Prøvetrykk 3

Gerd Åsta Bones
Nils Kr. Rossing

Matematikk og terningspill -
Et idéhefte for læreren

NTNU
Trondheim

Program for lærerutdanning

Skolelaboratoriet
for matematikk, naturfag og teknologi

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Oktober 2005

MATEMATIKK OG TERNINGSPILL

Matematikk og terningspill - Et idéhefte for læreren

Trondheim 2005

Layout og redigering: Nils Kr. Rossing

Dette heftet er et samarbeid mellom
Skolelaboratoriet ved NTNU
og Didaktiv AS

Utgivelsen er et samarbeid mellom
Skolelaboratoriet og Matematikksenteret

Faglige spørsmål rettes til:
Skolelaboratoriet for matematikk naturfag og teknologi, NTNU
v/Nils Kr. Rossing, 73 55 11 91
nils.rossing@plu.ntnu.no

Realfagbygget, Høgskoleringen 5
7491 Trondheim

Skolelaboratoriet
Telefon: 73 55 11 42
Telefaks: 73 55 11 40
http://www.skolelab.ntnu.no

Prøvetrykk 3
Rev 4.0 - 5. oktober 2005

Matematikk og terningspill -
Et idéhefte for læreren

Gerd Åsta Bones
Nils Kr. Rossing

Skolelaboratoriet for matematikk, naturfag og teknologi, NTNU

Forord

Hva skjer når du kaster terning i mattetimene?

Kan bruk av terninger gjøre noe med motivasjon, inspirasjon og lysten til å lære?

Vi ønsker med dette heftet å spre ideer til opplegg og aktiviteter som kan være til glede og nytte i matematikkundervisningen. Dersom vi skal bruke terninger i mattetimene bør vi ha et mål og en mening med aktiviteten. Det er derfor viktig å planlegge aktivitetene godt.

Matematikkfaget er i et fag i utvikling. Nye læreplaner og nasjonale prøver legger vekt på en helhetlig undervisning som ivaretar elevenes ulike kompetanser. Mange av oppleggene i heftet inkluderer kommentarer som omhandler dette.

Alle aktivitetene som er beskrevet har tilknytning til terninger. Det er lagt vekt på at aktivitetene skal kreve lite utstyr, vanligvis blyant, papir og terninger av ulike slag.

Vi håper at du vil oppdage terningen som en uutømmelig kilde, en "sareptas krukke", som inspirerer til variasjon og nye innfallsvinkler til ulike tema og emner i matematikken. Det være seg strategisk/logisk tenkning, problemløsing, statistikk og sannsynlighet, overslag og hoderegning, brøk, geometri m.m.

Som en liten appretiff har vi lagt ved byggebeskrivelsen av en elektronisk terning. Disse selges som byggesett ved Skolelaboratoriet ved NTNU og kan bestilles hos Nils Kr. Rossing, Skolelaboratoriet ved NTNU, Høgskoleringen 5, 7491 Trondheim, eller ved å sende en mail til nils.rossing@plu.ntnu.no. Vårt håp er at dette kan være en av flere bindeledd mellom teknologi og matematikk. Vi har også inkludert noen enkle statistikkoppgaver for å utforske den elektroniske terningens egenskaper. Vi har dessuten forsøkt å beskrive virkemåten på en enkel og forståelig måte.

Heftet er utarbeidet i et samarbeid mellom Skolelaboratoriet for matematikk, naturfag og teknologi ved NTNU og Didaktiv AS v/Gerd Åsta Bones. Vi vil også oppmuntre dere som bruker dette hefte til å sende egne ideer til terningspill sammen med egne erfaringer med bruk i undervisningen.

The best throw of the dice, is to throw them away?

Gerd Åsta Bones
Nils Kr. Rossing
Oktober 2005

Innhold

1 Innledning

Terningspill har fascinert mennesker til alle tider helt fra oldtidenog til nå. Det har primært vært mestringen av spillet og konkurransen spillerne i mellom som har fascinert. De fleste terningspill inneholder også elementer av matematikk og praktisk regning. Det er derfor naturlig at terningspill bringes inn i undervisningen i grunnskolen, for å variere undervisningen og trene ulike regnemetoder og logisk tenkning på en motiverende måte. Det er viktig å presisere at terningsspill kommer som et supplement til den ordinære undervisningen. Det er derfor lærerens oppgave å velge ut og legge til rette slik at de enkelte spillene kan inngå som en naturlig del av undervisningen.

Vi har forsøkt å ordne spillene etter hva vi tror passer for de enkelte klassetrinnene, men de fleste spill vil kunne brukes over et stort aldersspenn, da selv enkle spill kan utfordre elever på ulikt nivå på ulike måter. Mange av spillene kan brukes til drill av ferdigheter, trening i hoderegning, automatisering av tallkombinasjoner m.m. Spillene skaper fascinasjon og undring. Elevene får jobbe praktisk, de kan fortelle og samtale, øve på ferdigheter og samarbeide. Mange av spillene vi har valgt ut her er også nivådifferensierende, slik at elevene kan jobbe med samme aktivitet og få utfordring på hvert sitt nivå. Spillene er også valgt ut med tanke på å gi rom for strategitenkning, problemløsing og resonnering. De er billige, lette å håndtere og enkle å forberede. Terninger kan brukes til alle typer oppgaver og med ulike kompetanser som fokus.

De fleste spillene etterfølges av didaktiske kommentarer og forslag til variasjoner av spillet. Det er viktig å bruke spillets muligheter til differensiering. Noen elever blir fortere ferdig med en variant enn andre. Da er det viktig å ha tenkt gjennom ulike varianter som kan gi nye utfordringer eller tilpasses kunnskapsnivå og evnene hos de enkelte elevene. Det er også viktig å stimulere til kommunikasjon elevene imellom. Å "snakke" matematikk fremmer forståelse og evnen til å utrykke problemstillinger og løsninger. Gode og utfordrende spørsmål stimulerer til matematisk tenkning og kommunikasjon.

I Australia har en siden 1975 utviklet et landsomfattende nettverk av matematikksenter, hvor elevene får trening i problemløsning. Elevene arbeider i grupper på to og to og oppmuntres til å bruke den matematiske samtalen aktivt.

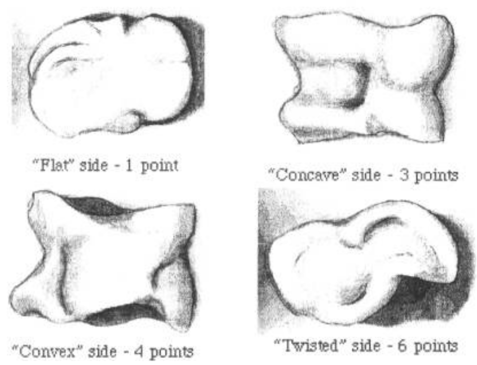
Mens elevene er opptatt med oppgavene i heftet, blir lærer frigjort og kan bruke tida til å observere/registrere arbeidet, gjerne ved å ha noe bestemt å se etter. Noter gjerne det som kan være av interesse for en felles oppsummering i etterkant av økta. Etter at elevene har lagt frem sitt, kan lærer supplere med sine observasjoner.

Det er også vårt håp at elevene vil ta med seg ideene og lysten til å spille hjem, slik at gleden kan deles med andre familiemedlemmer og venner. At det samtidig er en trening i matematisk/logisk tenkning, systematisering og hoderegning burde komme som en ekstra bonus.

2 Terningens historie[1]

Terningens historie er lang og fargerik. I mer enn 2000 år har terningspill fascinert mennesker.

Over hele verden har mennesker spilt ulike terningspill med terninger av svært forskjellig utforming. De kunne bl.a. være laget av fersken-stener, såkorn, horn, leire, hakkespett-tenner og skjell m.m.. Man har funnet “knokkelbein" laget av leire, men utformet som dyrebein. Funnene har stammet fra førhistorisk tid (se figuren til høyre).



Historien forteller også at terninger ble brukt til mer enn bare å spille med. Terningkast ble også brukt til å spå fremtida og til å dele arv. Den sanne oppfinneren av terningen var antagelig en shaman eller heksedoktor, som gjerne brukte terningene til å se inn i framtiden..

Her er en variant av hva terningøynene spår:

Kast terningen en gang, verdien bestemmer betydningen:

1 = Ensomhet/tap

2 = Kjærlighet/gevinst

3 = Hell og lykke, et ønske kan gå i oppfyllelse/en uventet hyggelig ting kommer til å skje

4 = En skuffelse kommer eller en lite hyggelig overraskelse

5 = En fremmed vil bringe lykke eller vise seg som en sann venn

6 = Miste noe av materiell verdi, men få noe av åndelig verdi

Noen hevder at terningen har sin opprinnelse i Romerrike, mens andre hevder at de første terningene stammer fra Midt-Østen og er knyttet til et spill med navnet Azzahr. Noe av det første som er skrevet om terningen er funnet i India for mer enn 2000 år siden. Dagens utforming av terningen kan spores mer enn 900 år tilbake.

Terminologien *"Roll the bones"* er hentet fra romerske soldater som fikk tida til å gå ved å spille terning med griseknokler. Knokkelbein, eller *Astragali*, ble spilt i antikken i Helles og i Roma (*tali* - avlang terning) med regler som kan minne om de vi finner i terningspill. Også i Asia spilte jenter og kvinner et spill

1. Stoffet til dette avsnittet er hentet fra [6] a) og b).

med knokkelbein. Unge jomfruer som ikke var gift, spilte om en ektemann. I Asia har fremdeles ikke den kubiske helt erstattet den rektangulære terningen. Romerne brukte begge deler, både den kubiske *tessare* og den avlange versjonen kalt *tali*.

Her er en variant av et spill hvor terningene er av bein:

> ***Knokkelbein/femsteiner***
>
> *Dette er et gammelt spill med knokkelbein dokumentert i Europa allerede på 1700-tallet. Spillet kan spilles med med 2 eller flere spillere som sitter på gulvet.*
>
> *Hver spiller får etter tur en spillordre. Hvis spilleren ikke klarer å fullføre kastet må de starte forfra igjen.*
>
> *Et eksempel på en spilleordre kan være:*
> *- Hold beina i neven, kast dem i lufta og ta i mot så mange som mulig på håndbaken.*
> *- Kast dem så opp i lufta igjen og ta i mot like mange i neven.*
>
> *Her er et annet eksempel:*
> *- Spre beina på gulvet. Et bein blir tatt opp og kastet opp i lufta.*
> *- Før du tar i mot det, skal du plukke opp et bein til fra gulvet med den samme hånda.*
> *- Overfør ett av beinene til andre hånda, og fortsett til alle beina er plukket opp.*
> *- Fortsett likedan til alle terningene er overført til hånda.*
>
> *Og et tredje:*
> *- Kast fem bein i lufta og ta i mot dem med håndbaken.*
> *- Kast dem så i lufta og ta i mot dem i neven.*
>
> *Hvis du mislykkes, straffes du med å måtte plukke opp beina på en annen måte.*
>
> *Osv.*

John H. Winn har fått æren for å ha opprettet egne hus eller casinoer for terningspill. I en periode på 1800-tallet var det forbudt å spille terningspill i casinoer.

Profesjonelle juksepaver har operert nesten like lenge som det har vært spilt. En falskspiller kunne for eksempel hule ut beina og fylle dem med kvikksølv, slik at de ble liggende med den ønskede siden opp, og dermed den ønskede poengsummen.

Det er heller ikke vanskelig å finne sitater fra kjente personer som refererer til terninger og terningspill. Her er et utvalg[1]:

"Iacta alea est. The dice is cast."

Julius Caesar crossing the Rubicon

"I cannot believe God plays dice with the universe."

Albert Einstein

1. Mange av sitatene er hentet fra [7] a) og b)

"God not only plays dice, he sometimes also throws the dice where they cannot be seen."

Stephen Hawking

"Not only is God playing dice with the universe, he is loading them as well.

John Ford

"We figured the odds as best we could, and then we rolled the dice."

Jimmy Carter

"The best throw of dice is to throw them away.

Advice from an old English proverb.

"Læreren vår kaster terning med matematikk-karakterene."

Elev i ungdomsskolen

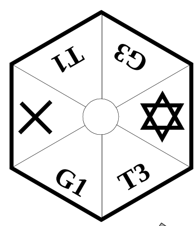
3 Terningspill for småskoletrinnet

3.1 Gi og ta

Mål: Holde rede på antall

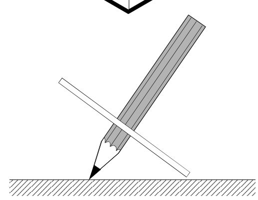
Trinn: 3. - 4. trinn

Utstyr: 1 spinner
10 pinner til hver spiller og 10 i potten



Bakgrunn: Spinneren har f.eks. seks felter. Feltene har følgende betydning:
- T1, spilleren som slår kan ta 1 pinne fra potten
- T3, spilleren som slår kan ta 3 pinne fra potten
- G1, spilleren som slår må gi 1 pinne til potten
- G1, spilleren som slår må gi 3 pinne til potten
- ✡, spilleren som slår kan ta hele potten
- ✕, spilleren som må gi fra seg alle pinnene og har tapt

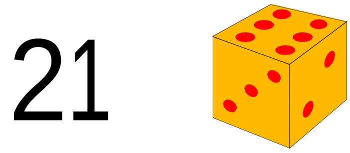
En slik spinner kan elevene selv lage av en papplate og en kort blyant.



