RESONNERING OG ARGUMENTASJON PÅ BARNETRINNET – NOEN SENTRALE BEGREPER

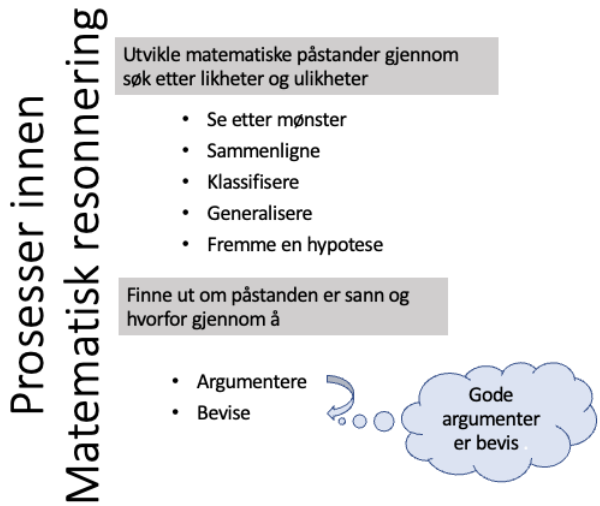
Ole Enge og Anita Valenta, Institutt for lærerutdanning, NTNU
Skrevet i 2022 som en del av ProPrimEd-prosjektet, https://www.ntnu.no/ilu/proprimed

I de siste tiårene har flere land framhevet arbeid med matematisk resonnering, argumentasjon og bevis i sine læreplaner og anbefalinger for undervisning i matematikk. Denne trenden gjenspeiler seg også i den norske læreplanen LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2019), der resonnering og argumentasjon er et av kjerneelementene i matematikkfaget. Kjerneelementer definerer aspekter ved faget som bør gå igjen i arbeid med ulike matematiske temaer, og som elevene må arbeide med for å kunne mestre faget. Slik legger den norske læreplanen opp til at arbeid med resonnering og argumentasjon er integrert i all matematikkundervisning. I denne teksten ser vi nærmere på hva arbeid med resonnering og argumentasjon på barnetrinnet kan innebære.

HVA ER MATEMATISK RESONNERING OG ARGUMENTASJON[1]?

I arbeid med matematikk utvikler vi hele tiden ulike matematiske påstander som handler om egenskaper ved matematiske objekter og/eller relasjoner og sammenhenger mellom ulike objekter. Med matematiske objekter mener vi alt som vi studerer i matematikk: tall, figurtall, geometriske former, ligninger, funksjoner, algebraiske strukturer, etc. Noen eksempler på matematiske påstander er «tallet fem er mindre enn tallet åtte», «alle figurer på tavla er trekanter», eller «det finnes uendelig mange primtall». Matematiske påstander kan også være på formen «løsning på denne oppgaven er 14» eller «min løsningsstrategi er rett», da slike påstander i grunnen også handler om noen matematiske objekter eller relasjoner mellom dem. Noen matematiske påstander er sanne, andre er usanne.

Matematisk resonnering innebærer to ulike typer prosesser (Jeannotte & Kieran, 2017). Den første typen prosesser handler om å lete etter likheter og ulikheter og å utvikle matematiske påstander. Den andre typen prosesser handler om å finne ut om påstandene er sanne eller ikke, og hvorfor. Det er den siste typen prosesser, det å finne ut om hypoteser er sanne eller ikke, vi kaller for argumentasjon. Dersom argumentasjonen tilfredsstiller noen bestemte krav, kalles den et bevis.



[1] Teksten bygger på kapittel 5 i QED, skrevet av Enge og Valenta i 2021.

EKSEMPEL TELLE I KOR MED STEG 4 FRA 5

På et 5.trinn planlegger læreren å be elever om å telle i kor i steg på 4, med start i tallet 5, og hun planlegger å notere tallene på tavla i form av en tabell med rader på fem, som vist nedenfor. Læreren har videre tenkt å spørre elevene om de ser noe mønster blant tallene.

