

UTDANNINGSSNAKK

SPØRSMÅLSDREVNE
STUDIELØYPER I MATEMATIKK

14.mars 2025 kl. 08.30



HEIDI
STRØMSKAG

www.ntnu.no/utdanningsnakk



Spørsmålsdrevne studieløyper i matematikk

Heidi Strømskag

Institutt for matematiske fag

heidi.stromskag@ntnu.no

Studie- og forskningsløype (SFL)

En SFL er en pedagogisk metode basert på å studere *genererende spørsmål*

Læreren: Presenterer et **genererende spørsmål Q_0** og er veileder av SFL-ene.

Studentene: Studerer og svarer på Q_0 (i team).

Undervisning: Noen økter er planlagte, andre økter gjennomføres når det oppstår behov.

Seminarer: Teamene presenterer foreløpige SFL-rapporter og får tilbakemeldinger fra et annet team og læreren.

Sluttprodukt: SFL-rapport fra hvert team (inntil 6500 ord).

Dynamikk mellom ulike typer handlinger for studentene

Når et genererende spørsmål Q_0 er gitt:

- **Søk etter eksisterende svar:** finne svar på Q_0 som er tilgjengelig.
- **Forskning:** stille spørsmål og undersøke for å forstå eksisterende svar.
- **Studie:** konsultere eksisterende kunnskap for å støtte forskningsarbeidet.

Sykluser for å svare på Q_0 gjennom en SFL

Finne **eksisterende svar** på Q_0 (i litteraturen etc.)

For å *forstå* disse eksisterende svarene må man:

Studere arbeider (**studiedel**)

For å *forstå* disse arbeidene må man:

Stille og svare på avledede spørsmål (**forskningsdel**)

For å *svare* på de avledede spørsmålene må man:

Finne **eksisterende svar** på de avledede spørsmålene (i litteraturen etc.)

For å *forstå* disse eksisterende svarene må man:

Studere arbeider (**studiedel**)

For å *forstå* disse arbeidene må man:

Stille og svare på nye avledede spørsmål (**forskningsdel**)

For å *svare* på de nye avledede spørsmålene må man:

... (etc.)

Et «arbeid» er ethvert objekt
(materielt eller intellektuelt)
som er skapt av mennesker

Et nytt didaktisk paradigme

Gjeldende didaktiske paradigme	Nytt didaktisk paradigme
«Besøke» et kunnskapsobjekt <i>h</i>	Stille spørsmål om verden rundt oss
Fokus på egenverdien av kunnskap – noe som kan betraktes («objekt i et museum»)	Fokus på spørsmålene som fører til kunnskap
Studiet av <i>h</i> skjer fordi det er anerkjent i kulturen/ læreplanen	Studiet av <i>h</i> skjer fordi <i>h</i> kan brukes, videreutvikles og forstås i kontekst
Ingen eksplisitt kobling mellom <i>h</i> og spørsmålene som førte til dets utvikling	Eksistensberettigelsen til <i>h</i> gjenopprettes ved å finne tilbake til spørsmålene

Teoretisk rammeverk: den Antropologiske Teorien for det Didaktiske (Chevallard, 2015, 2019)

Miljøet M for studiet av et genererende spørsmål S_0

$$M = \{L_1^\diamond, L_2^\diamond, \dots, L_m^\diamond, A_1, A_2, \dots, A_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_p\}$$