Gjør slik: *Spillerne snurrer spinneren etter tur. De tar og gir pinner slik spinneren "befaler". Den siste som sitter igjen med pinner har vunnet spillet.*

Kommentar: Dette spillet kan varieres ved å lage ulike spinnere. F.eks. kan antallet felter varieres.

3.2 Først til 21 - med en terning



Mål: Trene pluss og minus

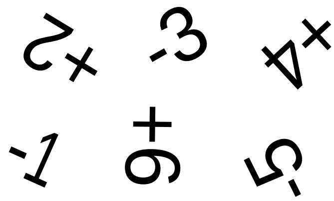
Trinn: 3. - 4. trinn

Utstyr: 1 terning
papir og blyant til hver spiller

Bakgrunn: Det må minst være 2 deltagere

Gjør slik: *Deltagerne kaster terningen etter tur. Hver enkelt skriver ned poengsummen for hvert slag slik at de husker hvor langt de er kommet. F.eks. 5 + 4 = 9, 9+ 3 = 12 osv. Hvis de passerer 21, må de trekke fra neste gang og slik holder de på til de får akkurat 21. I blant kan en holde på lenge før det blir akkurat 21.*

3.3 Like - pluss, ulike minus



Mål: Trene pluss og minus, like og ulike tall, fortegn

Trinn: 3. - 4. trinn

Utstyr: Utstyr 6 terninger
papir og blyant

Bakgrunn: Det må være minst 2 deltagere

Gjør slik: *Slå alle terningene på en gang. Alle like antall øyne er pluss-tall, alle ulike er minus-tall. Regn ut poengsummen etter hvert kast. Den som har høyest poengsum vinner runden.*

Kommentar: Deltagerne bestemmer selv hvor mange runder de skal spille. Antall runder bestemmes på forhånd.

Dersom det spilles med partall og oddetall, hva er da mest sannsynlig - å lande på pluss eller minus?

Variasjon: En variant kan være å la alle like tall ha verdien 3.

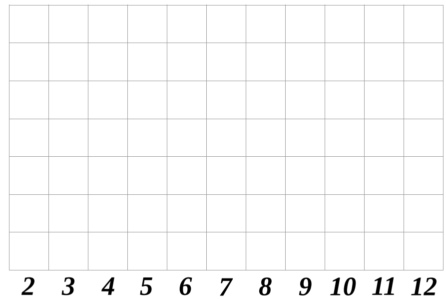
3.4 Terningkunst, statistikk og sannsynlighet

Mål: Sannsynlighet, fordelingsfunksjon

Trinn: 2. - 4. trinn

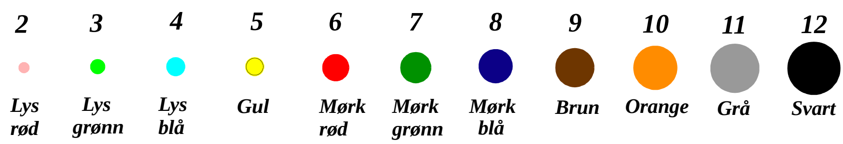
Utstyr: 2 terninger pr. deltager
12 fargeblyanter pr. 4 deltagere
Prikkark eller ruteark
Vannmaling - en farge
Sugerør

Grafisk framstilling



Bakgrunn: Gjennomgå oppgaven med elevene. Utfordre elevene til å gjette hvilken farge det blir mest av.

Gjør slik: *Start med å lage en oversikt over hvilken verdi som har hvilken farge.*
Verdien 1 - som er en liten prikk - kan f.eks. ha fargen lyserød,
verdien 2 - som er en litt større prikk - kan ha fargen lysegrønn osv. som vist under.



Slå de to terningene og legg sammen verdiene. Lag en prikk i rutesystemet som tilsvarer verdi og farge i følge oversikten. Dette skal gjøres hundre ganger.

Tell opp antall prikker pr. farge. Legg til slutt sammen resultatet fra hele klassen.

Hvilken farge ble det flest av? Hvilket tall tilsvarer dette?

Kommentar: Lag en statistisk fremstilling i form av et søylediagram for hver farge.
Samtal til slutt om hvorfor resultatet ble som det ble.
Bruk sugerør og vannmaling og blås ut over bildet.
Monter bildene på papp og heng opp sammen med den grafiske fremstillingen.

4 Terningspill for mellomtrinnet

4.1 De fire regneartene

Mål: Trener pluss- og minus-regning

Trinn: 3. - 6. trinn

Utstyr: Papir og blyant og en terning

Bakgrunn: Hver deltager lager følgende skjema:

$$(\boxed{} + \boxed{} - \boxed{}) \cdot \boxed{} / \boxed{} = \boxed{}$$

Grunnlag Resultatet

Det er om å gjøre å oppnå størst mulig resultat.

Spilleregler: *Det spilles med fem terninger. Ved første kast tas en av terningene ut, og verdien til øynene på denne noteres i den første rubrikken, grunnlaget. I neste kast benyttes bare fire terninger. Etter at de fire terningene, er kastet, velges en av terningene og verdien noteres på ønsket plass. Dernest kastes bare tre terninger. Igjen plukkes en terning ut, og verdien noteres på en av de gjenværende, ledige plassene. Etter fem kast er det ikke flere terninger igjen, og alle rubrikkene er fylt ut. Det er nå viktig å ha valgt de gunstigste verdiene plassert på de beste plassene i "regnestykket", slik at resultatet blir størst mulig. Den høyeste summen som kan oppnås er vist under:*

$$(\boxed{6} + \boxed{6} - \boxed{1}) \cdot \boxed{6} / \boxed{1} = \boxed{66}$$

Variasjon: Om en vil, kan en arrangere flere etterfølgende runder, for først å komme til en på forhånd bestemt sum.

4.2 Slå to slag[1]

Mål: Pluss og minus

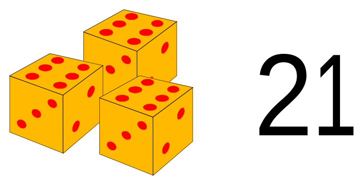
Trinn: 3. - 5. trinn

Utstyr: 6 terninger, papir og blyant

Bakgrunn: Spillet krever minst to deltagere

Gjør slik: *Den første deltageren kaster alle terningene og finner summen av øynene. Den samme deltageren kaster de 6 terningen en gang til og finner summen. Deretter trekkes den minste summen fra den største. Differansen er poengsummen deltageren har igjen etter første runde. Så går terningene til neste mann som gjør det samme osv. Etter tre runder summerer hver deltager sine tre differanser. Den som får størst resultat har vunnet.*

4.3 Først til 21 - med tre terninger



Mål: Trene pluss og minus, gange og dele

Trinn: 5. - 7. trinn

Utstyr: 3 terning (eller flere)
papir og blyant til hver spiller

Bakgrunn: Det må minst være 2 deltagere

Gjør slik: *Deltagerne kaster terningene etter tur. Skriv ned verdiene på de tre terningene. Ved å bruke alle fire regnearter skal de forsøke å komme nærmest 21. Den som kommer nærmest har vunnet omgangen og får høyest poengsum. Om fire spiller får den som kommer nærmest 4 poeng, den som kommer nest nærmest 3 osv. den som etter fem omganger har fått høyest poengsum har vunnet spillet.*

Kommentar: Elevene kan selv bestemme reglene og vanskelighetsgrad ut fra sitt nivå. De kan også bestemme hvor mange omganger de skal spille før vinneren kåres. De kan også velge å bruke flere terninger.

4.4 Den endeløse landevei

Mål: Trener pluss- og minus-regning

Trinn: 3. - 6. trinn

Utstyr: Papir og blyant og en terning

1. Bildet er hentet fra: http://www.montecarlonight.com/equipment/photos/10-flvDICE.jpg

Spilleregler: *Spillet spilles med <u>tre</u> terninger. Hver deltager lager seg en tallrekke som vist under.Deltagerne kaster de tre treningene etter tur.*

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 12 - 11 - 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1

Hver deltager skal stryke tallene fra venstre mot høyre i rekkefølge, etter som terningkastene gir mulighet til det.

Det første kastet som gjør at en kan komme i gang må inneholde 1. La oss si at det første kastet er 1, 2 og 5. Det betyr at tallene 1, 2 og 3 (1+2) kan strykes, men ikke 5 da 4 ennå ikke er strøket. I neste kastfår spilleren resultatet: 1, 2 og 4. Han kan da stryke 4, 5 (4 + 1), 6 (4 + 2) og 7 (4+2+1). Det er altså tillatt å summere to eller tre av tallene. Det beste åpningskastet er da 1, 2 og 4. Da kan tallene fra 1 til 7 (1+2+4) strykes.

Den som først har strøket alle tallene opp til 12 og ned til 1 igjen, har vunnet.

Variasjon: Hva skjer dersom vi øker det høyeste tallet tallrekka? Hvor høyt kan vi gå?

4.5 Terning spillet 10 000

Mål: Summasjon av store tall

Trinn: Trinn:5 - 7. trinn

Utstyr: 6 terninger, papir og blyant

Bakgrunn: Spillet må ha minst 2 deltagere.

Spilleregler: *For å kunne komme i gang må en ha over 500 poeng. Forøvrig gis poengene som vist i ruten til høyre.*
Hver deltager får et kast i hver runde. Alle seks terninger kastes samtidig. Den som kommer først til 10 000 har vunnet.

Kommentar: Reglene for dette sillet kan forenkles og tilpasses barans alder og nivå.

1x1=100	1x2=0	1x3=0
2x1=200	2x2=0	2x3=0
3x1=1000	3x2=200	3x3=300
4x1=2000	4x2=400	4x3=600
5x1=4000	5x2=800	5x3=1200
6x1=8000	6x2=1600	6x3=2400
1x4=0	1x5=50	1x6=0
2x4=0	2x5=100	2x6=0
3x4=400	3x5=500	3x6=600
4x4=800	4x5=1000	4x6=1200
5x4=1600	5x5=2000	5x6=2400
6x4=3200	6x5=4000	6x4=4800

1+2+3+4+5+6=1500

Tre par=1000

4.6 HAZARD

Mål: Enkel statistikk og gjennomsnitt

Trinn: 4. - 7. trinnet

Utstyr: 2 terninger
10 pinner til hver spiller pluss 20 til banken.
Spillebrett med 6 felt, ett for hvert tall på terningen (se figuren under til høyre).

Bakgrunn: Spillet spilles av 4 - 6 deltagere

1
2
3
4
5
6

Spilleregler: *En av spillerne er bank. De andre spillerne får 10 pinner hver. Også banken må ha noen pnner.*

Spillerne satser så mange pinner de vil, på så mange forskjellige felt de ønsker. Ingen spillere kan satse på samme felt. Satser en 3 pinner på 2, leggeren 2 pinner i ruta som er merket 2.

Banken kaster de to terningene.

Dersom ***en*** *av terningene viser det tallet spilleren satset på, får han igjen* ***to pinner*** *for hver pinne han satset. Viser begge terningene samme tall får spilleren (som har satset på riktig tall)* ***tre pinner*** *for hver pinne han satset.*

Pinnene som ligger i de andre feltene går til banken.

Etter en stund oppdager spillerne at banken vinner. Spør hvorfor dette skjer. La elevene diskutere hvorfor, før de ev. får presentert løsningen.

Deretter kan de spille med litt endrede regler:

Om en av terningene viser tallet spilleren satset på, får han igjen ***tre pinner*** *for hver pinne han satset. Viser begge terningene samme tall får spilleren (som har satset riktig)* ***fire pinner*** *for hver pinne han satset.*

Det viser seg fortsatt at banken vinner i det lange løp. Hvorfor vinner banken?

Kommentar: Tenk deg at det satses en pinne på et fast tall. To terninger kan gi 36 ulike resultat. Et av disse gir 2 pinner i gevinst, 10 resultat gir 1 pinne i gevinst og 25 gir 1 pinne i tap.

I gjennomsnitt vil 36 runder gi spilleren en gevinst på 12 pinner og et tap på 25, til sammen taper altså spilleren 13 pinner i løpet av 36 runder.

Dobles gevinsten vil det gjennomsnittlige resultatet etter 36 runder gi 25 i tap og 24 i gevinst, til sammen et tap på 1. Vi ser at banken fortsatt vinner i lengden.

4.7 Nærmest 1000

Mål: Trener posisjonssystemet, logisk tenkning og summering av tall

Trinn: 5. - 7. trinn (ev. også ungdomskole)

Utstyr: Blyant, papir og en terning

Bakgrunn: Spillet forberedes ved at deltagerne tegner et kvadratisk brett med 9 ruter (3x3)

Oppgaven går ut på at fylle inn tall (1 - 6) i de 9 rutene slik at når de tresifrede tallene i de tre kolonnene summeres, så skal summen være nærmest mulig 1000. Tallene 1 - 6 fylles inn på bakgrunn av terningkast.