5	9	13	17	21
25	29	33	37	41
45	49	53	57	61
65	69	73	77	81

Aktiviteten gir rike muligheter for resonnering. Det er ulike matematiske påstander som kan komme frem under arbeidet, som for eksempel:

- «Alle tall i tabellen er oddetall» og «De fire tallene i første kolonne slutter alle på 5», de kommer fram gjennom *identifisering av mønster*.
- «Alle tall i denne tellingen (i steg på 4, fra 5) vil være oddetall, uansett hvor langt vi teller» og «Alle tall i første kolonne vil slutte på 5 uansett hvor langt vi fortsetter å telle» er påstander som omhandler mer enn det som kan observeres i tabellen, og er resultat av en *generalisering*.
- «9 og 29 har samme siffer på enerplassen» og «29 har to flere tiere enn 9» er påstander man kommer frem ved å *sammenligne*.
- Påstanden «Alle tall i tabellen er oddetall» kommer frem gjennom identifisering av mønster, men også gjennom å vurdere tall ut fra om de er partall eller oddetall, altså *klassifisering.*

Noen matematiske påstander er åpenbart sanne eller åpenbart usanne i en klasse. Et eksempel på en påstand som er åpenbart sann på et 5.trinn, kan være at tallet 29 har to tiere mer enn tallet 9. Det er derimot ikke så åpenbart om påstanden «alle tall i første kolonne vil slutte på 5 uansett hvor langt vi fortsetter å telle» er sann eller ikke, da sier vi at påstanden er en *hypotese*. Vi kan ikke være sikre at det mønsteret vi har lagt merke til i starten av tellingen vil fortsette. For å være sikker på at det vil fortsette, må det undersøkes mer hvorfor mønsteret oppstår. Noen påstander er kanskje ikke åpenbart sanne eller usanne, men de er blitt tidligere undersøkt i felleskapet og slikt sett er det ikke tvil om dem. Et slikt eksempel på 5.trinn kan være påstanden «tall som slutter på 5 er oddetall». Det er derimot ikke sikkert at den samme påstanden er blitt undersøkt på et 2.trinn som nettopp har kommet i gang med arbeid om partall og oddetall.

Matematisk argumentasjon handler om å overbevise seg selv eller andre om at en matematisk påstand er sann eller ikke, og hvorfor. For å argumentere, prøver man gjerne å søke etter noen faktaopplysninger og forklaringer i det man vet fra før, men også etter støtte i fasit, eller hos lærer eller medelever. Et argument kan være mer eller mindre overbevisende, og det trenger ikke å være matematisk gyldig. For eksempel vil det siste, å sjekke med fasit eller med lærer eller andre elever, kunne være overbevisende, men betraktes ikke som et matematisk gyldig argument. Argumentet «alle tall i tabellen er oddetall, derfor må det være bare oddetall uansett hvor langt vi teller videre også» i aktiviteten i eksempel 2 er et argument som kan sies å være noe mer matematisk enn å sjekke med fasit, men det er likevel ikke et matematisk gyldig argument. Det at tallene så langt er oddetall, medfører ikke nødvendigvis at det vil fortsette slik, så argumentet gjør påstanden mer sannsynlig, men ikke nødvendigvis sant.

Noen argumenter, som oppfyller visse krav, kan kalles **matematiske bevis** (Stylianides, 2007). Bevis er et argument som bygger på **korrekte** definisjoner og allerede kjente sammenhenger, som har en **gyldig**

argumentasjonsform og en **passende uttrykksform**. Både utgangspunktet i bevis, i argumentasjonsformer og i uttrykksformer er avhengig av elevers tidligere kunnskap og erfaring og vil være forskjellig fra trinn til trinn, og klasse til klasse. Samtidig er det slik at utgangspunktet i argumentet skal være matematisk korrekt (et argument som starter med at partall er tall som består at to like sifre slik som 22, 33 osv., kan ikke være korrekt i noen klasser), og argumentasjonsformen skal være matematisk gyldig slik en matematiker ville vurdert det. Vi ser nærmere på matematisk gyldige og ugyldige argumentasjonsformer.

