}}{g} \quad (5.49)$$

Når vi nå har funnet tiden det tar før massen treffer bakken, kan vi lett beregne hvor langt massen går i løpet av denne tiden. Vi bruker da ligning (5.50):

$$l_k = v_{mx} \cdot t \quad (5.50)$$

Vi skal til slutt i dette kapittelet summere opp hva vi har funnet:

5.2.3 Oppsummering

Vi skal beregne kastlengden l_k for katapulten:

$$l_k = v_{mx} \cdot t \quad (5.51)$$



Hvor tiden, t , kan beregnes fra:

$$t = \frac{v_{my} \pm \sqrt{v_{my}^2 + 2gh_k}}{g} \quad (\text{tiden kastet varer}) \quad (5.52)$$

og v_{mx} og v_{my} kan beregnes fra:

$$v_{my} = v_m \cdot \sin(\beta) \quad (\text{vertikal hastighetskomponent})$$

$$v_{mx} = v_m \cdot \cos(\beta) \quad (\text{horisontal hastighetskomponent})$$

og utgangshastigheten v_m beregnes fra:

$$v_m = \sqrt{\frac{2g(MH - mh)}{\left(m + M\frac{A^2}{a^2}\right)}} \quad (5.53)$$

og kastvinkelen β måles. M er massen til motvekstloppet, høydene H , h og h_k , og lengdene på armene A og a måles med tommestokk. Tyngdeakselerasjonen, g , settes lik 9.81m/s^2 .

5.3 Tømming av vanntank (differensial ligninger)

I de foregående eksemplene har vi målt avhengige variable som funksjon av utvalgte verdier for de uavhengige variable. Vi har ofte benyttet en induktiv metode. Med utgangspunkt i måleresultater har vi utledet en matematisk modell for et fenomen. I dette eksempelet skal vi modellere en kontinuerlig prosess med utgangspunkt i fysiske lover og ved bruk av enkle differensialligninger. Deretter vil vi etterprøve modellen ved å gjøre målinger på en oppstilling. En slik framgangsmåte vil være deduktiv.

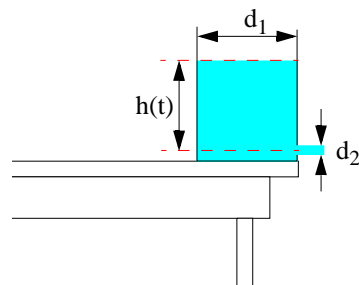
Eksemplet bygger på en ide fra **Thor Bernt Melø** ved Institutt for fysikk ved NTNU og **Tom Lindstrøms** bok *Kalkulus* ([6] side 520).

Problemstilling:

Vi har et sylindrisk beger med et sirkulært hull nær bunnen. Vi ønsker å bestemme sammenhengen mellom væskehøyden som funksjon av tiden etter som væsken renner ut gjennom hullet.

Læringsmål:

Eleven skal få trening i uttrykke en matematisk modell ved hjelp av en differensialligning på bakgrunn av en konkret problemstilling. Deretter skal de løse ligningen





Matematisk modellering

både eksplisitt, og numerisk ved hjelp av Excel. Til sist skal det utføres eksperimenter for å undersøke gyldigheten til modellen ev. finne konstantene i ligningen.

Utstyr:

1 stk. beger med hull nær bunnen (ev. avsaget brusflaske 1,5 liter)

1 stk. stort kar

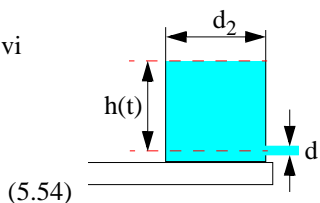
1 stk. stoppeklokke

Dette er en klassisk problemstilling først beskrevet av den italienske fysikeren *Evangelista Torricelli* (1608–1647) som forøvrig er mest kjent som oppfinneren av barometeret.

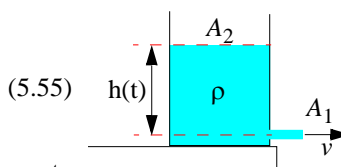
Etablering av modellen ut fra fysiske lover:

Dersom karet og åpningen nær bunnen er sirkulære kan vi skrive:

$$A_1 = \pi \frac{d_1^2}{4}$$



$$A_2 = \pi \frac{d_2^2}{4}$$

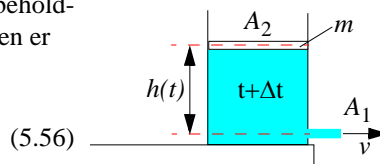


Hvor A_1 og A_2 er arealene til henholdsvis overflata til begeret og åpningen nederst. d_1 og d_2 er tilhørende diametere.

Vi ser bort fra friksjonen i røråpningen og antar at vannet i beholderen har en viss potensiell energi på grunn av tyngden til vannmassen. Den potensielle energien omdannes til bevegelsesenergi idet vannet synker i beholderen og det presses ut gjennom åpningen A_1 .

Vi antar at det i løpet av tiden Δt har rent en masse m ut av beholderen. Den potensielle energien til vannmengden i beholderen er dermed redusert med:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$



og omdannet til bevegelsesenergi i vannstrålen som kommer ut av hullet:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{5.57}$$

Her er v væskens hastighet idet det kommer ut av røret, g er tyngdens akselerasjon og h den midlere høydeforskjellen mellom væskemengden m og åpningen.



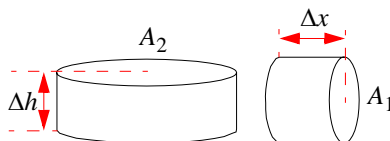
Dersom vi antar at systemet er friksjonsfritt, vet vi at avgitt potensiell energi er lik mottatt kinetisk energi i vannstrålen. Denne sammenhengen kan vi ut fra energibetraktninger uttrykke som:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (5.58)$$

Løser vi denne mht. hastigheten v får vi:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (5.59)$$

Vi vet også at når en volumenhet strømmer ut gjennom åpningen i bunnen, vil væskevolumet inne i beholderen minke med et like stort volum. Gjør vi dette volumet meget lite., kan vi sette opp følgende:



$$A_2 \cdot \Delta h = A_1 \cdot \Delta x = A_1 \cdot v \cdot \Delta t \quad (5.60)$$

siden $\Delta x = v \cdot \Delta t$.

Setter vi inn uttrykket for v få vi:

$$\Delta h = -\frac{A_1}{A_2} \cdot \sqrt{2gh} \cdot \Delta t = -k \cdot \sqrt{h} \cdot \Delta t \quad (5.61)$$

$$\Delta h = -k \cdot \sqrt{h} \cdot \Delta t \quad (5.62)$$

hvor

$$k = \frac{A_1}{A_2} \cdot \sqrt{2g} \quad (5.63)$$

Ligning (5.62) kalles en differanseligning. Vi kan skrive endringen i vannstanden etter et lite tidsinkrement Δt på følgende måte:

$$h(t + \Delta t) = h(t) - k \cdot \sqrt{h} \cdot \Delta t \quad (5.64)$$

Vi kan på grunnlag av ligning (5.64) beregne verdiene for høyden fortløpende for hvert tidsinkrement Δt .