Brett

Spilleregler: Deltagerne sitter rundt et bord med hvert sitt brett. De kaster terningen etter tur. Etter hvert kast fyller alle deltagerne resultatet inn i en av rutene i kvadratet sitt slik de mener det er mest fornuftig for at totalsummen skal komme nærmest mulig tallet 1000. Etter at alle 9 tallene er fylt inn, regnes sammen og vinneren kåres.

Variasjon: En variant er at en venter med å fylle inn tallene til alle 9 kastene er utført. Denne varianten gir større risiko for at flere får samme resultat, men resultatene vil bli bedre.

Eksempel: Resultatet etter 9 kast er *2, 5, 3, 4, 5, 3, 2, 4* og *3.* Tallene fylles inn fortløpene i rutene eller alle fylles inn til slutt.

2	3	3	= 233
5	4	4	= 544
2	5	3	= 253
			= 1030

2	3	4	= 234
5	3	4	= 534
2	3	5	= 235
			= 1003

Kvadratet til venstre er fylt inn fortløpende etter som tallene kom. Totalsummen ble 1030. Kvadratet til høyre er fylt inn etter at alle tallene var kjent. Vi ser at resultatet (1003) ble langt bedre fordi det var mulig å flytte rundt på tallene slik at den optimale løsningen ble oppnådd. Er det mulig å komme enda nærmere?

Variasjon: Andre varianter er:
- Varier totalsummen. Hva med å prøve 1500?
- Øk antall ruter til f.eks. 4x4. Hva bør nå velges som totalsum?
- Gi pluss 100 i “straffegebyr” dersom 1000 passeres
- Summer både rader og kolonner og velg tallene slik at radene kommer nærmest 1000, mens kolonnene gir det høyeste resultatet.

En liten undersøkelse til slutt.
Det forutsettes at alle elevene i en gruppe bruker de samme tallene.
Gjør følgende undersøkelse:
- Hvor mange kommer fram til samme sum når tallene fylles inn etter hvert?
- Hvor mange kommer fram til samme sum når tallene fylles inn til slutt?
Er det noen forskjell på antall sammenfallende tall i disse to tilfellene?

Kommentar: En liten utfordring til de flinkeste. Finne ut hvor mange forskjellige totalsummer det er mulig å få dersom en tillater alle mulige terningkombinasjoner.

Et overslag gir 1666. En kan tenke slik:
Det lavest mulige tallet er 3x111=333 og det høyeste 3x666=1998. Mange vil så mene at det er tall imellom som ikke kan nås fordi ikke alle siffer er tilgjengelig. En undersøkelse viser imidlertid at de hullene som oppstår pga. av at ett av de tresifrede tallene har hull, vil fylles opp av de andre.

En kan også merke seg at sannsynligheten for å få de ulike summene er forskjellig. Sannsynligheten for å få enten laveste eller høyeste tall er meget lav.

Det er en stor utfordring å finne ut hvor mange mulige summer som finnes ved et bestemt resultat av terningkast. Det enkleste er sannsynligvis å bruke en datamaskin som genererer store menger slumpmessige tall (1 -6) og samler opp resultene, for så å tegne ut de forholdsmessige resultatene.

4.8 Fordelingsfunksjonen for kast med en terning

Mål: Fylle begrepet *fordelingsfunksjon* med mening.

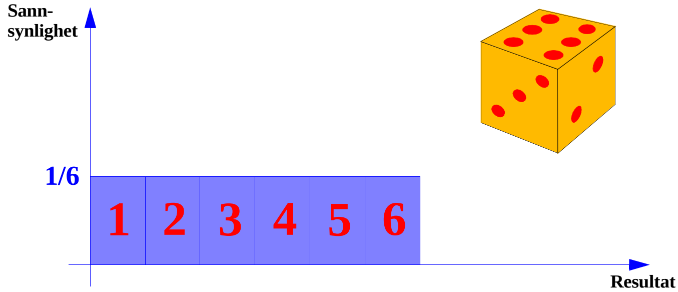
Trinn: 5. - 7. trinn

Utstyr: En terning til hver gruppe

Bakgrunn: De fleste elevene på mellomtrinnet vil ha en rimelig forståelse av at sjansen for å få en 1'er er like stor som for å få en 6'er når en terning kastes. Likevel vil de kunne oppleve at om de kaster 100 eller 200 ganger så vil fordelingen mellom de seks verdiene kunne avvike i betydelig grad (se vedlegg A). La dem tenke gjennom hva dette skyldes. Hva skjer med den registrerte fordelingsfunksjonen dersom en kaster svært mange ganger?

Oppgave: Dersom dere kaster tærningen mange ganger, hvilken verdi vil det være størst sjanse for å få? Kast terningen 200 ganger og tell sammen hvor mange av hver verdi dere får. Hvorfor får dere ikke akkurat like mange kast av hver verdi?

Kommentar: Det er viktig å stimulere elevene til å tenke gjennom og formulere et svar på spørsmålet om hvorfor det ikke er like mange av hver av de seks verdiene. Dette viser noe om naturen til slumpmessige utfall og bruken av sannsynlighet. Hva forteller egentlig fordelingskurven på figuren over?



Den angir sjansen (sannsynligheten) for å få hver av de seks verdiene. Sjansen for å få hver av de seks verdiene er like stor. For at den målte fordelingsfunksjonen skal bli like flat må vi i praksis foreta uendelig mange kast. Jo flere kast vi tar med i målingen jo nærmere kommer vi den ideelle fordelingsfunksjonen.

4.9 Fordelingsfunksjonen for kast med to terninger

Mål: Fylle begrepet *fordelingsfunksjon* med mening.

Trinn: 5. - 7. trinn

Utstyr: To terninger til hver gruppe, papir og blyant

Bakgrunn: Denne oppgaven er en naturlig videreføring av oppgaven i avsnitt 4.8. I denne oppgaven er utfallsrommet større. La elevene tenke gjennom hvordan utfallsrommet vil se ut. La dem sette opp en tabell og anslå eller beregne sannsynligheter.

Oppgave: Dersom dere kaster to terninger og legger sammen verdiene på øyene, vil noen verdier inntreffe oftere enn andre. Hvilken verdi ville dere ha valgt om dere skulle gjettet på en verdi?

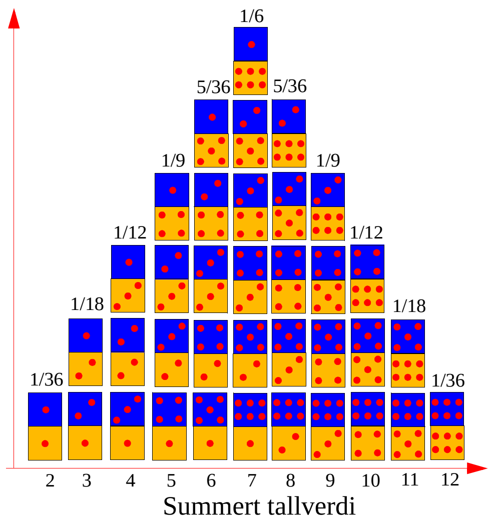
Kommentar: Når vi kaster to terninger vil summen av verdiene falle mellom 2 og 12. Dette kan vi kalle utfallsrommet. Verdien 2 får vi kun når begge terningene har verdien 1. Verdien tre derimot kan vi få dersom den ene terningen får verdien 1 og den andre verdien 2. Men det omvendte er også mulig. Dermed er det to forskjellige utfall som gir samme verdi og sannsynligheten for å få verdien 3 er derfor større en sannsynligheten for å få verdien 2.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

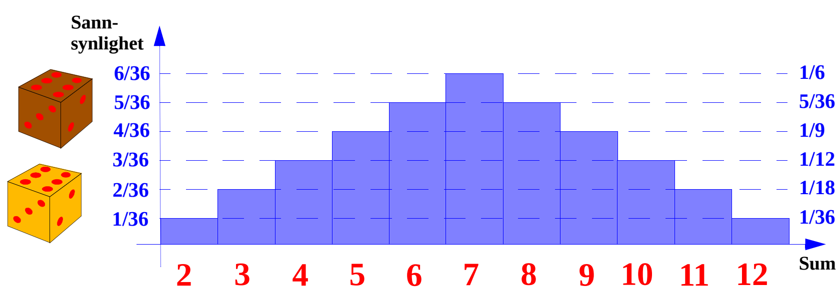
Utfallsrommet

Tilsammen kan terningene kombineres på 36 forskjellige måter. Men ikke alle gir forskjellig tallverdi. På figuren til høyre har vi vist utfallsrommet for summen av verdiene til to terninger.

Vi kan da lage oss et slags stolpediagram som viser dette.



Av figuren ser vi at verdien 7 er den mest sannsynlige, og den verdien en bør satse på dersom en skal gjette på et resultat. I gjennomsnitt gir hvert 6. kast en 7'er. Deretter faller sannsynligheten med fallende og økende verdier. En mer riktig gjengivelse er gjort i figuren under.



Oppgave: *Hvordan vil situasjonen være om vi kaster 3 terninger? Hvilken eller hvilke verdier vil det da være lurt å satse på?*

Oppgave: *Hvordan vil fordelingsfunksjonen se ut dersom vi tar produktet av terningene istedet for summen?*

5 Terningspill for ungdomstrinnet

5.1 Til topps

Mål: Trener pluss- og minus-regning

Trinn: 7. - 10. trinn

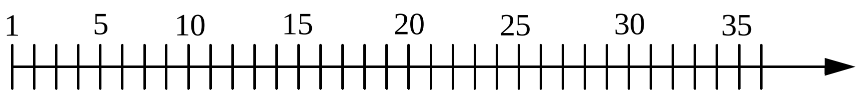
Utstyr: Papir og blyant og fem terninger

Spilleregler: *Spillet kan spilles av to til fem deltagere, eller to til fem lag. Deltagerne skal oppnå alle verdiene langs tallinjen ved å lage pluss- og minusstykker av terningenens verdier.*

La oss anta at en spiller får følgende verdier: 5, 3, 5, 4, 4. Han kan da danne følgende verdier på tallinja:

1 = 5 - 4	*7 = 3 + 4*	*13 = 5 + 5 + 3*	*19 = umulig*
2 = 5 - 3	*8 = 4 + 4*	*14 = 5 + 5 + 4*	*20 = umulig*
3 = 3	*9 = 4 + 5*	*15 = 5 + 5 + 4 + 4 - 3*	*21 = 3 + 4 + 4 + 5 + 5*
4 = 4	*10 = 5 + 5*	*16 = 3 + 4 + 4 + 4*	
5 = 5	*11 = 5 + 5 + 4 - 3*	*17 = 5 + 5 + 4 + 3*	
6 = umulig	*12 = 3 + 4 + 5*	*18 = 5 + 5 + 4 + 4*	

Han kan imidlertid ikke gå videre til neste tall på tallinja, før han har klart å oppnå alle foregående. Han kan heller ikke bruke terningene på nytt. Om eksemplet over var spillerens første kast, kan han bare danne 1 = 5 - 4 og 2 = 5 - 3. Den siste verdien (4) får han ikke brukt, siden han først må få verdien 3.



De fem terningene går så videre til neste deltager eller lag.

Den har vunnet som kommer først til 30.

Kommentar: Alle bør skrive ned regnestykkene som ligger bak hvert tall fra 15 og oppover. Slik blir det mulig å rekonstruere regnestykkene i etterkant.

Dette er en fin anledning til å gå fra det uformelle til det formelle (skriftliggjøring). Dessuten gir det en gyllen anledning til å komme inn på styrende fortegn og parenteser.

La elevene spille i 5 minutter. Stopp opp en stund og gjennomgå hvilket tall de ulike gruppene har kommet til. Det er sannsynlig at utvalget av tall er stort. Diskuter i så fall hvorfor.

Be dem gjerne lese opp hvilke terningverdier de startet med. Skriv de ulike kombinasjonene opp på en flippover.

Variasjon: Spillet kan også spilles med lag. To spillere pr. lag er passende. Spillerne kan hjelpe hverandre og diskutere seg fram til de beste løsningene.

Spillet kan varieres ved å:
1) bruke terninger med flere sider
2) bruke flere eller færre terninger
3) tillate multiplikasjon og divisjon når den gir heltalls resultat

Utfordre elevene til på forhånd å tenke gjennom hvilke konsekvenser det har for spillet at de inkluderer flere eller færre terninger. I ettertid kan de vurdre sine egne antakelser.

5.2 BRØK-KAMPEN

Mål: Trene brøkregning

Trinn: 7. - 10. trinn

Utstyr: Brøkterninger eller 2 terninger i forskjellig farge til hver spiller.

Bakgrunn: Antall spillere: 2
Spilles det med to terninger av ulik farge, må spillerne bli enige om hvilken farge som er teller og hvilken som er nevner.