ARGUMENTASJON OG BEVIS FOR ULIKE TYPER HYPOTESER

Det finnes mange ulike argumenter og mange ulike bevis for gyldighet av en og samme hypotese. I dette avsnittet skal vi se nærmere på hvordan argumentasjon og bevis for hypoteser som kan være relevante for barnetrinnet kan se ut, og hvordan bevis kan variere med hensyn til hva en i) tar utgangspunkt i, ii) hvilken argumentasjonsform en bruker og iii) hvilken uttrykksform en bruker.

I arbeid knyttet til bevis på barnetrinnet kan vi skille mellom oppgaver knyttet til hypoteser som omhandler (Stylianides & Ball, 2008):

- uendelig antall eksempler (slik som *summen av to partall er alltid et partall*). Vi kaller denne typen hypoteser for *generelle* hypoteser,
- endelig mange eksempler (slik som *det er akkurat 6 måter å ordne tre personer i en rekke*), og
- et enkelt eksempel (slik som *produktet av 12 og 30 må være lik produktet av 24 og 15*),

Ulike typer hypoteser medfører noe ulike framgangsmåter og utfordringer i arbeid med bevis. Vi strukturerer derfor teksten under ut fra de tre hypotesetypene.

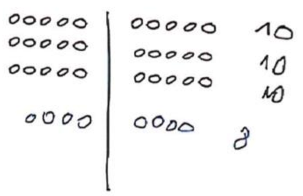
GENERELLE HYPOTESER

En generell hypotese omhandler uendelig mange objekter og utvikles gjerne ved at man ser etter likheter og forskjeller mellom ulike objekter og identifiserer et mønster eller en sammenheng. Det kan skje under arbeid med oppgaver som er spesielt designet for at det skal arbeides med generelle hypoteser, eller i arbeid med oppgaver som ikke opprinnelig har det formålet. Gabriel Stylianides (2008) skiller mellom fire ulike typer argumenter for en generell hypotese, to av dem er matematisk gyldige, og to er ikke det.

Matematisk gyldig (bevis)	**Matematisk ikke gyldig (ikke-bevis)**
Generisk eksempel	Empirisk argument
Generell logisk slutning	Redegjørelse

EKSEMPEL PÅ ULIKE TYPER ARGUMENTER

Elever på 6.trinn har fått i oppgave å finne ut om hypotesen «Alle hele tall som slutter på 8 er partall.» stemmer. Under ser du hvordan noen elever har svart på oppgaven.

Kari	Olive
18:2 =9 98:2=49 168:2=84 2458:2=1229 Det er alltid delelig med 2. Så det er sant.	 Ta 38. Hver tier i 38 kan deles i to like store deler (5+5), og så er det 8 til slutt, og det kan deles i to også (4+4).

Efram	Nils
Ja, det stemmer. Det er fordi 8 er et partall.	Ja, det stemmer. Et tall som slutter på 8 har består av en 8-er, og så tiere. Det kan være mange tiere slik at det blir hundrere, tusener osv. (men det er bare masse tiere). Hver tier er delelig med 2 (det blir to femmere) og 8 er også delelig med 2 (det blir to firere). Så hele tallet er da delelig med 2.

Empirisk argument

Kari har sjekket på noen eksempler at hypotesen stemmer. En argumentasjon som kun baserer seg på utprøving av en generell hypotese med et endelig antall eksempler kalles *empirisk argument*. Det er ikke et gyldig matematisk bevis. Vi vet at elever ofte tyr til empiriske argumenter, og at det er utfordrende for dem å se hvorfor disse ikke er gyldige.