Matematisk modellering

Løsning av differanseligning i Exel

Vi skal først simulere forløpet på grunnlag av ligning (5.64). Vi går da fram som følger:

Skriv inn i regnearket:

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|-----------|----------------|---|-------------------|----------|-----------------|----------|
| 1 | Tid i sek | Vannstand i cm | | Parametere: | Verdier: | Parameter: | Verdier: |
| 2 | | | | Vannstand start = | | | |
| 3 | | | | Areal A1 = | | Diameter (cm) = | |
| 4 | | | | Areal A2 = | | Diameter (cm) = | |
| 5 | | | | Tidsinkrement = | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | k = | | | |

Dernest skriver vi inn følgende formler i de ulike cellene

I celle A2 =0

I celle A3 =A2+\$E\$5 *\$E\$5 betyr at ved kopiering holdes denne adressen konstant. E5 er tidsinkrementet.*

I celle B2 =E2 *E2 angir startverdien*

I celle B3 =B2-\$E\$7*ROT(B2)*\$E\$5 *Uttrykker ligning (5.64)*

I celle E2 16 *Ønsket vannstand ved start*

I celle E3 =PI()*(G3/2)^2 *Beregner A₁, rørets areal, G3 er diameteren til røret.*

I celle E4 =PI()*(G4/2)^2 *Beregner A₂, karetets areal, G4 er diameteren til karet.*

I celle E5 =0,5 *Angir tidsinkrementet*



I celle E7 =E3/E4*ROT(2*981) *Beregner ligning (5.63), dvs. konstanten k*

I celle G3 =0,6 *Diameter til hullet*

I celle G4 =9 *Diameter til karet*

Resultatet skal da se slik ut.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|-----------|----------------|---|-------------------|----------|-----------------|----------|
| 1 | Tid i sek | Vannstand i cm | | Parametere: | Verdier: | Parameter: | Verdier: |
| 2 | 0 | 16 | | Vannstand start = | 16 | | |
| 3 | 0,5 | 15,7 | | Areal A1 = | 0,196 | Diameter (cm) = | 0,6 |
| 4 | | | | Areal A2 = | 63,617 | Diameter (cm) = | 9 |
| 5 | | | | Tidsinkrement = | 0,5 | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | k = | 0,137 | | |

Vi har i tillegg justert antall desimaler etter komma. Dette gjøres ved å velge **Hjem** og velge  (reducere) eller  (øke) gjentatte ganger til vi oppnår ønsket antall desimaler.



Kopering av celler

Vi skal så kopiere cellene A3 og B3 slik at hver beregning bygger på forrige verdi. I tillegg skal enkelte parametere være fast referert til verdier i kolonnene E og F. De faste referansene er angitt med \$-tegn i formlene over.

Lag tabell

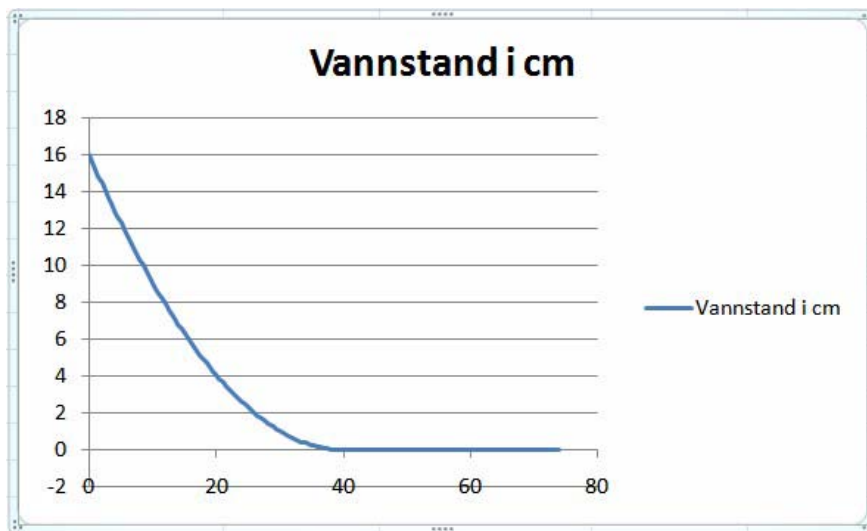
1. Merk celle A3 og B3 og trykk **Ctrl c**
2. Merk cellene A3 - A150 og B3 - B150 og trykk **Ctrl v**.
Da kopieres formlene fortløpende og verdier beregnes.

Lag diagram

Selv om tabellen er best egnet til nøyaktig avlesningen, er det nyttig å ha et funksjonsdiagram for å se forløpet. Vi ønsker å se vannstanden som funksjon av tiden.

For å sette opp et diagram av denne typen, gjør vi følgende:

1. Merk kolonnene A og B, inkluder overskriftene
2. Velg **Sett inn** fra hovedmenyen.
3. Fra undermenyen **Diagrammer** velges **Punkt**.
Deretter velges for eksempel **Punktdiagram** med rette linjer.
4. Umiddelbart kommer følgende diagram opp.



Diagrammet over er for et hull på 6 mm og en beholder med diameter på 9 cm. Vannstanden ved start er som vi ser 16 cm.



Kontrollmåling

Vi vil nå undersøke om ligningssystemet stemmer med virkeligheten.

Målingene ble utført ved hjelp av en avkortet 1,5 liter brusflaske av plast. Vi måler tiden det tar å redusere vannstanden fra 16 til 8 cm (“halveringstiden”).



Tabellen under viser både beregnede og målte verdier:

| Flaske | Diameter | Hull | Vannstand | Målehøyde | Beregnet | Målt | Δt |
|----------|----------|--------|-----------|-----------|----------|----------|------------|
| Flaske A | 9 cm | 0,4 cm | 16 cm | 8 cm | 26,5 sek | 35,1 sek | 8,6 sek |
| Flaske B | 9 cm | 0,5 cm | 16 cm | 8 cm | 17,0 sek | 23,4 sek | 6,4 sek |
| Flaske C | 9 cm | 0,6 cm | 16 cm | 8 cm | 11,8 sek | 16,0 sek | 4,2 sek |

Som vi ser så er det et betydelig avvik mellom beregnet og målt verdi for “halveringstiden”. Vi legger merke til at feilen øker med 2,2 sek for hver gang vi øker hulldiametere med 0,1 mm.

Drøft mulige årsaker til avviket.

Årsaken er sannsynligvis knyttet til hullets plassering og utforming. Idet vannet passerer hullet, vil det bli utsatt for friksjon som bremser farten til vannet, dermed vil det også ta noe lengre tid før beholderen er tømt enn hva vi først beregnet.

Korreksjon

Finnes det en effektiv måte å korrigere avviket på?

Beregner vi forholdet mellom beregnet og målt verdi, får vi verdiene 0,76, 0,73 og 0,74. Det vil si at vi kan legge inn en multiplikasjonsfaktor på ca. 0,75 for konstanten.

**Eksplisitt løsning av ligningen**

I ligning (5.62) kom vi fram til at endringen i høyde Δh i løpet av tiden Δt kan uttrykkes som:

$$\Delta h = -k \cdot \sqrt{h} \cdot \Delta t \quad (5.65)$$

Dersom vi gjør tidsinkrementet uendelig lite, kan vi skrive denne ligningen på formen:

$$\frac{dh}{dt} = -k \cdot \sqrt{h} \quad (5.66)$$

Ligningen uttrykker at endringen pr. tidsenhet er proporsjonal med kvadratroten av høyden, med en proporsjonalitetskonstant lik $-k$. Vi husker også at k er proporsjonal med forholdet mellom arealet til hullet og størrelsen på beholderen.

Dette er en separabel differensialligning, dvs. at vi lett kan samle den ukjente funksjonen $h(t)$ på den ene siden av likhetstegnet og den tidsvariable på den andre (her en konstant). Dividerer vi med \sqrt{h} på begge sider av ligningen får vi:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -k \cdot dt \quad (5.67)$$

En slik ligning løses ved at vi integrerer på begge sider. Venstre side mht til h og høyre side mht på t , og Vi får da:

$$\int_{h_0}^h \frac{1}{\sqrt{h}} dh = - \int_0^t k dt \quad (5.68)$$

der h_0 er vannstanden over hullet ved $t = 0$.