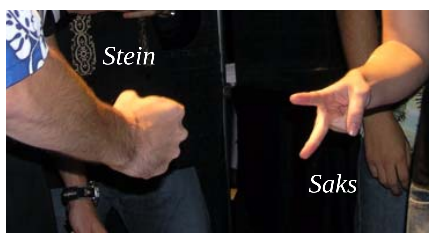
Brøkterninger

Spilleregler: *Begge spillerne kaster terningene sine og skriver opp brøken de får.*

Eksempel: Rød terninger er teller og gul nevner; den røde lander på 1 og den gule på 4. Spilleren får brøken ¼.

Deretter spiller deltagerne "Stein-saks-papir" for å bestemme regnetegnet foran neste brøk.

Stein-saks-papir spilles slik:
Stein er knyttet hånd, saks er to utstrakte fingre og papir alle fingrene utstrakt. Stein slår saks, saks slår papir og papir slår stein. Spillerne rister en hånd hver i luften tre ganger. Samtidig sier de: "Stein - saks - papir". Idet de sier papir viser de det tegnet de velger og vinneren kåres. Den som vinner "Stein - saks - papir" skriver + bak brøken sin, den andre - (minus).



Terningene kastes på ny. Den nye brøken skrives bak regnetegnet. Ny runde "Stein - saks - papir" gir nytt regnetegn. Slik fortsetter det til spillerne har 6 brøker med regnetegn mellom. Deretter regner spillerne ut det brøk-stykket de har. Den som får høyest verdi vinner.

Variasjon: Spillet kan varieres på ulike måter. Her er noen forslag:
- øk antall runder
- vinneren er den som får lavest svar
- bruk flersidige terninger
- den som vinner "Stein-saks-papir" avgjør hvilket regnetegn begge skal ha

5.3 Fordelingsfunksjonen for kast med tre terninger

Mål: Fylle begrepet *fordelingsfunksjon* med mening.
Registrere og samle inn data, tegne histogrammer.

Trinn: 5. - 9. trinn

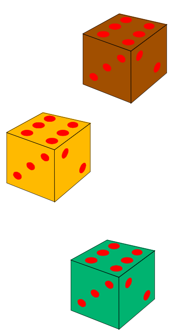
Utstyr: Tre terninger til hver gruppe

Bakgrunn: Denne oppgaven er en naturlig videreføring av oppgaven i avsnitt 4.9. I denne oppgaven er utfallsrommet vesentlig større enn ved bruk av to terninger. La elevene tenke gjennom hvordan utfallsrommet vil se ut. De kan sette opp tabeller og estimere sannsynligheter.

Oppgave: *Hvilken verdi (eller verdier) er mest sannsynlig når dere summerer verdiene fra tre terninger? Sett opp tabeller over utfallsrommet og forsøk å tegn fordelingsfunksjonen? Utfør terningkast og se om det er overenstemmelse mellom forventet verdi og målt verdi. Forklar ev. forskjeller.*

Hvordan endrer den målte fordelingsfunksjonen seg med økende antall kast?

Kommentar: Kast med tre terninger gir et utfallsrommet som vist på figuren under.



1	1	2	3	4	5	6
1	3	4	5	6	7	8
2	4	5	6	7	8	9
3	5	6	7	8	9	10
4	6	7	8	9	10	11
5	7	8	9	10	11	12
6	8	9	10	11	12	13

3	1	2	3	4	5	6
1	5	6	7	8	9	10
2	6	7	8	9	10	11
3	7	8	9	10	11	12
4	8	9	10	11	12	13
5	9	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

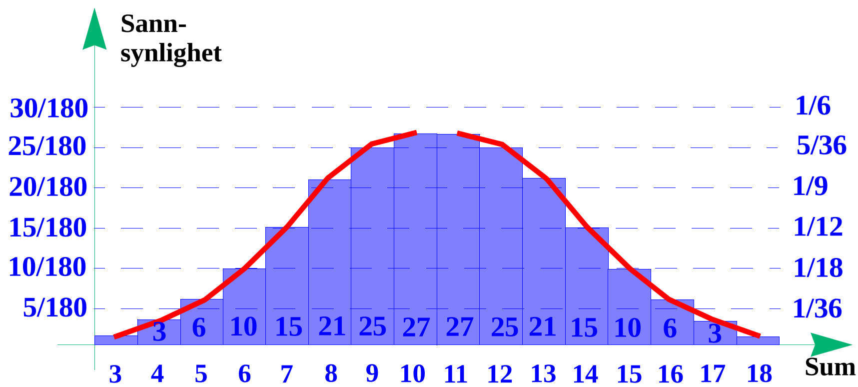
5	1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	10	11	12
2	8	9	10	11	12	13
3	9	10	11	12	13	14
4	10	11	12	13	14	15
5	11	12	13	14	15	16
6	12	13	14	15	16	17

2	1	2	3	4	5	6
1	4	5	6	7	8	9
2	5	6	7	8	9	10
3	6	7	8	9	10	11
4	7	8	9	10	11	12
5	8	9	10	11	12	13
6	9	10	11	12	13	14

4	1	2	3	4	5	6
1	6	7	8	9	10	11
2	7	8	9	10	11	12
3	8	9	10	11	12	13
4	9	10	11	12	13	14
5	10	11	12	13	14	15
6	11	12	13	14	15	16

6	1	2	3	4	5	6
1	8	9	10	11	12	13
2	9	10	11	12	13	14
3	10	11	12	13	14	15
4	11	12	13	14	15	16
5	12	13	14	15	16	17
6	13	14	15	16	17	18

Tallet i øverste venstre hjørne av hver av de seks tabellene angir verdien til terning **1**. Hver rad angir verdien til terning **2** og hver kolonnen verdien av terning **3**. Summerer vi opp antallet ulike kombinasjoner som gir hver av verdiene mellom 3 - 18, kan vi sette opp følgende forventede fordelingsfunksjon.



Vi ser av fordelingsfunksjonen at verdiene 10 og 11 forekommer hppigst, hver med en sannsynlighet på 27/180 (5/36). Dvs. at av 180 kast vil i gjennomsnitt 27 gi en 10'er. Det samme gjelder verdien 11. Sannsynligheten for å få disse verdiene er bare litt lavere enn sannsynligheten for å få verdien sju når vi kaster med to terninger.

Oppgave: *Hvordan vil fordelingsfunksjonen se ut dersom vi tar produktet av terningene istedet for summen?*

6 Terningens geometri

I dette avsnittet skal vi se på oppgaver knyttet til geometrien til terningen.

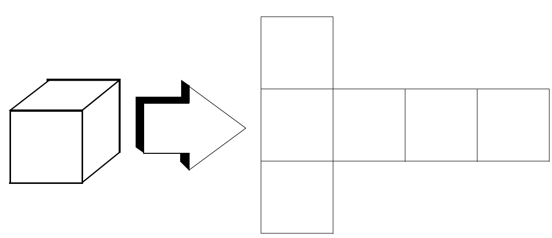
6.1 Sideflatene i en terning

Mål: Trener opp evnen til å tenke romlig.

Trinn: 8. - 10. trinn

Utstyr: Papir og blyant
Ev. papirterninger

Bakgrunn: En terning har seks sideflater og tolv kanter. Vi antar at terningen er laget av tynn papp.



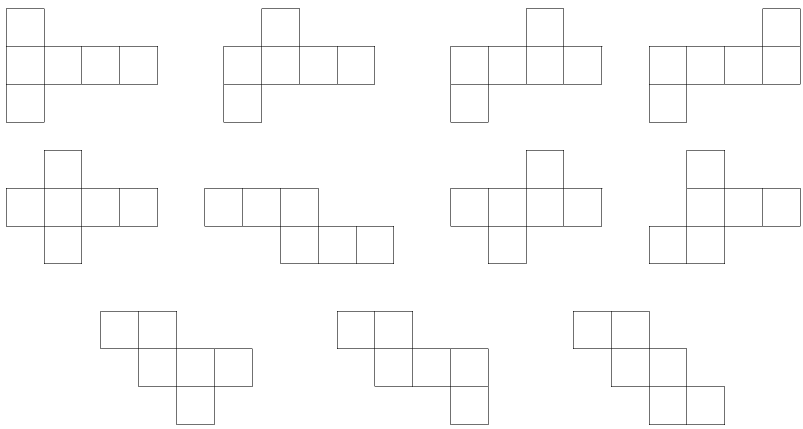
Dersom vi klipper opp noen av kantene, kan vi brette ut terningen slik at den blir flat. Figuren til høyre viser hvordan resultatet kan se ut.

Vi ser at for å få brettet ut terningen, som vist på figuren, må vi klippe eller skjære opp sju av de tolv kantene.

Men dette er ikke den eneste måten vi kan skjære opp kantene i en terning på for å kunne legge den flatt. Det finnes mange flere.

Oppgave: *La elevene finne ut hvor mange forskjellige måter de kan klippe opp kantene i en terning på, slik at den utbrettede terningen kan legges flatt på bordet? Alle sideflatene skal henge sammen med minst én nabosideflate. Dessuten regnes to symmetriske figurer som en. La dem bruke modeller, eller forsøke å resonnere eller tenke seg til resultatet før de prøver.*

Kommentar: Med litt prøving og feiling finner de ut at det i alt finnes elleve mulige måter å klippe opp en terning på, slik at den kan brettes ut til en sammenhengende flate.



Det finnes imidlertid langt flere måter å sette sammen seks kvadrater på, men disse kan ikke brettes sammen til en terning.

Nå er neste oppgave ganske lett:

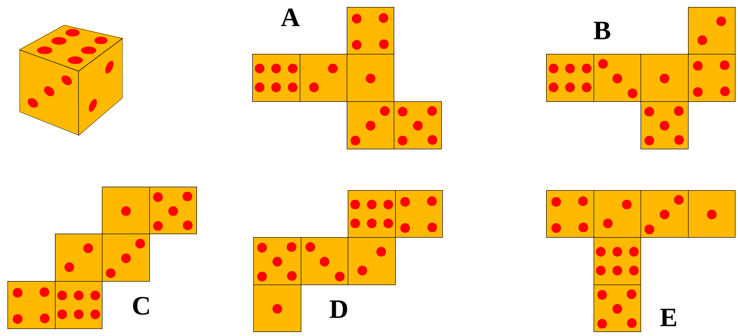
Oppgave: *Hva er det færreste antall kanter vi må klippe opp, for at vi skal klare å brette terningen helt ut? Alle sideflatene skal henge sammen med minst én nabosideflate.*

Kommentar: Dersom vi studerer figuren over, vil vi se at alle formene har fem sammenfallende kanter i utbrettet tilstand. Det betyr at vi alltid må kutte opp sju av de tolv kantene, for at vi skal kunne brette ut en terning.

Oppgave: *Det finnes mange flere måter å sette sammen seks kvadrater på enn de elleve vi har skissert over. Finn ut hvor mange måter det er mulig sette sammen 6 kvadrater på under forutsetning av at alle kvadrater skal ha minst én felles side med minst ett annet kvadrat? Symmetriske figurer regnes som samme figur.*

På figuren under ser vi fem utbrettede spilleterninger, og oppgaven lyder ganske enkelt:

Oppgave: *Hvilken av de fem figurene under (A - E) kan brettes sammen til en korrekt spilleterning? Da skal også tallene stå riktig plassert på terningen.*



Et godt tips er først å studere en vanlig spilleterning meget grundig.[1]

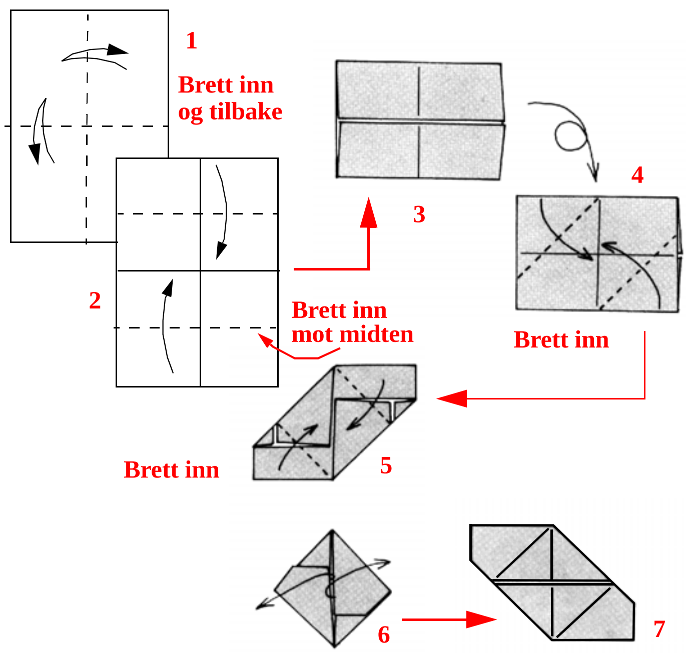
6.2 Bretting av terninger

Mål: Trener opp evnen til å tenke romlig.