Det at en hypotese som omhandler uendelig mange eksempler stemmer for noen eksempler, trenger ikke å bety at det alltid vil gjelde som vi skal nærmere på senere. Selv om det ikke er gyldig, er et empirisk argument en type argumentasjon elever ofte bruker, og det kan være et godt utgangspunkt som kan utvikles videre til gyldige bevis.

Redegjørelse

Argumentet til Elfram er noe mer og annet enn empirisk argument. Ham peker på en egenskap som har betydning for sammenhengen i hypotesen, nemlig at det 8 er et partall, men han sier ikke noe om hvordan og hvorfor det må da medføre at et helt tall som slutter med 8 er et partall. Det er et mangelfult argument som ofte kalles redegjørelse.

Generisk eksempel

Bruk av et generisk eksempel er en måte å argumentere på der man bruker et konkret eksempel/objekt, men på en generell måte, for å se hva som skjer og hvorfor. I argumentet må man eksplisitt framheve og argumentere for at tilsvarende vil skje på alle andre eksempler. Bruk av et generisk eksempel er en matematisk gyldig argumentasjonsform.

Vi ser at Olive har mye av det som trengs for et generisk eksempel. Hun tar utgangspunkt i 38 og trekker frem strukturen i tallet: at det kan ses som bestående av tre tiere og en 8-er. Hun bruker en tegning for å illustrere hvordan hver av tiere kan deles i to like store deler, og det samme kan 8-eren. Det som mangler for at dette skal være et generisk eksempel er at hun argumenterer for at tilsvarende vil skje på alle andre hele tall som slutter på 8. Andre hele tall som slutter på 8 vil ha flere eller færre tiere enn 38 (noen vil ha hundrere osv, med de består også at tiere) og alle de vil kunne legges på videre i illustrasjonen og deles i to like store deler. Så den ideen med å utnytte strukturen «tiere og enere» Olive bruker på 38, vil kunne gjelde for alle andre eksempler.

Generell logisk slutning

Argumentet til Nils er en generell logisk slutning og er et gyldig argument. Han bruker den samme ideen som Olive og bruker den samme strukturen av hele tall, men hans argument tar ikke utgangspunkt i et konkret eksempel.

Generelle logiske slutninger er en argumentasjonsform man arbeider mye med som matematiker. Det utvikles generelle resonnement («for alle eksempler omfattet av hypotesen») som bygger på definisjoner og sammenhenger som allerede er kjente for det gitte fellesskapet. Det at de er generelle innebærer gjerne bruk av algebraiske symboler, men det det er ikke alltid nødvendig slik argumentet til Nils viser.

HYPOTESER SOM OMHANDLER ENDELIG MANGE EKSEMPLER

Noen matematiske oppgaver handler om å undersøke en situasjon og finne alle mulige svar. Eksempler på slike oppgaver er:

- Jeg har åtte norske mynter i lomma. Hvor mye penger kan jeg ha? Finn alle mulige svar.
- I en dyrebutikk har de åtte hamstre og to hamsterbur. Hvordan kan hamstrene være fordelt på burene? Finn alle måter.
- Hvis du skal legge sammen to tall fra tabellen nedenfor, hvilke summer kan du få? Begrunn at du har funnet alle.