Dette uttrykket kan løses ved at vi integrerer hver av sidene

$$2\sqrt{h} \Big|_{h_0}^h = -kt \Big|_0^t \quad (5.69)$$

Setter vi inne grenseverdiene får vi:

$$\sqrt{h} - \sqrt{h_0} = -\frac{k}{2}t \quad (5.70)$$



$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{k}{2}t\right)^2 \tag{5.71}$$

Vi kan nå bestemme konstanten k ut fra målingene vår. h_0 er gitt av vannstanden ved start (f.eks. **16 cm**), mens verdien til konstanten k vil variere med diameteren for beholderen og størrelsen på hullet.

Med en hullstørrelse på **0,5 cm** og en diameter på beholderen på **9 cm** er halveringstiden målt til **23,4 sek**. På bakgrunn av disse verdiene kan vi sette opp:

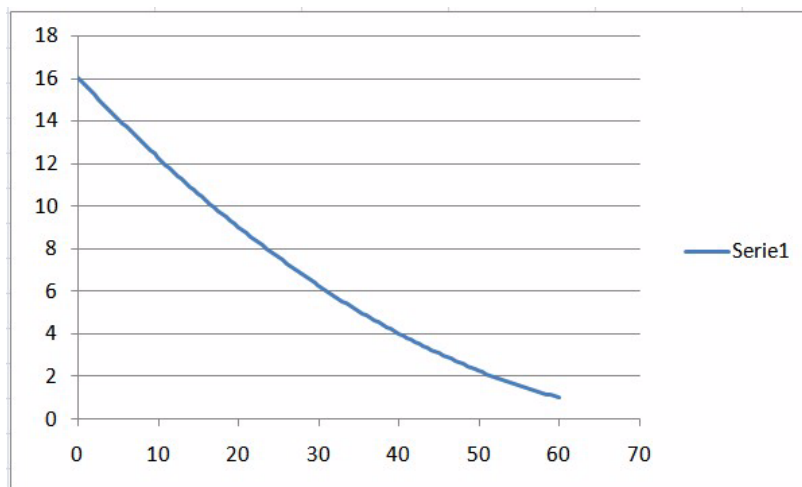
$$h(23,4 \text{ sek}) = \left(4 - \frac{k}{2}23,4\right)^2 [\text{cm}] = 8\text{cm} \tag{5.72}$$

Dersom vi løser denne med hensyn på k får vi:

$$k = 0,1 \tag{5.73}$$

$$h(t) = (4 - 0,05t)^2 \tag{5.74}$$

Garfen under viser en simulering av forløpet på grunnlag av ligning (5.74).



Dette forløpet harmonerer godt med simuleringen med differanseligningen. Grafen beskriver forløpet for et hull med en diameter på 0,5 cm og en beholder med diameter på 9 cm. Vannstanden ved start er 16 cm over hullet.



6 Referanser

6.1 Litteraturliste

- [1] Kjersti Wæge og Nils Kristian Rossing, “*Strikkhopp med Barbie*”, side 122 “Inspirasjonsbok for matematikklærere”, Redaktør Christoph Cirfel, Tangenten, Caspar forlag 2005.
- [2] Niss, M. & Højgaard Jensen T. (2002) “*Kompetanser og matematikklæring. Ideer og inspirasjon til utvikling av matematikklæringen i Danmark*”, Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 - 2002. Undervisningsministeriet, (<http://pub.uvm.dk/2002/kom/>)
- [3] Carl Angell, Per Morten Kind, Ellen K. Henriksen og Øystein Guttersrud, “Vitenskapelig arbeidsmåte og modellering”, Skolelaboratoriet for fysikk, Oslo 2005 <http://www.fys.uio.no/skolelab/FYS21/larerhefte2.pdf>
- [4] Svein Sjøberg, “Naturfag som allmenndannelse, en kritisk fagdidaktikk”, Gyldendal 2005, 2 utg.
- [5] “Store norske leksikon”, Aschehoug og Gyldendal 1997, bind 7
- [6] Tom Lindstrøm, “Kalkulus”, Utgave 3, Universitetsforlaget 2006

6.2 Nettreferanser:

- [7] **Salg av katapultbyggesett:**
http://www.redstoneprojects.com/trebuchetstore/science_project_catapult.html
- [8] **Arbeidstegninger for en tradisjonell katapult:**
http://www.redstoneprojects.com/trebuchetstore/build_a_catapult.html
- [9] **Arbeidstegninger for en tradisjonell katapult:**
<http://www.io.com/~beckerdo/other/trebuchet.html>
- [10] **Litt katapultteori:**
<http://members.iinet.net.au/~rmine/howtreb.html>
- [11] **Katapult simuleringsprogram:**
a) <http://www.trebuchet.com/sim/>
- [12] **Blåse på flasker:**
a) <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/waves/coke3.html>
- [13] **Vitenskapsteori:**
<http://fuv.hivolda.no/prosjekt/ingvaldstraume/vitenska.htm>



Vedlegg A Hva sier læreplanene i matematikk (Kunnskapsløftet)

Tabellen under er hentet fra Kunnskapsløftet, læreplaner for matematikk. Nederst til høyre har vi rammet inn den delen som lettest kan kombineres med matematisk modellering.

| Årssteg | Hovedområde | | | | |
|---------|--------------------------|----------|--------------------------|--|------------|
| 1.–4. | Tal | Geometri | Måling | Statistikk | |
| 5.–7. | Tal og algebra | Geometri | Måling | Statistikk og sannsyn (bm.: sannsynlighet) | |
| 8.–10. | Tal og algebra | Geometri | Måling | Statistikk, sannsyn og kombinatorikk | Funksjonar |
| Vg1T | Tal og algebra | Geometri | | Sannsyn | Funksjonar |
| Vg1P | Tal og algebra | Geometri | Økonomi | Sannsyn | Funksjonar |
| Vg2T | Geometri | | Kombinatorikk og sannsyn | Kultur og modellering | |
| Vg2P | Tal og algebra i praksis | | Statistikk | Modellering | |

Under har vi plukket ut noen deler av læreplanen som berører temaet modellering:

Fra hovedområdene leser vi blant annet:

Funksjonar

Ein funksjon beskriv endring eller utvikling av ein storleik som er avhengig av ein annan, på ein eintydig måte. Funksjonar kan uttrykkjast på fleire måtar, til dømes med formlar, tabellar og grafar. Analyse av funksjonar går ut på å leite etter spesielle eigenskapar, som kor raskt ei utvikling går, og når utviklinga får spesielle verdier.

Kultur og modellering

Hovedområdet kultur og modellering gjev eit overordna perspektiv på faget matematikk. Hovedområdet beskriv den logiske strukturen i faget og viser historia og den kulturelle rolla til faget. Modellering er ein fundamental prosess i faget, der utgangspunktet er noko som verkeleg finst. Dette blir beskrive matematisk med ein modell som blir tilarbeidd, og resultatene av det blir tolka i lys av den opphavlege situasjonen.