Trinn: 8. - 10. trinn, Vg1

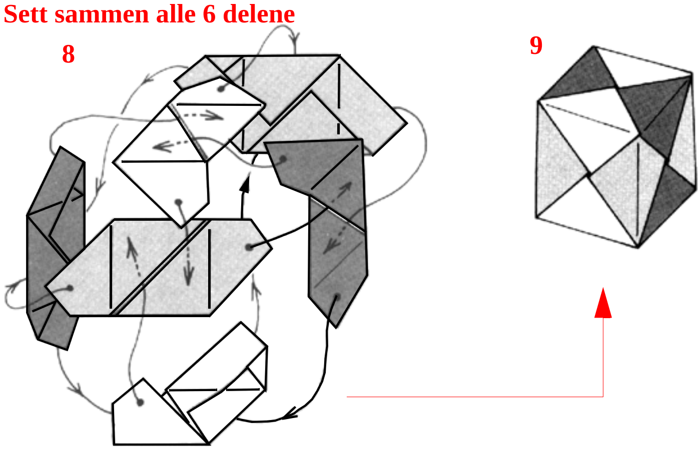
Utstyr: 6 A4-ark og/eller 6 A5-ark

Oppgave: *Kuben brettes av 6 A4 ark. Alle arkene brettes likt.*



1. Oppgaven er hentet fra Aftenpostens IQ-tester. Riktig svar er D

Sett sammen alle 6 delene



Variasjon: Tilleggsoppgaver kan være:
- Hva er forholdet mellom overflaten for en terning brettet med A4 og A5-ark?
- Hva er forholdet medllom volumet for en terning brettet med A4 og A5-ark?

Løsningen på disse to oppgavene finnes i vedlegg B.1.

6.3 Dypping av terning i såpevann

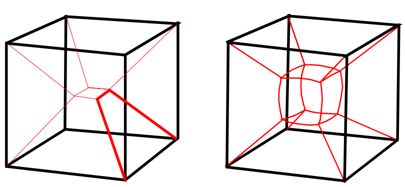
Mål: Trener opp evnen til å tenke romlig.
Se tverrfaglige sammenhenger
Skape fascinasjon

Trinn: 5. - 10. trinn

Utstyr: Terningformede rammer laget av messing tråd
Såpeblanding

Bakgrunn: Hva skjer egentlig dersom vi dypper en messingtrådterning i såpevann?
La elevene fabulere over hva resultatet blir . La dem begrunne teoriene sine.

Oppgave: *Sørg for å fjern såpeskum som ligger på overflata.*
Dypp trådterningen i såpevannet.
Studer resultatet, ble det slik de hadde tenkt?
Dypp flere ganger, blir formen den samme hver gang?



Kommentar: Det er ikke bare trådterninger som kan dypes i såpevann. Prøv med andre former. Ideer til andre rammer finnes i *"Den matematiske krydderhylle"*.

6.4 Platonske legemer brukt som "terninger"

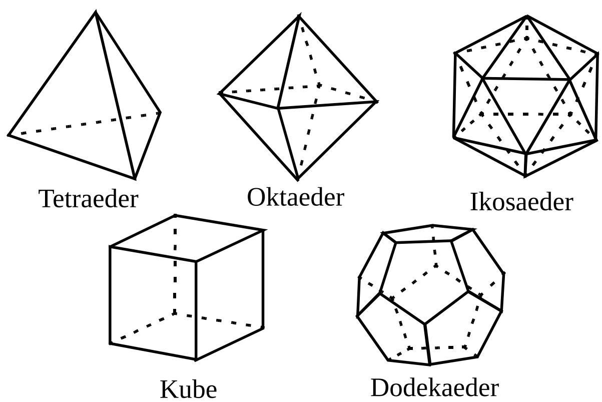
De platonske legemene har alltid fascinert mennesker. Disse oppfattes som noe av det mest fullkomne av alle konvekse legemer (som buer utover). Kravene til de platonske legemene er så strenge at det kun er fem legemer som oppfyller kravene. Disse er:

- *Tetraederet* som består av 4 likesidete trekanter.
- *Kuben eller heksaederet* som består av 6 kvadrater.[1]
- *Oktaederet* som består av 8 likesidete trekanter.
- *Dodekaederet* som består av 12 regulære femkanter
- *Ikosaederet* som består av i alt 20 likesidete trekanter

Om et legeme skal kunne kalles platonsk må følgende være oppfylt:

- *Alle flatene er kongruente (likedannede og like store)*
- *Alle flatene er regulære (alle sider og vinkler i mangekantene er like).*
- *Alle flater møtes med samme vinkel*

Figuren under viser de fem platonske legemene.



Platon lot **tetraederet** bli assosiert med *ilden*. Det er også fra denne sammenhengen vi har fått navnet pyramide, siden det greske ordet for ild er *pyros*. **Ikosaederet** forbandt han med *vannet*. Vannet er det elementet som er nærmest knyttet til alt levende. Det er da også i naturen vi som oftest finner igjen legemer med lignende former. **Kuben** (eller terningen) assosierte han med *jorda*. Verdens mest kjente kube er Islams hellige Kaba i Mekka. **Oktaederet** relaterte han til *lufta*. Vi finner igjen oktaederet i mange krystallformer i naturen.

1. Vi har imidlertid valgt å bruke kuben i fortsetningen, da ordet kube blir brukt i mange sammenstillinger som vi senere skal se.

Hva så med det gjenværende dodekaederet. Platon sier om dette. *"Den gjenværende femte konstruksjonen, brukte Gud for å spenne ut den kuleformede himmelhvelvingen."* **Dodekaederet** ble derfor forbundet med *himmelen*. Dette er også det legemet av de fem som ligner mest på en kule. Vi husker også at dyrekretsen omfatter *12* stjernebilder som sola passerer forbi i løpet av året.

Som vi ser består de fem platonske legemene av hjørner, kanter og flater. I tabellen under har vi summert opp hvor mange hjørner, kanter og flater hvert av dem har:

Legme	Hjørner	Kanter	**Flater**
Tetraederet	4	6	**4**
Kuben	8	12	**6**
Oktaederet	6	12	**8**
Dodekaederet	12	30	**20**
Ikosaeder	20	30	**12**

Som det framgår av tabellen så er terningen ett av de 5 regulære polyedrene. Terningen er som kjent satt sammen av 6 like kvadrater. Om terningen ellers er homogen (likedanet tvers gjennom) så vil sannsynligheten for å falle ned på hver av de seks sidene være like stor.

Vi registrerer også at det finnes fire andre legemer som har sideflater av like store regulære mangekanter. Disse er tetraederet med 4 trekantede sideflater, oktaederet med 8 trekantede sideflater, dodekaederet med 12 femkantede sideflater og ikosaederet med 20 trekantede sideflater. Disse andre burde derfor også kunne brukes som "terninger" siden sannsynligheten for å falle på en av de 4, 8, 12, eller 20 sidene er den samme. Slike terninger finnes som vi ser av bildet under.

7 Andre terningoppgaver

I dette avsnittet skal vi se på annen bruk av terninger innen matematikken [1].

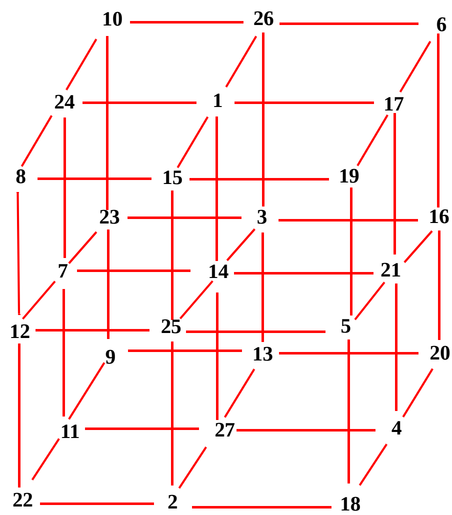
7.1 Den magiske terning

Mål: Skaper fascinasjon.

Trinn: 8. - 10. trinn, Vg 1

Utstyr: Papir og blyant
Ev. papirterninger

Bakgrunn: På figuren under ser vi en *magiske terning*. En magisk terning er satt sammen av n^3 mindre terninger, hvor n er antallet mindre terninger langs hver av sidekantene. Et eksempel på en slik magisk terning er vist på figuren under [3].



Siden alle rader, kolonner, søyler og diagonaler i denne kuben summerer opp til den magiske konstanten 42 kalles dette en *perfekt magisk kube*. Dersom diagonalene ikke gir den magiske konstanten, kalles kuben en *semiperfekt magisk kube*.

Dersom kuben er satt sammen av n x n x n mindre kuber, blir den magiske konstanten lik:

$$Sum = \frac{n}{2}(n+1)(n^2-n+1) \tag{7.1}$$

Setter vi inn $n = 3$ finner vi at den magiske konstanten er lik 42 som stemmer godt. For ytterligere studier av magiske kuber, se referanse [4] side 1125. En variant av den magiske kuben er også omtalt i referanse [5]. Se også magiske kvadrater [1].

7.2 Soma klosser bygget opp av terninger

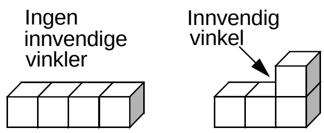
Mål: Trener opp evnen til å tenke romlig.

Trinn: 8. - 10. trinn

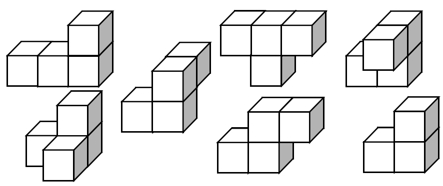
Utstyr: Somaklosser

Bakgrunn: Et annet kjent tredimensjonalt puslespill består av 7 brikker satt sammen av mindre terninger. Dette pusselet går under betgnelsen **SOMA-klossene,** og ble i sin tid oppfunnet av **Piet Hein (1905-1996)**[1].

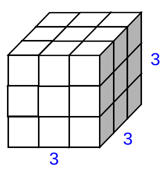
Når Piet Hein skulle lage disse klossene, bestemte han seg for at han skulle sette sammen alle kombinasjoner av 3 og 4 terninger som hadde *innvendige vinkler.*



Han fant ut at det bare var 7 slike klosser: 6 som besto av 4 terninger og 1 som besto av 3 terninger.



Dersom vi teller terningene i alle de 7 klossene på figuren ovenfor, vil vi finne ut at disse tilsammen inneholder 27 terninger.



Han fant også ut at ved hjelp av disse 7 klossene klarte han akkurat å sette sammen *en* 3 x 3 x 3 kube som inneholder 27 enkeltterninger. Dette pusselet kan settes sammen til en rekke ulike geometriske figurer, og er godt egnet til å trene romsansen hos elevene.

1. Piet Hein (1905-1996), dansk lyriker, matematiker, ingeniør og oppfinner. Han er spesielt kjent for sine Gruk og sin superellipse.

8 Elektronisk terning

I dette kapittelet skal vise hvordan vi kan bygge en elektronisk terning. Vi tar utgangspunkt i et byggesett som selges ved Skolelaboratoriet ved NTNU.

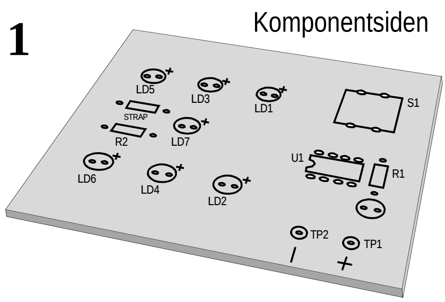
8.1 Bygging av terningen

Mål: Lære et håndverk, lodding og montering
Lære om elektroniske komponenter
Forstå hvordan en elektronisk terning virker

Trinn: 7. - 10. trinn Vg1 - Vg2
Egner seg i forbindelse med faget Teknologi og formgivning.

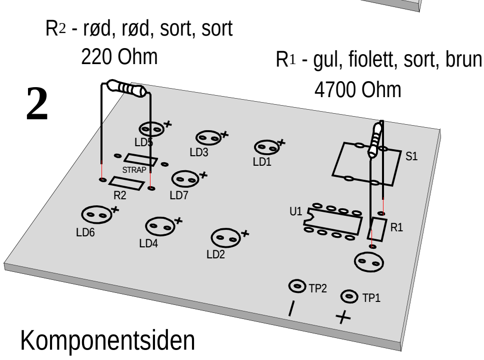
Utstyr: Byggesett, batteri
Loddebolt, tinn, avbiter

1



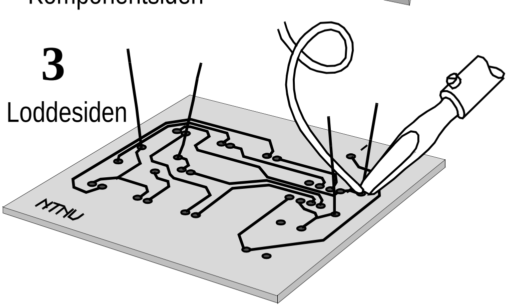
1. Ta ut monteringsplata. På *komponetsida* skal komponentene stå, på *loddsiden* skal vi lodde beina til komponentene til kobberbanene.