Eksisterende svar
[løsninger] fra
litteraturen og
multimediaressurser

Arbeider for å
studere og forstå
 Q_0 og de andre
elementene i M

Spørsmål utledet
fra studiet av S_0
og de andre
elementene i M

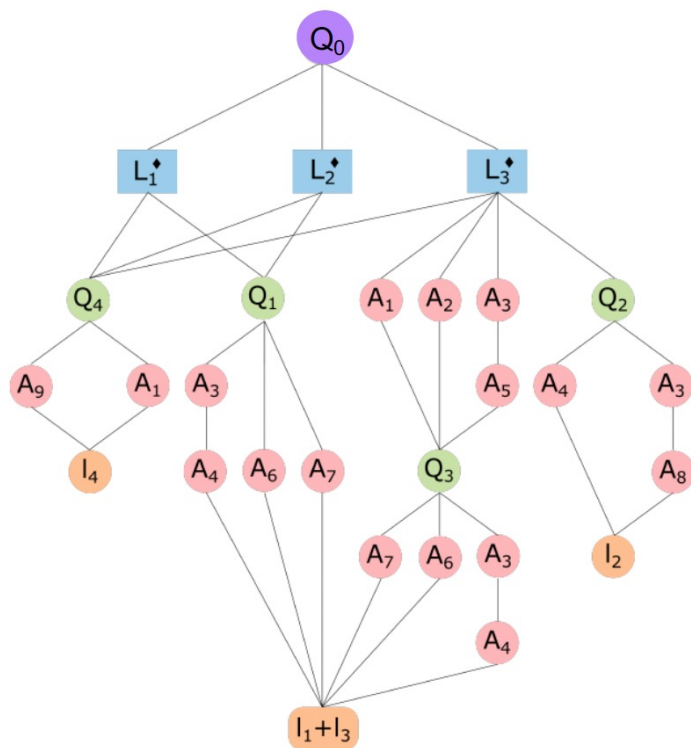
Eksempel fra MA3061 – Design og analyse av matematikkundervisning

Genererende spørsmål:

Hva er de viktigste elementene i en introduksjon til differensialregning i Matematikk 1T og R1?
Hvorfor?

- 14 studenter: fra 4. og 5. studieår på lektorprogrammet i realfag (8–13).
- En analyse av denne SFL-en er publisert i Strømskag (2024).

Hva er de viktigste elementene i en introduksjon til differensialregning i Matematikk 1T og R1? Hvorfor?



Fra sluttrapport Team 4 (hentet med tillatelse)

Eksisterende løsninger, L_i^\diamond

L_1^\diamond : *Sinus 1T* og *Sinus R1* (Cappelen Damm)

L_2^\diamond : *Mathematics 1T* og *Mathematics R1* (Aschehoug)

L_3^\diamond : Artikler om derivasjon, NDLAs nettside for Matematikk 1T

Arbeider, A_i

A_1 : *Calculus: A complete course* (Adams & Essex, 2013)

A_2 : Video om grenseverdier, NTNU Undervisning (YouTube)

A_3 : "Elevers forståelse av den deriverte: En casestudie av R2 elever forståelse av grafiske representasjoner av den deriverte." Masteroppgave (Fandrem, 2016)

A_4 : "Students' understanding of differentiation" (Orton, 1983)

A_5 : "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity" (Tall & Vinner, 1981)

A_6 : "The historical development of the calculus" (Edwards, 1979)

A_7 : "The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass" (Grabiner, 1983)

A_8 : "Introduction to diagnostic teaching in mathematics" (Brekke, 1995)

A_9 : "Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm" (Chevallard, 2015)

Avledede spørsmål, Q_i

Q_1 . Hvilke styrker har en grafisk tilnærming, og hvilke styrker har en algebraisk tilnærming? Hvordan fyller de ut hverandre i en introduksjon til derivasjon?

Q_2 . Fremgår det forenklinger knyttet til derivasjon i lærebøkene til Cappelen Damm, Aschehoug og NDLA som kan skape forvirring, og hvordan kunne disse vært unngått?

Q_3 . Bør elevene først få en god forståelse for grenseverdier før de blir introdusert for derivasjon?

Q_4 . Er *vektsfart* et passende begrep for momentan endring i et punkt?