Videre finner vi kompetansemål fra de ulike matematikkfagene:



A.1 Kompetansemål etter 10. årssteget

Måling

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- gjere overslag over og berekne lengd, omkrins, vinkel, areal, overflate, volum og tid, og bruke og endre målestokk
- **velje høvelege måleiningar, forklare samanhengar og rekne om mellom ulike måleiningar, bruke og vurdere måleinstrument og målemetodar i praktisk måling, og drøfte presisjon og måleusikkerheit**
- gjere greie for talet π og bruke det i berekningar av omkrins, areal og volum

Funksjonar

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- **lage, på papiret og digitalt, funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekst**
- identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og enkle kvadratiske funksjonar, og **gje døme på praktiske situasjonar som kan beskrivast med desse funksjonane**

A.2 Kompetansemål i matematikk, Vg1T

Funksjonar

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- **gjere greie for funksjonsomgrepet og teikne grafar** ved å analysere funksjonsomgrepet
- berekne nullpunkt, skjæringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdier for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta
- gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar
- **lage og tolke funksjonar som beskriv praktiske problemstillingar, analysere empiriske funksjonar og finne uttrykk for ein tilnærma lineær funksjon**
- bruke digitale hjelpemiddel til å drøfte polynomfunksjonar, rasjonale funksjonar, eksponentialfunksjonar og potensfunksjonar

A.3 Kompetansemål i matematikk, Vg2T

Kultur og modellering

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- **formulere ein matematisk modell på grunnlag av observerte data, tilarbeide modellen, reflektere over resultatet og framgangsmåten og vurdere kor gyldig modellen er**
- **bruke teknologiske verktøy i utforsking og modellbygging**



Matematisk modellering

- gjere greie for omgrepa implikasjon og ekvivalens, kjenne til vanlege matematiske bevistypar og argumentasjon og gjennomføre matematiske bevis
- gje døme frå matematikkens fleirkulturelle historie og drøfte kva matematikken har å seie for naturvitskap, teknologi, samfunnsliv og kultur

A.4 Kompetansemål i matematikk, Vg1P

Funksjonar

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- **undersøkje funksjonar som beskriv praktiske situasjonar**, ved å fastsetje skjæringspunkt, nullpunkt, ekstremalpunkt og stiging, og tolke den praktiske verdien av resultatata
- omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar
- **gjere greie for omgrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske døme**, også digitalt

A.5 Kompetansemål i matematikk, Vg2P

Modellering

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- **gjere målingar i praktiske forsøk, formulere ein enkel matematisk modell på grunnlag av dei observerte data, bruke teknologiske verktøy i utforsking og modellbygging og vurdere modellen og kor gyldig han er**
- **bruke matematikk i praktiske samanhengar og vurdere kva han kan brukast til, og kva han ikkje kan brukast til, i samband med utgreiingar og avgjerder**

Hva sier læreplanene i andre fag om datainnsamling og matematisk modellering (Kunnskapsløftet)

Vi finner også emner som kan knyttes til modellering i andre realfag:

A.6 Grunnleggende ferdigheter i Naturfag (Vg1)

- *Å kunne regne i naturfag er å bruke tall og beregninger for å registrere og utarbeide resultater fra ens egne målinger og å lage tabeller og diagrammer med naturfaglig innhold. Å regne innebærer også å bruke og tolke formler og modeller fra virkeligheten samt bearbeide og tolke ulike typer data.*

Fra målet bærekraftig utvikling:

- *....eleven skal kunne gjøre rede for faktorer som virker inn på størrelsen til en populasjon.*



A.7 Grunnleggende ferdighet i Biologi (Vg2 og Vg3)

- *Å kunne rekne i biologi inneber å bruke tal og utrekningar, registrere, gjere enkle statistiske analysar, arbeide med og presentere resultat av eigne observasjonar. Å setje seg inn i og bruke matematiske modellar frå biologisk forskning inngår òg. Like eins inneber det å forstå resultat i form av grafar og tabellar.*

A.8 Grunnleggende ferdighet i Fysikk (Vg2 og Vg3)

- *Å kunne regne i fysikk innebærer å bruke tall og beregninger til å registrere og utarbeide resultater fra egne målinger, og lage tabeller og diagrammer med fysikkfaglig innhold. Det betyr å bruke og tolke formler og modeller av virkeligheten, og bearbeide og tolke ulike typer data. Å kunne regne vil si å bruke metoder fra matematikkfaget. I tillegg innebærer det bruk av vektorer, parameterframstilling av kurver og differensial- og integralregning.*



Vedlegg B Byggebeskrivelser

B.1 Bygging av katapult

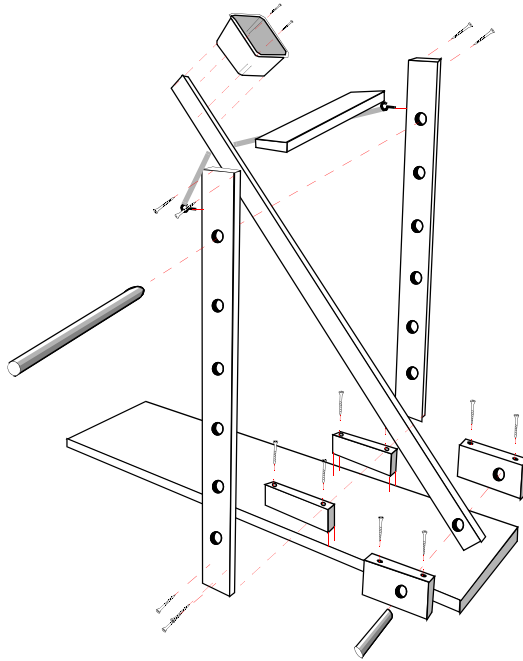
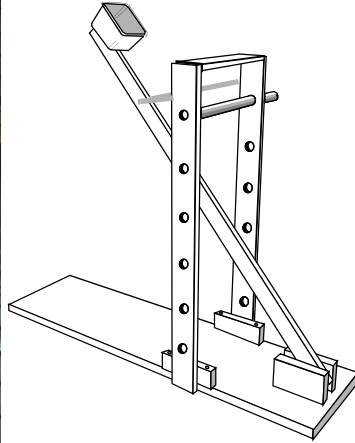
Det er utallige måter å bygge en katapult på. Figuren under viser en katapult slik vi forestiller oss at en katapult fra middelalderen skal se ut.



Men den kan bygges mye enklere. På de tre neste bildene er vist noen ulike konstruksjoner.

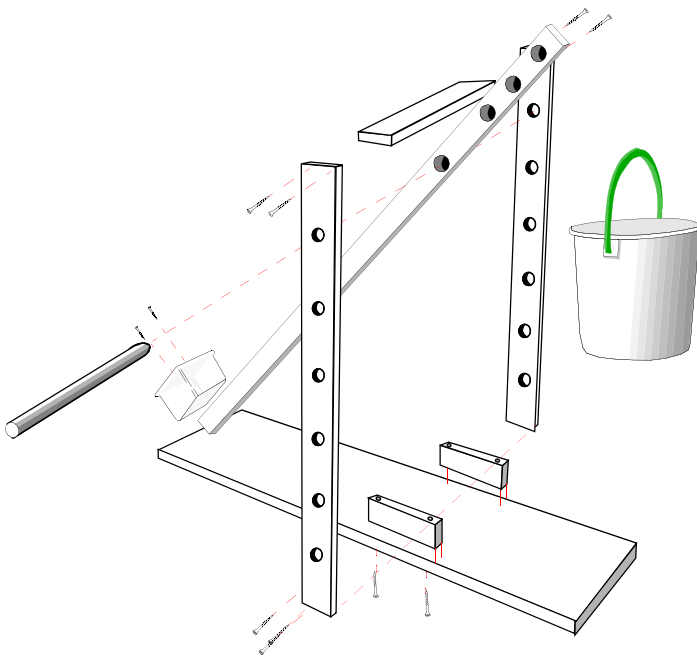
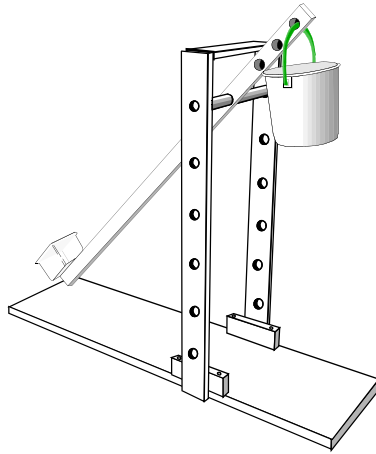