2

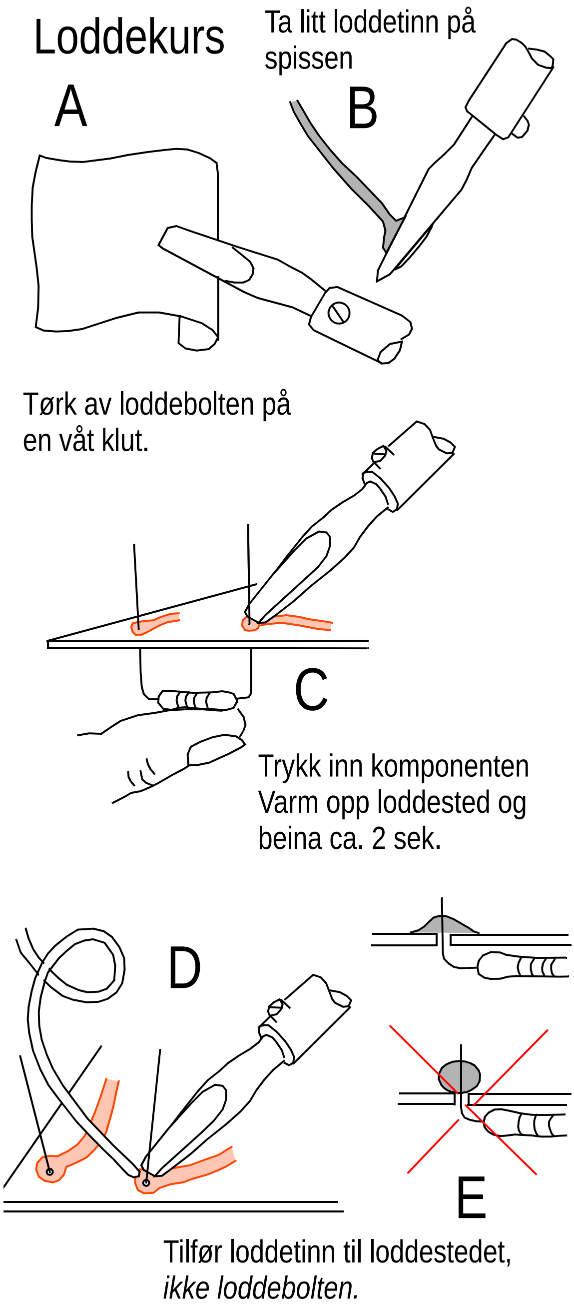


2. Finn motstandene R_1 og R_2, R_1 (gul, fiolett, sort, brun) - 4 700 Ohm R_2 (rød, rød, sort, sort) - 220 Ohm. Bøy beina og stikk dem ned ved rektanglene merket R_1 og R_2 fra komponentsiden. Press dem helt ned til plata.

3



3. Snu kortet slik at loddesiden kommer opp. Lodd fast beina til de to motstandene. Klipp av beina inntil loddingen.



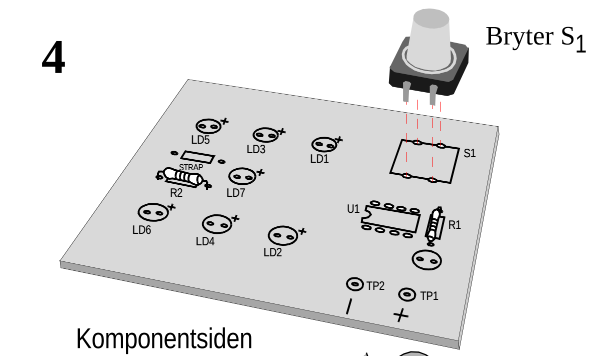
A. Tørk av loddebolten på en vårt klut

B. Ta litt loddetinn på spissen for å få bedre varmekontakt med loddestedet.

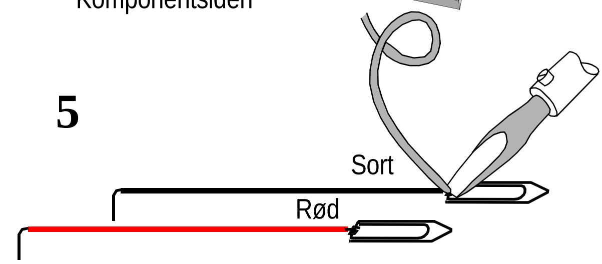
C. Trykk inn komponenten. Varm opp loddested og beinet i ca. 2 sek.

D. Tilfør loddetinn til loddestedet og ***ikke*** til loddebolten**.**

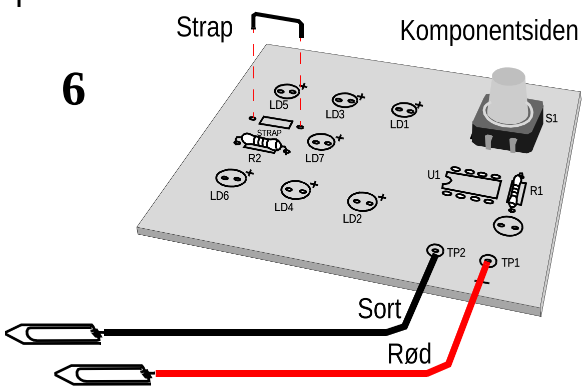
E. En god lodding karakteriseres ved at loddetinnet flyter utover. En dårlig lodding ved at loddetinnet blir liggende som en kule på loddestedet.



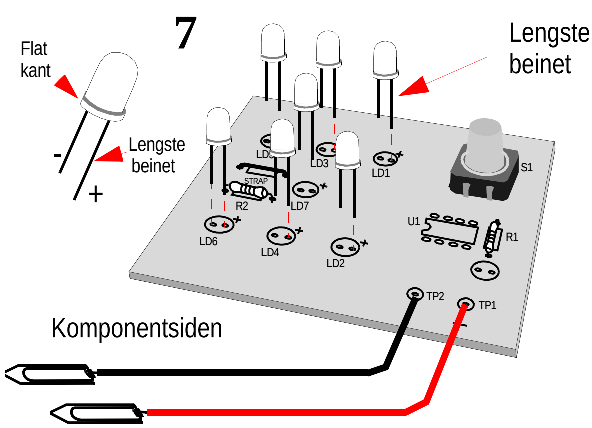
4. Monter bryteren S_1 som vist på figuren. Stikke de fire beina ned i hullene på monteringsplata. Snu plata og lodd.



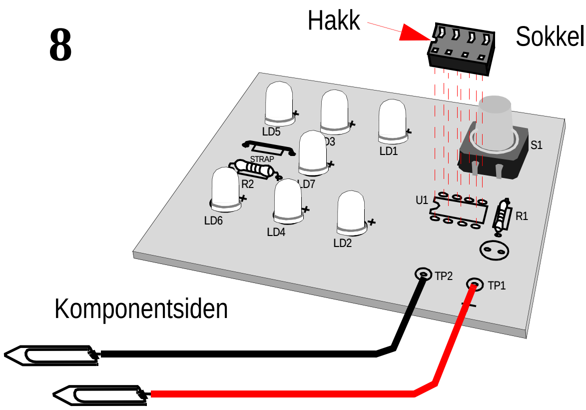
5. Ta av ca. 5 mm isolasjon i begge endene på den svarte og den røde ledningen. Lodd en binders i den ene enden av hver ledning.



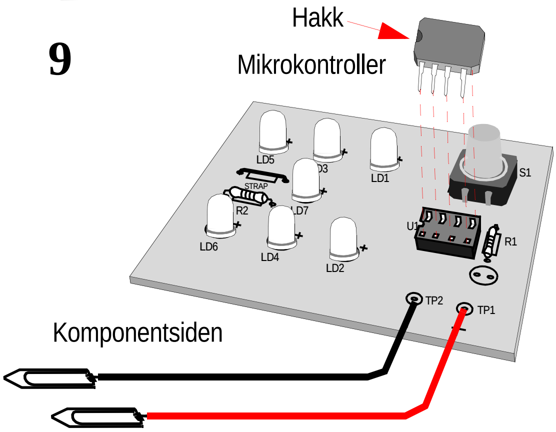
6. Monter den røde ledningen i hullet merket TP1 + og den sorte ledningen i TP2 - . Bruk ett av de avklipte beina, bøy det og stikk det ned i hullene merket STRAP.



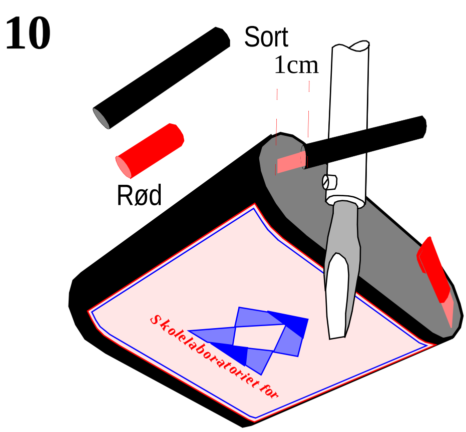
7. Monter de 7 lysdiodene LD1 - 7. Pass på at den lengste ledningen skal ned i hullet nærmest pluss-tegnet. Lodd fast beina til diodene til kobberbanene på loddesiden. Klipp av beina.



8. Monter sokkelen til mikrokontrolleren (U1). Denne har 8 bein som skal ned i hvert sitt hull. Sørg for at hakket står rett vei. Lodd fast de 8 beina på loddesiden.

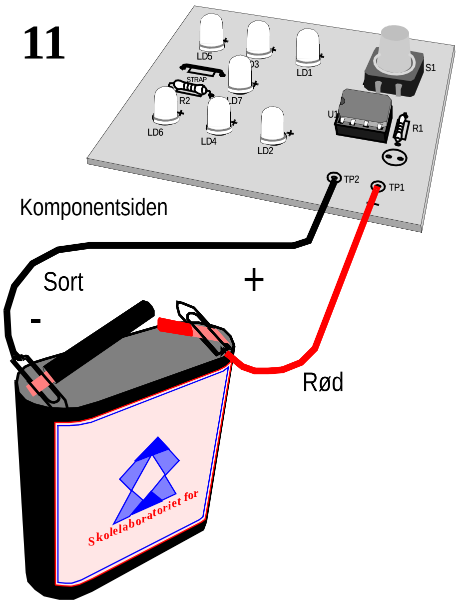


9. Trykk den sorte mikrokontrolleren ned i sokkelen. **NB! Påse at det vesle hakket er på rett side.**



10. Skyv den sorte strømpa inn på den lange polen på batteriet, og den røde inn på den kort polen slik at det blir ca. 1 cm bart metall innerst på hver side. Brett ut polene og varm opp med loddekolben, til plaststrømpa er krymper omkring metallpolen.

11



11. Koble til batteriet. Rød ledning til pluss (kort pol), og sort ledning til minus (lang pol).

Sjekk at alle lysdiodene fungerer ved å trykke noen ganger på den hvite knappen.

Dersom alt ikke fungerer som det skal, kan du gjøre følgende:

8.2 Feilsøking og forebygging av feil.

Den kanskje største utfordringen er å finne feil på kort som ikke virker. Det er derfor viktig å forebygge feil. Dette gjøres slik:

1. Alle i gruppen arbeider synkront.
   Om mulig sjekk underveis.

2. Gjennomgå riktig lodding i starten.
   Vis og hjelp alle til rette:

- *Varm opp der ledningen kommer ut av plata i 2-3 sek*
- *Tillfør loddetinn til loddeland (blank runding)*
- *Se at loddetinnet smelter på loddelandet*
- *Fjern loddetinnet*
- *Fjern loddebolten*

3. Poengter at all lodding skjer på loddesiden og alle komponenter plasseres på komponentsiden.

Under er satt opp en prioritert liste for feilsøking:

Om ingen ting virker, alt er mørkt:

1. Sjekk at batteriet er montert rett vei, ev. at rød og svart ledning er koblet rett.
2. Sjekk loddingene til den røde og den sorte ledningen.
3. Sjekk at prosessoren står riktig vei, ev. ta ut og snu denne.

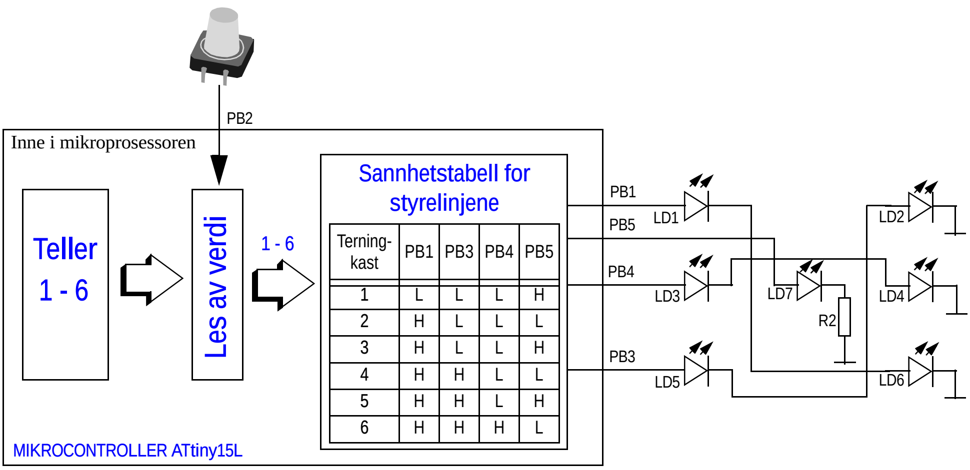
Om noen lysdioder virker

4. Finn ut hvilke som virker og hvilke som ikke virker ved å trykke noen ganger.
5. Sjekk om lysdiodene er satt rett vei.
   Den flate siden skal peke bort fra plusstegnet på plata.
   Ev. lodd ut og snu.
6. Se etter dårlige loddinger.
   Løse ledninger, kald loddinger.