MA3001 – Matematisk modellering gjennom studie- og forskningsløyper (2022)

Enhet 1

Tittel	Modellering av systemer ved hjelp av algebra som verktøy – Et nytt didaktisk paradigme
Organisering	5 × 45 min [Forelesninger] + 3 × 45 min [Øvingstimer].
Litteratur	- Chevallard (2015). <i>Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm.</i> - Niss (2015). <i>Prescriptive modeling: Challenges and opportunities.</i> - Strømskag & Chevallard (2022). <i>Elementary algebra as a modelling tool: A plea for a new curriculum.</i>
Temaer	Paradigmet som innebærer å stille spørsmål ved verden. Modellering av systemer. Algebra som modelleringsverktøy.
Spørsmål	Basert på måledata, hvordan kan vi finne isolasjonsevnen til to termoser? For en person med et positivt testresultat for en sykdom, hvordan kan vi finne sannsynligheten for at vedkommende faktisk har sykdommen?

Enhet 2

Tittel	Teori og modeller fra den antropologiske teorien for det didaktiske
Organisering	2 × 45 min [Forelesning] + 2 × 45 min [Øvingstimer].
Felles litteratur	- Bosch & Gascón (2014). <i>Introduction to the anthropological theory of the didactic.</i> - Chevallard (2019). <i>Introducing the anthropological theory of the didactic.</i> - Markulin et al. (2021). <i>Project-based learning in statistics: A critical analysis.</i>
Temaer	Didaktisk system. Studie- og forskningsløyper. Herbartisk skjema.
Spørsmål	Hvordan skiller studie- og forskningsløyper seg fra problem-/prosjektbasert læring?

Enhet 3

Tittel	Klimaendringer
Organisering	1 × 45 min [Forelesning] + 4 × 45 min [SFL _{pilot}] + 2 × 45 min [Presentasjon og diskusjon].
Litteratur	Litteratur valgt av hver gruppe.
Tema	Grunnleggende kunnskap om klimaendringer.
Genererende spørsmål	Hva er klimaendringer og hvorfor skjer de?

Enhet 4

Tittel	Karbonfangst og -lagring (CCS)
Organisering	6 × 45 min [Forelesninger og spørretime] + 30 × 45 min [SFL] + 4 × 45 min [Presentasjon og diskusjon].
Litteratur	- Strømskag (2022). <i>Notat om det herbartiske skjemaet.</i> - Litteratur valgt av hver gruppe.
Temaer	Modeller av CCS utviklet av forskere. Parametere og deres innbyrdes sammenhenger.
Genererende spørsmål	Hvordan modelleres CCS i litteraturen? Hvilken matematikk er involvert i disse modellene? Hvilke parametere inngår, og hvilke relasjoner er det mellom dem?