1. Katapult modell I



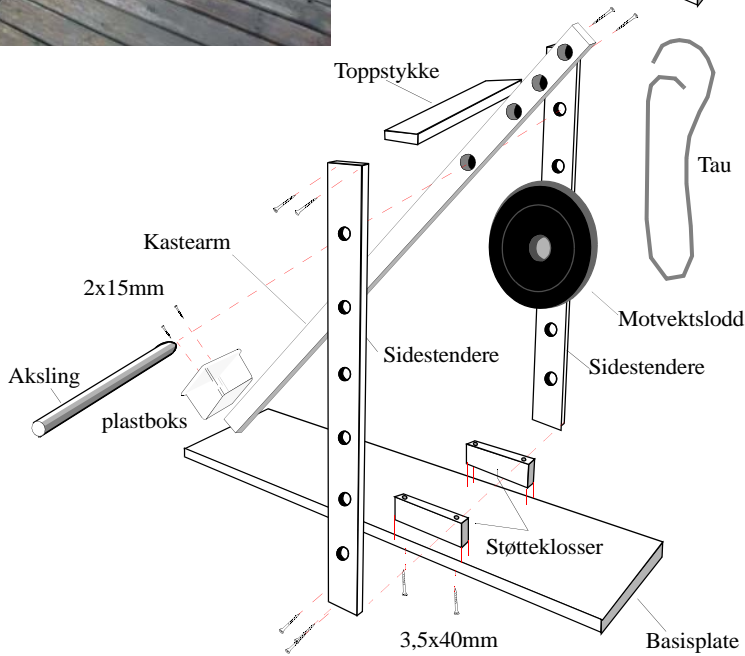
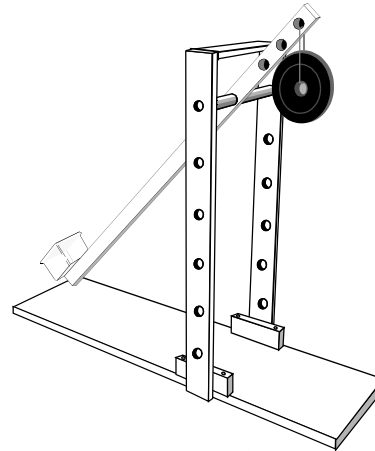


2. Katapult, modell II





3. Katapult modell III

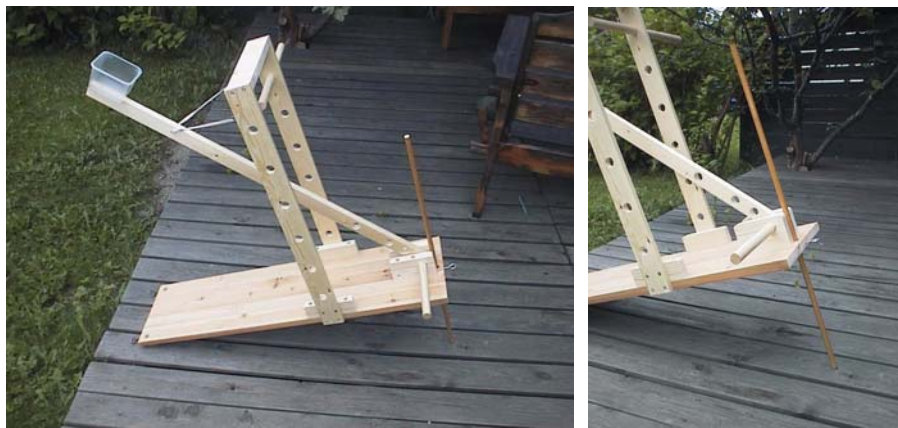


Bildene burde være selvforklarende.

Katapult modell I er en modell basert på strikk slik vi laget sprettert i gamle dager. Modell II og III bruker tyngdekraften for å kaste objektet avgårde. De siste to modellene ligner mest på den tradisjonelle versjonen. Det var også vanlig å benytte en slynge festet til kastearmen. Når armen var i riktig posisjon løsnet den ene stroppen til slyngen og steinen ble slengt ut i en bue.



En kan også vippe opp katapulten ved å skru fast en stang enten foran eller bak. På denne måten kan utgangsvinkelen endres mens alle andre parametere holdes konstante.



Figur B.1 Støttestav for vinkeljustering

Et hull midt gjennom basisplata foran og bak gjør at hele katapulten kan stilles i den ønskede vinkel uten at noen av de øvrige parametere endres.

Som kasteobjekt kan en bruke ulike gjenstander. Det er en fordel å bruke gjenstander som faller dødt ned på bakken. En sjonglerball eller bamse vil ikke sprette bortover bakken som en ball.



Figur B.2 Ulike kasteobjekter

I strikkmodellen kan en også benytte en vanlig hengsel til å feste kastearmen. Dette vil være en noe enklere, men fullgod løsning.

B.1.1 Materialer

Nødvendige materialer for å bygge en klassisk katapult (modell III) med motvektslodd, kan oppsummeres som følger:

- 1 stk. basisplate (f.eks. hobbyplank 1,8x80x20cm) - pris kr. 34,- pr./plate
- 2 stk. sidestendere (f.eks. 70x21x45cm gran glattkant) - pris kr. 11,40 pr./m



- 2 stk. støtteklosser (f.eks. 20x21x70cm gran glattkant) - pris kr. 15,60 pr./m
- 1 stk. toppstykke (f.eks. 20x21x45cm gran glattkant) - pris kr. 11,40 pr./m
- 1 stk kastearm (f.eks. 100x21x34cm gran glattkant) - pris kr. 11,80 pr./m
- 1 stk aksling (f.eks. 15mm 30cm furu rundlist) - pris 9,40 pr./m
- 1 stk. motvektsslodd (f.eks. 2 kg.) - pris 50,-?
- 1 stk. tau (f.eks. 60cm)
- 14 stk. skruer (f.eks. 3,5x40mm) - pris 40,- pr 200stk
- 2 stk. skruer (f.eks. 2x15mm) - pris
- 1 stk. plastboks - pris 5,-kr
- 1 stk bamse/sjonglerball - pris 20,-/15,-kr.
- 6 stk tykke strikk (modell I)

B.1.2 Verktøy

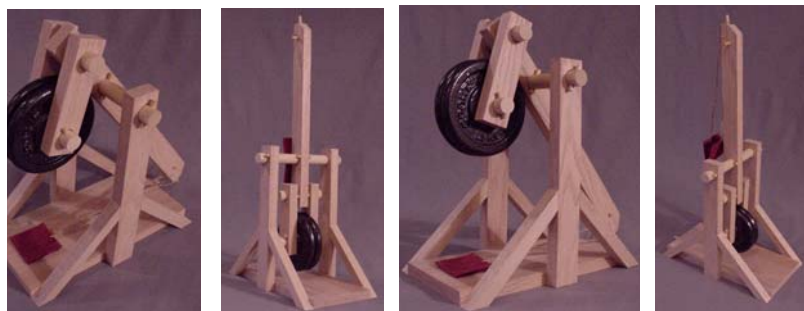
Nødvendige verktøy for å bygge og kaste med en katapult.