7. Se etter loddebroer (kortslutninger)
   Om det finnes loddebroer, hold kortet over loddebolten og varm opp loddestedet med loddespissen. La loddetinnet renne ned på den varme loddebolten.
8. Bruk et ohm-meter og undersøk om det er brudd i noen av banene.
   I så fall kan det være nødvendig å skrape av litt av lakken på banen og lodde seg forbi et brudd.
9. Undersøk om motstandene har byttet plass.
10. Sjekk om noen komponenter er avglemt. Sjekk spesielt at strappen er satt inn.

8.3 Hvordan virker terningen

Figur 1 viser et enkelt diagram for hvordan den elektroniske terningen virker.

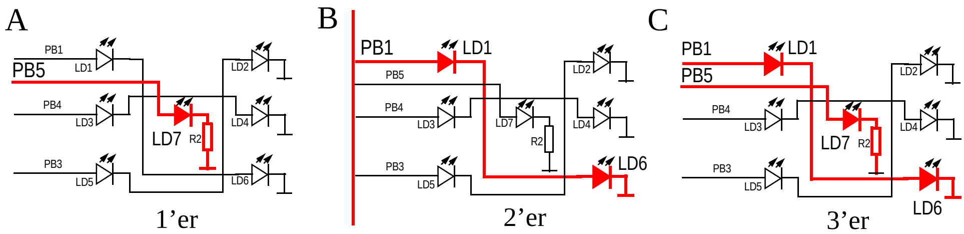


Figur 1 Virekmåten for terningen.

En mikroprosessor er en svært sammensatt og komplisert komponent. Terningen inneholder en slik mikroprosessor (eller mikrokontroller). For at vi skal kunne forstå terningen skal vi plukke ut noen få deler av prosessoren.

1. **Telleren**
   Inne i prosessoren sitter bl.a. en teller som er programmert til å telle fra 1 til 6, flere 100 000 ganger i sekunder. Når den kommer til 6 begynner den på nytt med 1 osv.
2. **Avleseren**
   Når du trykker på knappen vil øyeblikksverdien til telleren bli lest av og tatt vare på. Siden telleren teller så fort, vil det vi får ut være ganske tilfeldig.
3. **Tabellen**
   Tallene 1 til 6 må nå “oversettes” slik at de rette lysdiodene slås av og på. Får vi en 1’er skal bare lysdioden i midten (LD7) lyse, dvs. at ledning PB5 ut av prosessoren må ha høy spenning (se figur 2 - A). Får vi en 2’er skal lysdiodene LD1 og LD6 lyse, dvs. at ledning PB1 ut

av prosessoren skal ha høy spenning (se figur 2 - B). Dersom vi får en 3'er skal lysdiodene LD1 , LD7 og LD6 lyse, hvilket betyr at ledningene PB1 og PB5 skal ha høy spenning samtidig (se figur 2 - C).



Figur 2 Eksempler på hvilke linjer og lysdioder som er tent for verdiene 1, 2 og 3.

Tilsvarende for 4, 5 og 6'ere. Tabellen under viser hvilke ledninger som skal ha høy spenning for de ulike terningverdiene.

Sannhetstabell for styrelinjene

Terning-kast	PB1	PB3	PB4	PB5
1	L	L	L	H
2	H	L	L	L
3	H	L	L	H
4	H	H	L	L
5	H	H	L	H
6	H	H	H	L

4. **Lysdiodene**
   Vi ser at mikroprosessoren bare har fire ledninger som skal styre 7 lysdioder. Siden noen lysdioder alltid skal være på samtidig for tallene 1 til 5, så kan 6 av de 7 lysdiodene kobles to og to i serie som vist på figur 1.

8.4 Noen enkle statistikkoppgaver

8.4.1 Undersøk sannsynlighetsfordelingen til terningen

Mål: Trener enkel statistikk, sannsynlighetsfordeling
Registrere data, sette opp tabeller og tegne histogrammer

Trinn: 9. - 10. trinn, Vg1 og Vg 2

Utstyr: Papir og blyant
Elektronisk terning

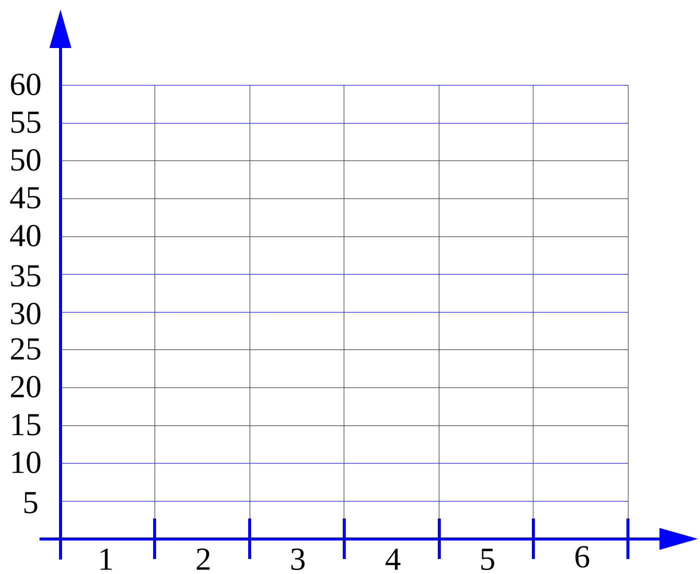
Bakgrunn: I denne øvelsen skal vi gjøre en forenklet vurdering av fordelingsfunksjonen til den elektroniske terningen. Dvs. at vi skal vurdere om sannsynligheten for å få hvert av de seks terningkastene er omtrent like sannsynlige, eller om ett eller flere av resultatene skiller seg ut som mer eller mindre sannsynlige.

Det er en fordel om hver elev har en terning.

Oppgave: *Slå terningen 200 ganger og registrer resultatene i tabellen under.*

Antall øyer	Resultat
1	
2	
3	
4	
5	
6	

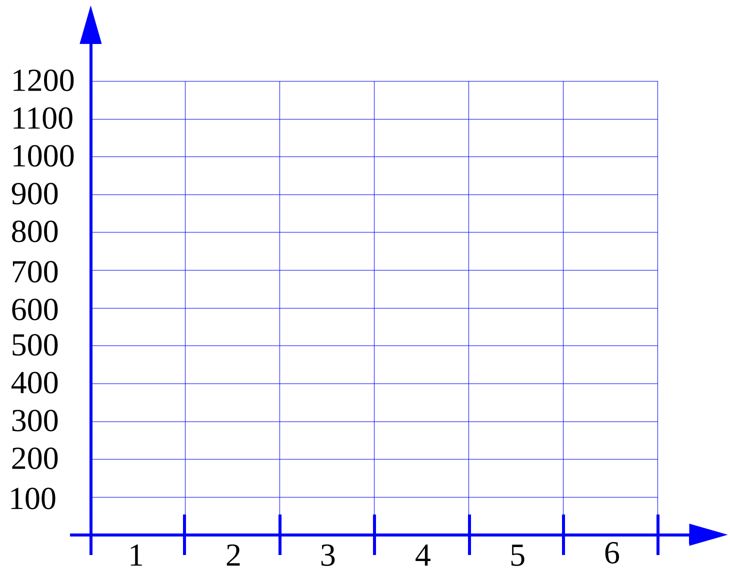
Tell opp og tegn histogram



Sammenlign med andre og vurder resulatatene.

Kommentar: ____

Oppgave: *Legg sammen resultatene fra samtlige terninger i klassen og tegn opp histogram.*



Sammenlign resulatatene med resultatene fra enn terning. Kommenter resultatet.

Kommentar: ____

8.4.2 Seks eller flere like terningkast på rad

Mål: Vise hvor vanskelig det kan være å anslå sannsynligheter ut fra bruk av "sunn fornuft".

Trinn: Ungdomskole og videregående skole

Utstyr: En elektronisk terning, eller en mynt til hver elev i klassen.

Bakgrunn: En dag ga **Theodore P. Hill** ved Georgia Institute of Technology studentene følgende hjemmeoppgave: *Gjør ett av to. Enten kaster dere en mynt 200 ganger og noterer resultatet, eller dere fingerer 200 resultater. Ut fra resultatene skal jeg* *avsløre hvem av dere som har kastet en mynt og hvem av dere som hentet resultatet fra eget hode.* Studentene fulgte oppfordringen og ga resultatene til Hill. Selv om han ikke klarte å avsløre alle, fikk han rett i 95% av tilfellene.

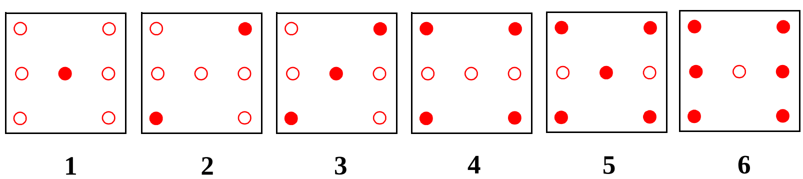
Da han ble spurt om hvordan han klarte å oppnå en så høy skår, sa han: *Sannheten er at de fleste ikke kjenner hva som er et sannsynlig resultat. De er derfor ikke i stand til å lage troverdige fiktive data*[1].

Oppgave: **Kast mynt og krone med den elektroniske terningen**:

Når en kaster mynt og krone, vil begge utfallene være like sannsynlige. Dvs. at sjansen for å få en mynt er like stor som for å få krone, sannsynligheten for å få krone og mynt er 0,5. Om elevene har elektroniske terninger så kan de bruke den til å slå mynt og krone.

Be elevene finne ut hvordan de kan bruke den elektroniske terningen i stedet for å kaste en mynt.

Kommentar: Siden hvert av de seks utfallene hos terningen skal være like sannsynlige kan de f.eks. si at 1,2 og 3 er mynt og 4, 5 og 6 er krone. Eller noen kan registrere at den midterste lysdioden lyser når vi har 1, 3 eller 5, mens den er slukket når vi har 2, 4 eller 6. Dvs. at sannsynligheten for at den midterste lysdioden lyser er lik 0,5



En trenger dermed kun lese av den midterste lysdioden.

Er det andre lysdioder som har den samme egenskapen?

Oppgave: **Avslør juksemakerne**:

Halve klassen skal kaste mynt og krone og halvparten skal finne på tilfeldige resultater. Læreren skal avsløre hvem som har "jukset" og hvem som virkelig har slått mynt og krone.

Elevene blir enige om hvem som skal kaste og hvem som skal "jukse". Resulatet gis læreren som avslører juksemakerne.

Oppgave: **Anslå sannsynligheten for 6 eller flere like etterfølgende utfall**

Elevene skal ved telling anslå sannsynligheten for å få 6 eller flere like utfall etter hverandre når de kaster mynt og krone. Desto flere elever som gjennomfører forsøket, desto bedre.

1. Hemmeligheten er at sannsynligheten for å få 6 eller flere like resultater etter hverandre når en kaster en mynt 200 ganger, er mye større enn en skulle tro (96%). Han sjekket derfor om dataene inneholdt slike serier av like. Gjorde de ikke det, antok han at dataene var falske. Prøv selv!

Be elevene gjette sannsynligheten for å få 6 like eller flere etter hverandre. Skriv ned resultatet.

Be dem slå 200 kast og registrer mynt og krone.

Be dem gå gjennom resultatene å registrer:
- 4 eller flere like etter hverandre? Ja eller nei.
- 5 eller flere like etter hverandre? Ja eller nei.
- 6 eller flere like etter hverandre? Ja eller nei.
- 7 eller flere like etter hverandre? Ja eller nei.

Oppsummer resultatet i klassen:
- Hvor mange ganger har den enkelte fått 4 eller flere like etter hverandre?
- Hvor mange ganger har den enkelte har fått 5 eller flere like etter hverandre?
- Hvor mange ganger har den enkelte har fått 6 eller flere like etter hverandre?
- Hvor mange ganger har den enkelte har fått 7 eller flere like etter hverandre?

Anslå sannsynligheten for hvert av tilfellene ut fra resultatene. Hvor god var gjettingen på forhånd?