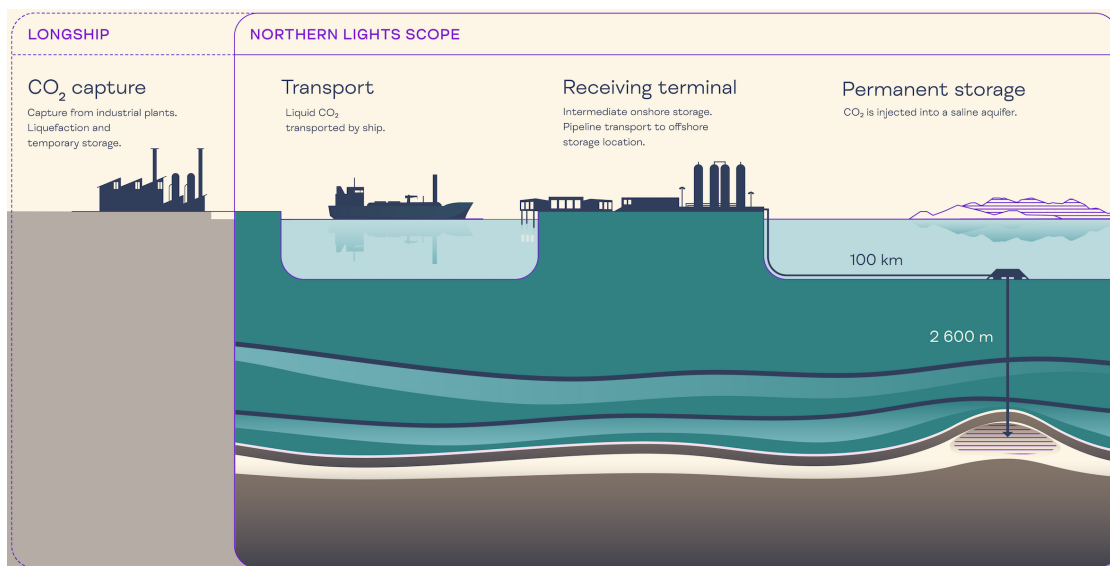
Enhet 5

Tittel	Modellering i skolematematikken
Organisering	3 × 45 min [Forelesninger] + 2 × 45 min [Øvingstimer].
Litteratur	- Strømskag & Chevallard (2022). <i>Elementary algebra as a modelling tool: A plea for a new curriculum.</i>
Temaer	Systemer i den naturlige og i den sosiale verden. Design av modelleringsoppgaver.
Spørsmål	Hvordan kan modelleringsoppgaver struktureres slik at elever kan tilegne seg kunnskap om de involverte systemene?

Studentene i emnet

- 9 studenter: fra 3. og 4. studieår på lektorprogrammet i realfag (8–13)
- Arbeid i fire team ($3 \times 2 + 1 \times 3$)
- En analyse av denne SFL-en er publisert i Strømskag (2023).

Hva er karbonfangst og -lagring (CCS)?

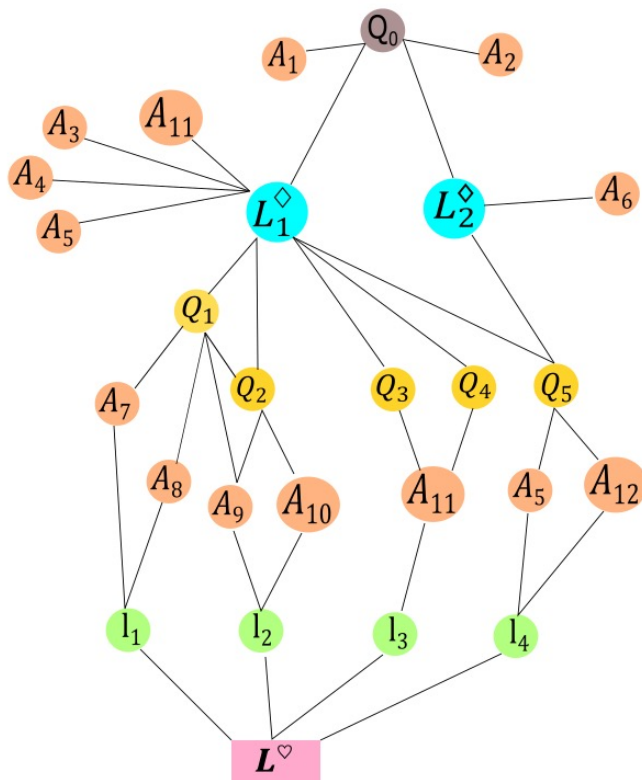


Figur fra Northern Lights (u.å.)

<https://norlights.com/about-the-longship-project/>

- CCS er en teknologi for å redusere utslippene av CO₂ fra store kilder som kull- og gasskraftverk og stål- og sementfabrikker
- Karbonfangst handler om å fange opp CO₂-utslippene fra slike kilder
- Karbonlagring handler om å lagre fanget CO₂ i undersjøiske reservoarer.

Miljø-dynamikk-skjema



Fra sluttrapport Team 1 (hentet med tillatelse)

Genererende spørsmål Q_0

Q_0 : Hvordan er karbonfangst og -lagring modellert i litteraturen? Hvilken matematikk er involvert i disse modellene? Hvilke parametere inngår, og hva er relasjonene mellom dem?