- 1 stk Snekkersag
- 1 stk Stjerneskrutrekker
- 1 stk Elektrisk bormaskin
- 1 stk 16 mm bor
- 1 stk 3 mm bor
- 1 stk Tommestokk
- 1 stk Gradskive
- 1 stk målbånd eller tau med knuter for hver meter

B.1.3 Eksempler på katapulter hentet fra nettet

Følgende er hentet fra:

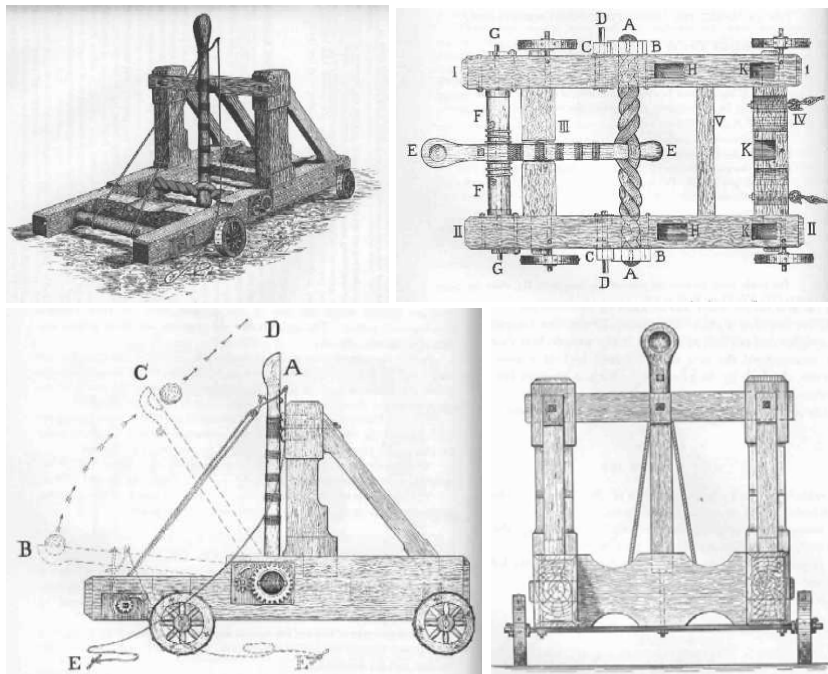
http://www.redstoneprojects.com/trebuchetstore/science_project_catapult.html



Figur B.3 Eksempel på katapultbyggesett



Denne hjemmesiden tilbyr flere flotte katapulter. Dette er bare en av flere som kan kjøpes. Bildene er imidlertid så gode at det ikke skulle være vanskelig å bruke dem som utgangspunkt for å lage gode arbeidstegninger og modeller.



Figur B.4 En tradisjonell modell med tvunnet kraftig strikk

Figur B.4 viser arbeidstegninger til en tradisjonell katapult som bruker et tvunnet kraftig strikk som strammemekanisme.

Se http://www.redstoneprojects.com/trebuchetstore/build_a_catapult.html

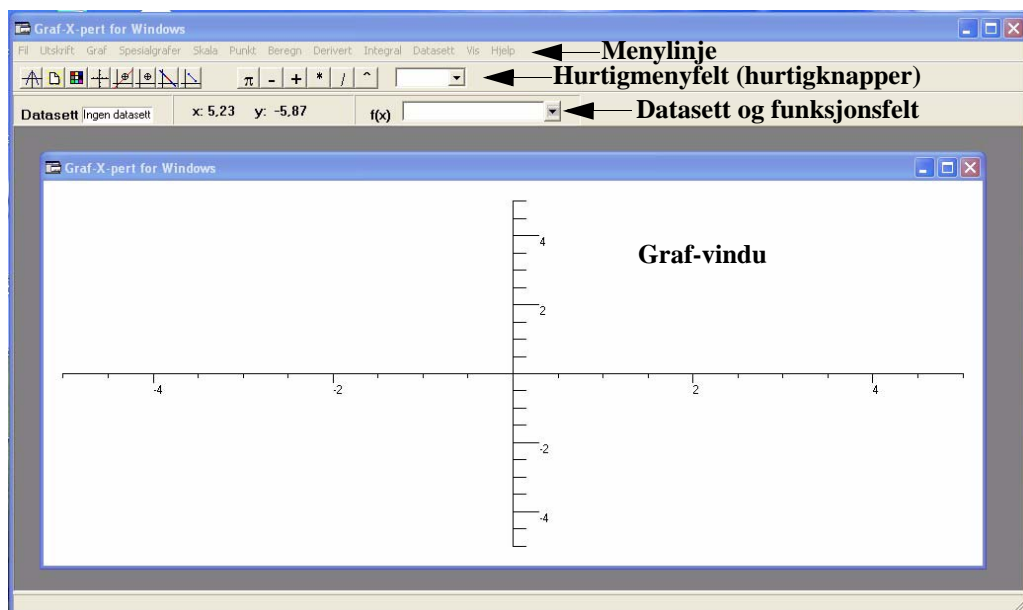


Vedlegg C Brukerveiledning GXP for Windows

Programmet er skrevet av *Jostein Våge* ved Program for lærerutdanning (PLU). Denne veiledningen skal i første rekke beskrive hvordan programmet kan brukes ved kurvetilpasning av data i et datasett (regresjonsanalyse), i tillegg til hvordan programmet kan brukes til å plote kurvene.

C.1 Oppstart og etablering av datasett

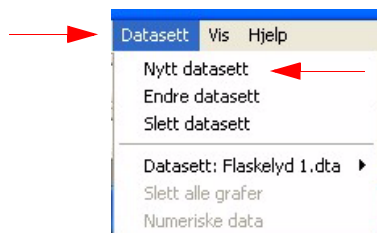
Brukergrensnittet består av en *menylinje* og ett *hurtigmenyfelt* i tillegg til selve *graf-vinduet*. I tillegg finnes en menylinje hvor vi finner navnet på det aktive datasettet og innskrivningsfelt for funksjoner (også kalt funksjonsvindu).



Ved innskriving av et **nytt datasett**, gjøres følgende:

1. *Nytt datasett*

- Velg DATASETT på menylinjen
- Deretter NYTT DATASETT
- Da kommer det opp en tabell hvor datasettet kan skrives inn.



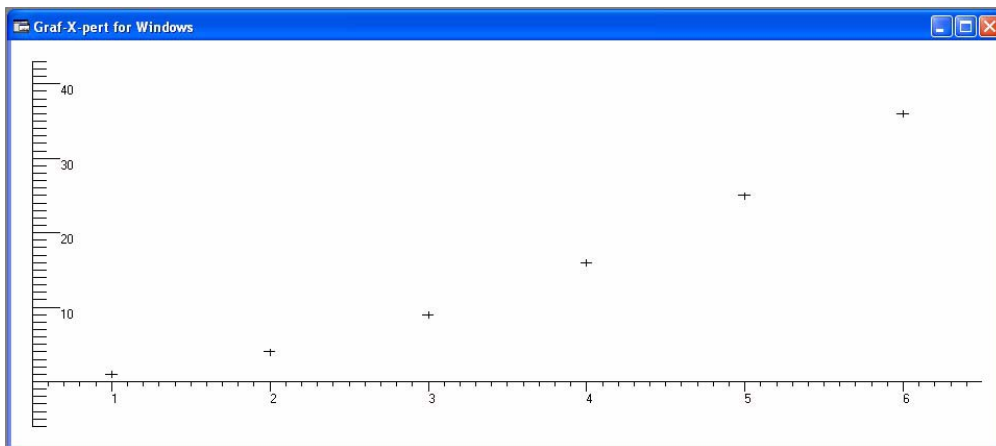
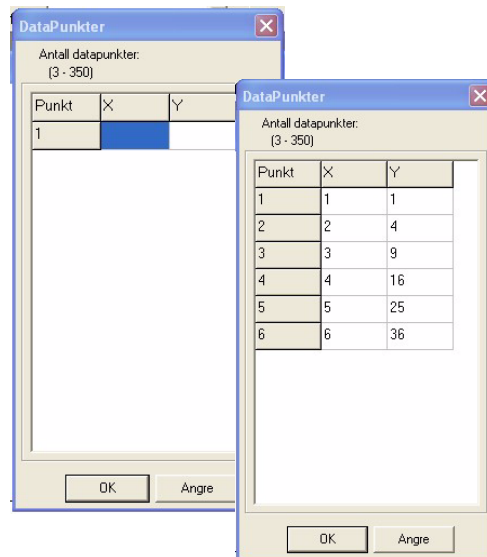


2. *Innskriving av datasett*

Data skrives inn i riktig kolonne. Bruk tabulatoren til å flytte mellom de ulike kolonnene. Et nytt sett x og y framkommer ved å trykke tabulatoren etter innskriving av y -verdien.