9 Referanser

Litteraturreferanser

[1] Nils Kr. Rossing, “Den matematiske krydderhylle”, Tapir Akademiske forlag 2004, ISBN 82-519-1952-5

[2] Tor Arne Kvaløy and Per Bjarne Løvsletten, *“Ant system - Traveling Salesman Problem (AS-TSP)”*, Prosjektoppgave Høgskolen i Sør-Trøndelag, Mai 2001 http://www.unge-forskere.no/acoide

[3] Theoni Pappas, “The joy of Mathematics - Discovering Mathematics All Around You”, Tetra 1989, ISBN 0-933174-65-9

[4] Eric W. Weisstein, “CRC Concise Encyclopedia of Mathematics”, CRC Press LLC 1999, ISBN 0-8493-9640-9

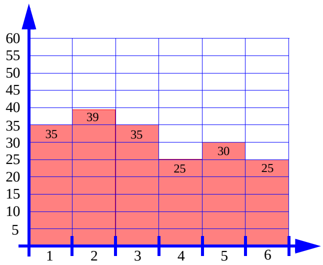
[5] Henning Bueie, “Matematiske kilevinker”, Tangenten 1/2000 side 7, ISSN 0802-8192

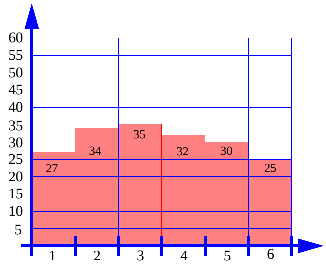
Nettreferanser

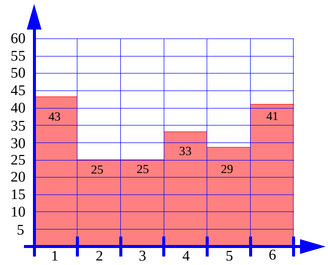
[6] **Teningens historie:**
a) http://www.free-craps.info/gambling_quotes.html
b) http://www.historicgames.com/

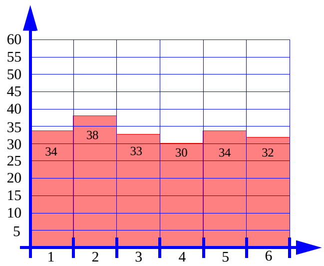
[7] **Terning sitater:**
a) http://homepage.ntlworld.com/dice-play/Quotations.htm
b) http://www.lilesnet.com/inspiration/quotations.htm

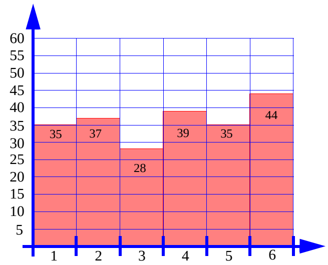
Vedlegg A Måling av sannsynlighetsfordeling

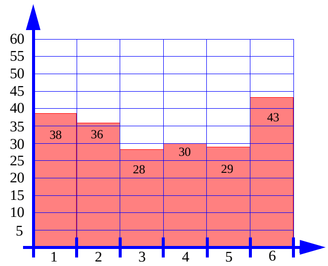


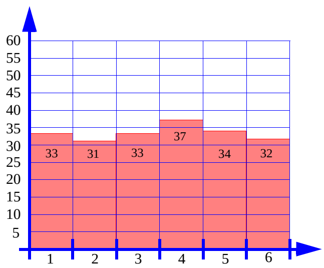


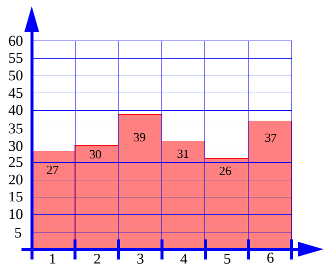


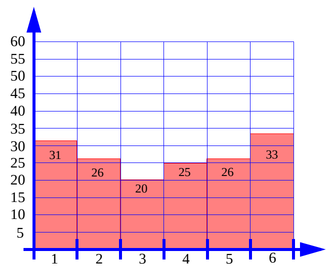


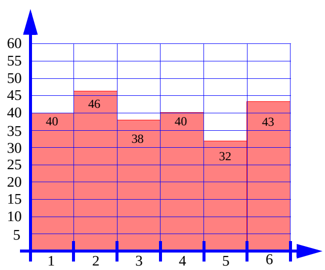


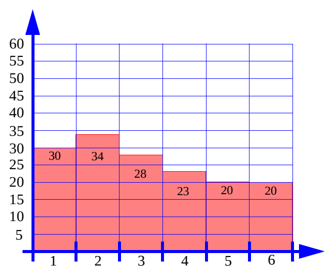


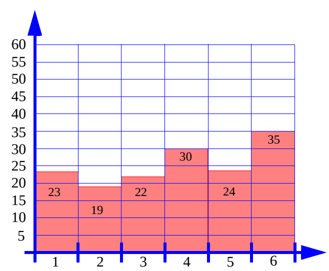


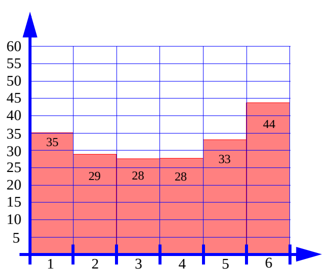


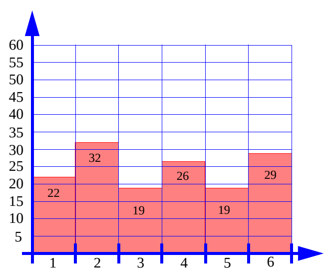


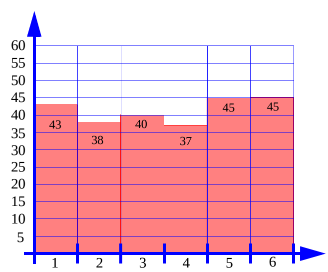






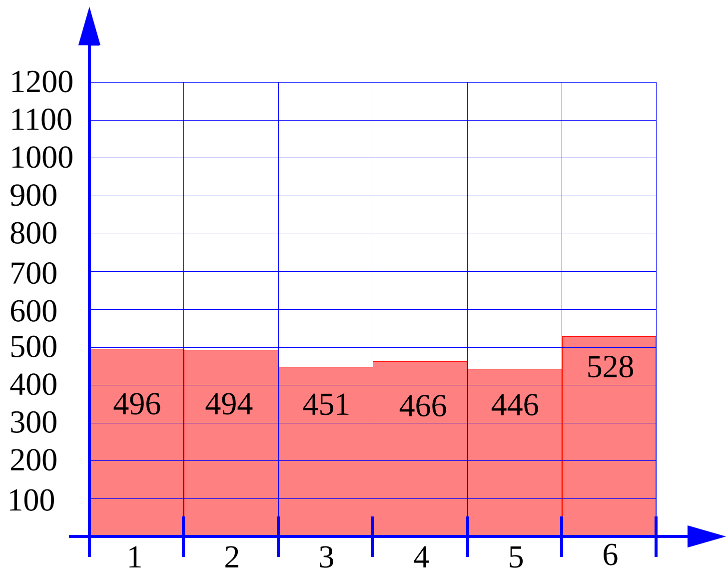






Figuren over viser fordelingsfunksjonen for 15 forskjellige terninger slik den framkommer når terningen er slått ca 200 ganger. Vi registrerer at variasjonen fra terning til terning er relativt stor. Dette skyldes sannsynligvis at antallet kast er for lite. Dette jevner seg ut i betydelig grad når alle kastene summeres til en statistikk.

Figuren under viser resultatet når samtlige 15 er summert. Totalt ble terningen "slått" 2461 ganger. Vær oppmerksom på at dette ikke sier noe om den enkelte terning har en skjev fordelingsfunksjon. Da må en slå samme terning noen 1000 ganger.



Vedlegg B Løsningen på noen oppgaver

B.1 Løsning på oppgaven: 6.2 Bretting av terninger

Oppgaven går ut på å brette terninger av A4 og A5-ark.

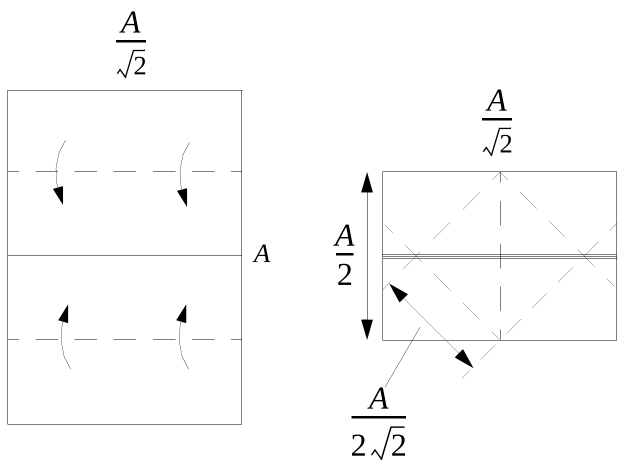
Tilleggspørsmålene, som vi her skal gi svar på er:

- Hva er forholdet mellom overflaten for en terning brettet med A5 og A4-ark?
- Hva er forholdet medllom volumet for en terning brettet med A5 og A4-ark?

I det etterfølgende har vi valgt å utlede sidekantene for to etterfølgende ark etter A-standarden. Vi har kalt dem An og A(n+1). Eksempler vil være A4 og A5 hvor n=4.

Forholdet mellom sidekantene:

Med utgangspunkt i brettingene, finner vi den forholdmessige lengden av sidekanten i terningen.



Ut fra berettingen kan vi se at det stiplede kvadratet inn i rektangelet i tegning B i figuren over, er lik sideflaten i kvadratet når vi bretter den med et ark som er formlikt med et A4-ark.

Forholdet mellom sidekantene kan da skrives som:

$$\frac{S_5}{S_4} = \frac{\frac{\frac{A}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}}{\frac{A}{2\sqrt{2}}} = \frac{\frac{A}{4}}{\frac{A}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{9.1}$$

Forholdet mellom arealene:

Dersom vi starter med en lengste sidekant på arket lik A, vil arealet av kvadratets ene sideflate være lik:

$$\text{Areal}_n = \frac{A}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{A}{2\sqrt{2}} = \frac{A^2}{8} \qquad (9.2)$$

Dersom vi istedet vil beregne arealet for en sideflate når vi bruker et A(n+1) ark kan vi erstatte A med $\frac{A}{\sqrt{2}}$. Vi får da:

$$\text{Areal}_{n+1} = \frac{\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2}{8} = \frac{A^2}{16} \qquad (9.3)$$

Så er det ikke vanskelig å beregne forholdet mellom de to arealene:

$$\frac{\text{Areal}_5}{\text{Areal}_4} = \frac{\frac{A^2}{16}}{\frac{A^2}{8}} = \frac{1}{2} \qquad (9.4)$$

Forholdet mellom volumene:

Skal vi gjøre tilsverende med volumene kan vi skrive:

$$\text{Volum}_n = \frac{A}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{A}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{A}{2\sqrt{2}} = \frac{A^3}{16\sqrt{2}} \qquad (9.5)$$

Ved å erstatte A = $\frac{A}{\sqrt{2}}$ får vi volumet for en terning brettet med A(n+1)-ark:

$$\text{Volum}_{n+1} = \frac{\frac{A}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{A}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{A}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{A^3}{48} \qquad (9.6)$$

Tilslutt beregner vi forholdet mellom volumene:

$$\frac{\text{Volum}_5}{\text{Volum}_4} = \frac{\frac{A^3}{48}}{\frac{A^3}{16\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}\sqrt{2} \tag{9.7}$$

Oppsummering

Vi kan da oppsummere resultatet i tabellen under.

Format	Sidekant	Overflate	Volum
A(n+1)	$\frac{A}{2\sqrt{2}}$	$3\frac{A^2}{4}$	$\frac{A^3}{16\sqrt{2}}$
An	$\frac{A}{4}$	$3\frac{A^2}{8}$	$\frac{A^3}{48}$
$\frac{A5}{A4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{2}$

Heftet er et ressurshefte til matematikkundervisningen. Alle oppgavene i heftet har tilknyttning til bruk av terninger. Det er lagt vekt på at utstyr og opplegg skal kreve lite utstyr, vanligvis papir, blyant og terninger av ulike slag.

Som en liten appretiff har vi lagt ved byggebeskrivelsen av en elektronisk terning. Disse selges som byggesett ved Skolelaboratoriet ved NTNU og kan ev. bestilles hos Nils Kr. Rossing, Skolelaboratoriet ved NTNU. Vårt håp er at dette kan være en av flere bindeledd mellom teknologi og matematikk. Vi har derfor inkludert noen enkle statistikkoppgaver for å utforske den elektroniske terningens egenskaper. Vi har dessuten forsøkt å beskrive virkemåten på en enkel og forståelig måte.

Heftet er utarbeidet i et samarbeid mellom Skolelaboratoriet for matematikk, naturfag og teknologi ved NTNU og Didaktiv AS v/Gerd Åsta Bones.

Gerd Åsta Bones
Leder for læremiddelfirmaet Didaktiv AS og ansatt som forsker ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen.
E-post: gerd@didaktiv.no

Nils Kr. Rossing
Universitetslektor ved Skolelaboratoriet ved NTNU og prosjektleder ved Modt-Nordisk Vitensenter
E-post: nils.rossing@plu.ntnu.no

Skolelaboratoriet
for matematikk, naturfag og teknologi

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Trykk: NTNU-trykk