Eksisterende svar L_i^\diamond

L_1^\diamond : Beregning av CO₂-lagringskapasitet i dype, saltholdige akviferer på regionalt nivå (Szulczewski & Juanes, 2009)

L_2^\diamond : Estimering av CO₂-lagringskapasitet (Bachu et al., 2007)

Avledede spørsmål Q_j

Q_1 : Hva er relasjonen mellom viskositet og permeabilitet i lagringen av CO₂?

Q_2 : Hva er mobilitetsforholdet, og hvorfor er det en viktig komponent i modellering av CO₂-lagring?

Q_3 : Hvilke forenklinger av modellene er gjort, og hva er konsekvensene av disse?

Q_4 : Er parametere typisk beregnet ved teori eller som resultat av empiri?

Q_5 : Hvor viktig er trykk i beregning av lagringskapasitet?

Arbeider A_k

A_1 : «Dette må du vite om fangst og lagring av CO₂» (Sintef, 2019)

A_2 : Forskrift om lagring og transport av CO₂ på sokkelen (Olje- og energidepartementet, 2014)

A_3 : Mekanismer for CO₂-fangst (CCP, u.å.)

A_4 : Artikkel om kapillærfangst for geologisk CO₂-lagring (Krevor et al., 2015)

A_5 : Video om forståelse av CO₂-lagring, laget av ekspert på feltet (Benson, 2021)

A_6 : Nettside for ord og uttrykk i petroleumsvirksomheten (Petroleumstilsynet, 2022)

A_7 : Darcys lov for væskestrøm i et porøst medium («Darcy's law», 2022)

A_8 : Masteroppgave om CO₂-lagring i sandstein og kalkstein (Kvinge, 2012)

A_9 : Reservoarteknikk (Satter & Iqbal, 2016)

A_{10} : Artikkel om mobilitetsforhold (Bamidele et al., 2009)

A_{11} : En matematisk modell for CO₂-avtrykket i dype, saltholdige systemer (MacMinn & Juanes, 2009)

A_{12} : Hvordan kan CO₂ lagres under jorda? (National Energy Technology Laboratory, 2022)

Fra Team A sin SFL-rapport

- Fokus på en modell for å beregne CO₂ lagringskapasitet i saltholdige akviferer, utviklet av MIT-eksperter (Szulczewski & Juanes, 2009):

$$C = \frac{2M\Gamma^2(1-s_{WC})}{\Gamma^2+(2-\Gamma)(1-M+M\Gamma)} \rho_{CO_2}\phi HWL_{total} \quad (2)$$

- Likning (2) beskrives som en analytisk modell: en rasjonal likning med 9 parametere.

C er massen av fanget CO₂; *M* er mobilitetsforholdet som måler fluiditeten til et stoff gjennom et porøst medium; Γ er fangstkoeffisienten for CO₂; *s_{WC}* er metningen av det fossile vannet i reservoaret; ρ_{CO_2} er tettheten til CO₂, ϕ er reservoarets porøsitet, *H* er reservoarets netto sandsteinstykkelse, *W* er lengden på injeksjonsanordningen i reservoaret, og *L_{total}* er den totale utstrekningen av CO₂-boblen etter at den er fanget.

- Presentasjon og forklaring av formler for fangstkoeffisienten Γ og mobilitetsforholdet *M*

$$\Gamma = \frac{s_{rg}}{1-s_{WC}} \quad (3) \quad M = \frac{1}{\frac{\mu_w}{k_{rg}^*} \frac{\mu_g}{\mu_o}} \quad (4) \quad \longleftrightarrow \quad M = \frac{\mu_w K_{ro,cw}}{\mu_o K_{rw,or}} \quad (5) \quad (5 \text{ er fra en annen artikkel})$$



Noen elementer fra studieevalueringen i MA3001

Var det noe du syntes var overraskende i MA3001?