3. *Registrering og plotting av data.*

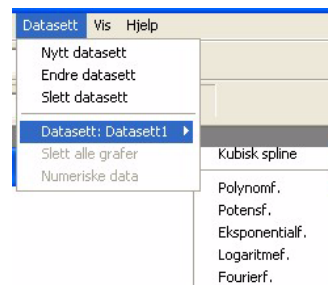
Trykk OK når alle data er innskrevet og dataparene plottes i koordinatsystemet i Graf-vinduet.

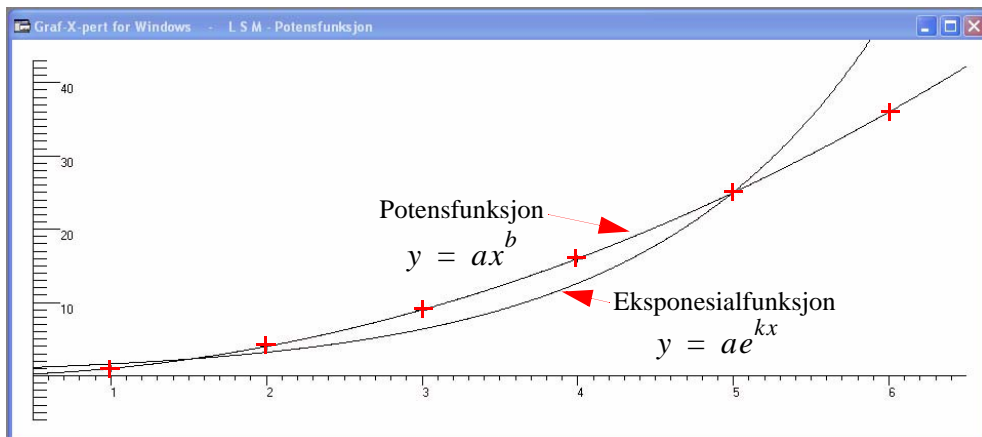


4. *Kurvetilpasning:*

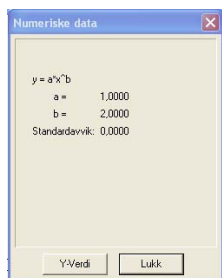
Kurvetilpasningen gjøres ved å gå inn i menyen DATASETT og velge DATASET: DATASET 1 og så velge ønsket kurvetilpasning.

Om ønskelig kan flere ulike typer kurvetilpasning velges fortløpende, for å se hvilken type som gir best tilpasning.



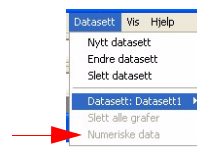


Det er ikke særlig tvil om hvilken av disse som gir den beste kurvetilpasningen. For å finne ut hvilke parameterverdier programmet har beregnet, gjør følgende:



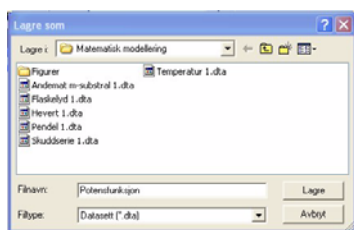
5. Beregnede parameterverdier og standardavvik:

Velg DATASETT fra menylinjen og deretter NUMERISKE DATA, Vi får da opp funksjonuttrykket for den valgte kurvetilpasningen og parametrene som gir best tilpasning. I vårt eksempel gir potensfunksjonen følgende resultat (se figuren til venstre).



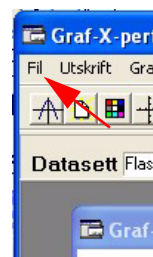
$$y = ax^b \text{ hvor } a = 1 \text{ og } b = 2 \Rightarrow y = x^2 \quad (6.1)$$

som stemmer godt med de dataene vi la inn. Vi registrerer at standardaviket er lik 0, hvilket synes rimelig siden datasettet inneholdt eksakte verdier i forhold til denne valgte potensfunksjonen.



6. Lagring av datasett:

Datsette lagres ved å velge FIL på menylinjen. Deretter velges LAGRE og DATASETT. Da kommer menyen til venstre opp og vi kan velge katalog og skrive inn ønsket navn på datasettet.



7. Åpne et eksisterende datasett:

Ønsker en å hente et eksisterende datasett, velges FIL og deretter ÅPNE og DATASETT. Deretter velges det ønskede datasettet fra katalogen.



C.2 Plotting av funksjoner

I dette vedlegget skal vi vise hvordan vi kan skrive inn og plote funksjoner. Som eksempel bruker vi strikkhopp med Barbie hvor vi ønsker å plote fallhøyde som funksjon av antall strikk.

1. Innskrivning av funksjonsuttrykk:

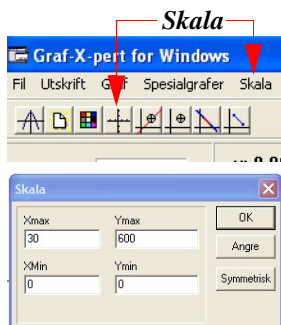
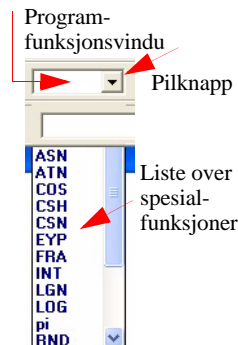
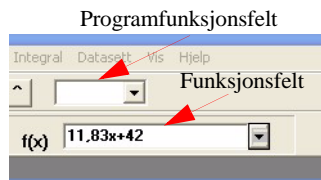
Funksjonsuttrykket skrives inn i *funksjonsfeltet*. Det er unødvendig å starte uttrykket med likhetstegn. Likedan kan multiplikasjonstegn mellom tall og x utelates. De vanligste regnesymbolene $+$, $-$, $*$, $/$, $^$, samt π , kan hentes inn i funksjonsuttrykket ved bruk av knappene i hurtigmenyfeltet.

I eksempelet vårt har vi skrevet inn uttrykket: $11,83x + 42$

Avslutt innskrivningen med ENTER og grafen plottes i koordinatsystemet.

2. Spesialfunksjoner:

En rekke spesialfunksjoner kan inkluderes i funksjonsuttrykket. Disse kan hentes fra *programfunksjonsfeltet*, ved å trykke på pilknappen til høyre for Programfunksjonsfeltet. Vedlegg C.3 gir en oversikt over spesialfunksjoner som kan inkluderes i funksjonsuttrykket.



3. Skalering:

Etter at grafen er plottet i koordinatsystemet, kan en endre koordinatsystemets skalering. Dette gjøres enten ved å klikke på SKALA på menylinjen, eller på i hurtigmenyfeltet.

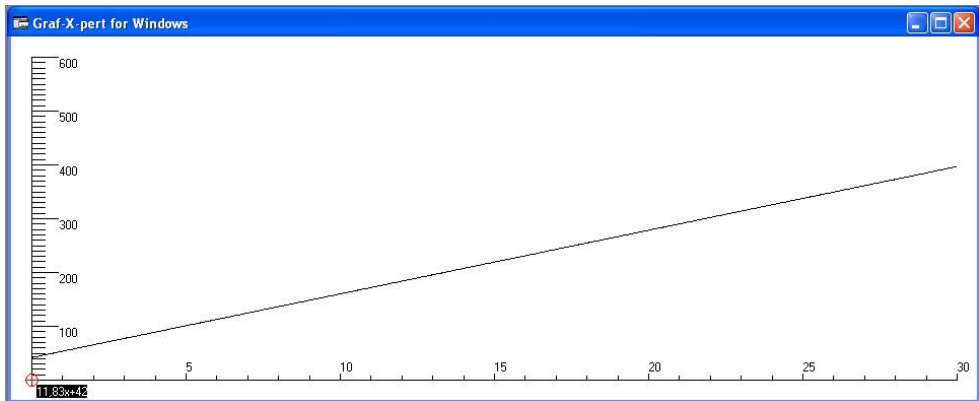
Et nytt menyvindu kommer opp. Her kan en fylle inn maks. og min. verdier for aksene i x - og y -retning.