S1: Jeg ble overrasket over hvor engasjerte studentene var i faget, og hvor stor innvirkning vi hadde.

S2: I utgangspunktet var temaet foreleseren hadde valgt overraskende og litt skremmende. De fleste av oss ble litt svette da vi begynte å studere karbonfangst og -lagring. Heldigvis ble det mer klart etter hvert da vi forsto at vi ikke skulle gå i dybden på alt eller «bli geologer».

Hvilke utfordringer har dere støtt på i MA3001?

S3: En utfordring har vært å forstå terminologien innenfor geologi i CCS.

S4: Det har vært utfordrende å forstå modeller med begrenset tilgjengelig informasjon. En annen utfordring har vært å holde seg kortfattet innenfor det maksimale antallet ord i rapporten.

Gevinster

- Studentmedvirkning.
- Motiverte studenter.
- Lære å søke etter svar, bruke flere typer kilder (en universell metode nyttig også utenfor utdanning).
- Vise avledede spørsmål og kilder som er brukt, samt løypa som er gjennomført for å svare på Q_0 .
- Studenters ulike Fag 2 (biologi/fysikk/IT/kjemi).
- Motvirke at kunnskap blir oppfattet som «naturalisert»:

To utsagn fra studieevalueringen i MA3061:

S5: Jeg har fått en bedre forståelse av hva differensialregning handler om og hva vi kan bruke det til. Jeg har lært hvordan det henger sammen med grenseverdier. Derivasjon var veldig «instrumentelt» for meg før vi gjorde dette prosjektet, så jeg har faktisk lært utrolig mye. Jeg har fått en større selvtillit rundt temaet.

S6: Jeg har lært å være litt mer kritisk til matematikkbøkene, ikke alt som er skrevet i disse bøkene er skrevet i gull.

Utfordringer med SFL som metode

For studentene:

- Opprettholde konsentrasjonen om et emne over lang tid
- Tverrfaglighet: sette seg inn i tema og terminologi utenfor egen fagkrets.
- Alle fag har sine konvensjoner som en person “utenfra” ikke kjenner til.
- Svaret på et genererende spørsmål er foreløpig og avhengig av kildene som er brukt.
- Læreren er ikke lenger en ”sannhetsdommer”.
- Nye typer oppgaver: finne og bruke andre kilder enn læreboka/pensum; stille og besvare egne spørsmål; vurdere når man skal stoppe; etc.

For læreren:

- Ikke ha “ekspertkompetanse” innen temaet man veileder.
- Unngå å gi omfattende tilbakemeldinger som skal «sikre» at studentene sitter igjen med kunnskap av verdi.
- Nye typer oppgaver: formulere genererende spørsmål; utvikle infrastruktur for SFL-er (f.eks. struktur for rapport, vurderingskriterier, vurderingsformer); etc.

**Behov for en ny
didaktisk
kontrakt**

(Brousseau, 2002)

Referanser

- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Red. & Overs.). Kluwer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>.
- Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. I S. J. Cho (Red.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 173–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71–114. <https://doi.org/10.24529/hjme.1205>
- Strømskag, H. (2023). Mathematical modelling using study and research paths. I B. Vajen & H. Strømskag (Red.), *CiviMatics: Interdisciplinary mathematical modelling meets civic education* (s. 17–140). The CiviMatics Consortium. <https://rb.gy/rqrog8>
- Strømskag, H. (2024). Study and research paths on differential calculus in teacher education. I I. Florensa et al. (Red.), *Extended Abstracts 2022. The 7th Conference on the Anthropological Theory of the Didactic. Trends in Mathematics* (Vol. 16, s. 539–554). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_41

UTDANNINGSSNAKK

PRAKSISSTUDIER -
VEILEDNING OG VURDERING

4.april 2025 kl. 08.30



WENCHE
BOGSTI

www.ntnu.no/utdanningsnakk