I tillegg er det mulig å gjøre koordinatsystemet symmetrisk. I såfall settes XMAKS til ønsket yttergrensene, deretter trykkes SYMMETRISK og OK. Slik vil skaleringen av ytterpunktene for begge akser bli lik \pm XMAKS.




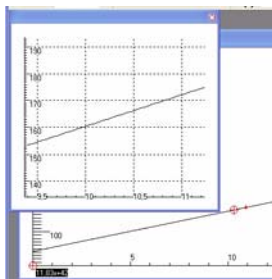
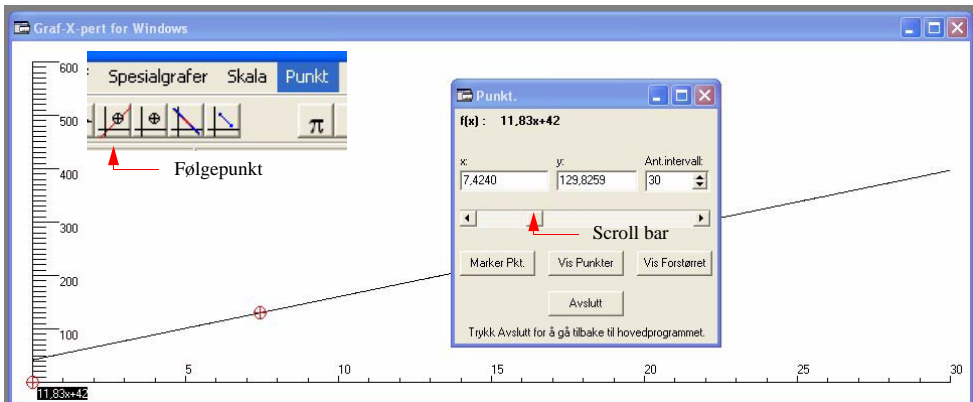
4. *Plotting av graf:*

Etter plotting og skalering framkommer den lineære funksjonen i grafvinduet som vist i figuren under. Funksjonsuttrykket skrives ut i invers video og kan flyttes til en passende plass med markøren.



5. *Avlesning av funksjonsverdier, bruk av følgepunkt:*

Avlesning av funksjonsverdier kan forenkles ved å bruke et følgepunkt. En undermeny hentes fram ved å klikke på  symbolet på hurtigmenylinjen. Ved hjelp av "scroll bar" kan en la et punkt følge kurven, og på den måten avlese verdier langs x- og y-aksen.



Med knappen MARKER PKT. kan en markere punkter langs grafen. Deretter kan en få fram en liste over de markerte punktene ved å trykke VIS PUNKTER. Ønsker en å forstørre området rundt markøren, klikkes på knappen VIS FORSTØRRET. Disse funksjonene er nyttige ved nøyaktig avlesning av funksjonsverdier.



Matematisk modellering

C.3 Oversikt over spesialfunksjoner

Programmet tilbyr en rekke spesialfunksjoner. Disse er listet opp under. Funksjonene hentes inn i funksjonsvinduet ved å klikke på funksjonen i nedtrekksmenyen:

Trigonometriske funksjoner:

sinx, cosx, tanx: *Sinus, cosinus og tangens til x*

Inverse trigonometriske funksjoner:

asn_x, acs_x, atan_x: *Arcus sinus, arcus cosinus og arcus tangens til x*

Hyperbolske funksjoner:

sinhx, snhx: *hyperbolsk sinus til x*

coshx, cshx: *hyperbolsk cosinus til x*

tanhx, tnhx: *hyperbolsk tangens til x*

Andre funksjoner:

abs(x), |x|: *Absoluttverdien til x*

exp_x, eyp_x, e^x: *Ekspontialfunksjonen*

csn, -: *Endre fortegn*

frac_x, frax: *Brøkdelen av tallet x (for tallet 2,15 vil resultatet bli 0,15)*

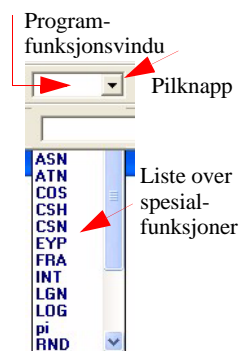
int_x, round_x (rndx), trunc_x (trcx), floor_x: Disse gir alle heltallsdelen av et tall, men har små avvik (sml integer, round og trunc i programmeringsspråket Pascal)

log_x: *Logaritmen til x med grunntall 10*

lnx, lg_x: *Den naturlige logaritmen til x*

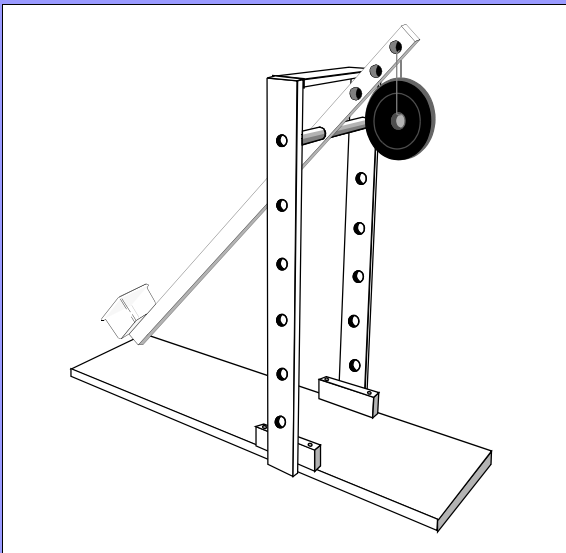
sqrt_x, sq_x: *Kvadratrotten av x*

Listen med funksjoner i programmet kan brukes til hurtiginnskriving av funksjoner i funksjonsvinduet.









Heftet er en samling enkle forsøk som egner seg til matematisk modellering. Noen forsøk er utprøvd flere ganger, andre er ideer som ennå ikke er skikkelig utprøvd.

Det har vært viktig å velge forsøk som både er enkle å gjennomføre, krever lite utstyr, lar seg modellere ved hjelp av relativt enkle matematiske sammenhenger og ikke minst, at det er mulig å etterprøve modellene som utvikles av elevene. Etter endt uttesting er det viktig at en sammen med elevene tar seg tid til både å forstå de ulike modellene som er utviklet og å diskutere forskjeller og likheter mellom dem. Dessuten bør en reflektere over mulige feilkilder.

Meningen er ikke at all undervisning innen dette feltet må være så praktisk som antydnet her, men at elevene minst en gang i løpet av skoleløpet får anledning til å gjennomgå hele prosessen fra begynnelse til slutt. Selv om vi finner temaet matematisk modellering først og fremst i videregående skole, kan en med fordel gjøre lignende forsøk i forbindelse med introduksjon av funksjonsbegrepet tidligere i skoleløpet.

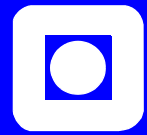
Dette prøvetrykket er fortsatt mangelfullt, men vi vil etter hvert suppleres med forskjellige forslag til forsøk. Selv om de fleste forsøkene er tett knyttet til fysikken, så er det viktig at det under gjennomføringen holdes fokus på de matematiske sidene ved forsøket.

Nils Kr. Rossing

Førstelektor ved Skolelaboratoriet ved NTNU og prosjektleder ved Vitensenteret i Trondheim
E-post: nils.rossing@plu.ntnu.no

Frode Øren

Adjunkt ved Byåsen videregående skole
E-post: frode.oren@stfk.no



Skolelaboratoriet
for matematikk, naturfag
og teknologi