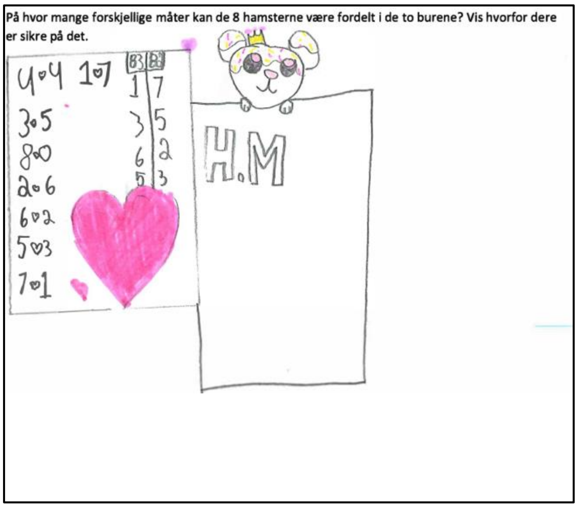
1	2
4	8

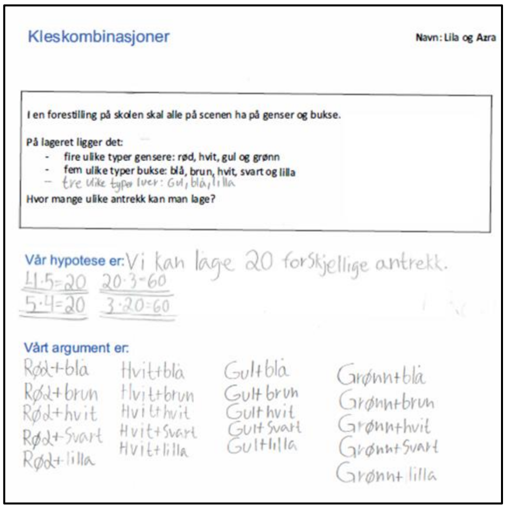
Et svar på en slik oppgave kan da betraktes som en hypotese om endelig mange eksempler. I oppgaven om hamstre kan et svar være: «Det er åtte ulike måter hamstrene kan være fordelt på.» For å være sikker på at hypotesen stemmer, må man vise de åtte ulike måtene som finnes, men også at det ikke finnes flere andre måter enn de åtte.

Hypoteser som omhandler endelig mange eksempler, kan også handle om andre egenskaper enn «alle mulige svar», for eksempel:

- Alle primtall som er større enn 3, men mindre enn 100, er én unna et tall i 6-gangen.

For å bevise at en slik hypotese ikke er sann, kan man prøve å finne et moteksempel, akkurat som for generelle hypoteser. For å bevise at hypotesen er sann, kan man bruke en generell logisk slutning eller et generisk eksempel slik som for generelle hypoteser. Men siden hypotesen omhandler et endelig antall eksempler, er systematisk utprøving av alle eksemplene også en mulig tilnærming som er matematisk gyldig. Noen elever har svart på oppgaven om åtte hamstre og to bur som nedenfor til venstre.





Elevenes opplisting er noe usystematisk og da kan det skje at noen muligheter ikke er med. For å argumentere for, og være sikker på at man har tatt med alle kreves det systematikk. Elevene i eksemplet til høyre bruker systematisk opplisting til å argumentere for at de har funnet alle kombinasjoner.

Argumentasjon som omhandler enkelteksempler

Svært mange oppgaver i skolematematikken går ut på å finne et bestemt tallsvar, og ikke en generalisering. Eksempler på slike oppgaver er:

- 12 + 67 = ?
- Hvor mye får hver elev hvis 5 pizzaer skal fordeles likt mellom 25 elever?
- Hvor langt kan en bil kjøre hvis den har 18 liter i tanken?
- Hvor mye mer er 12· 11 enn 12· 9?

Hvis svaret på en slik oppgave ikke er åpenbart og framgangsmåten ikke er kjent, kan løsningsforslag på oppgaven betraktes som en hypotese som må undersøkes mer for å finne ut om den er sann eller ikke sann, altså argumenteres for og bevises. I LK20 står det at elevene bør argumentere for løsninger og fremgangsmåter, og det handler om mer enn å bare regne ut et svar.

Elever er gjerne godt vant til å fortelle hvordan de kom frem til svaret. Men å argumentere for en fremgangsmåte handler ikke bare om å gjengi stegene i en prosedyre – altså *hva* man har gjort. Det handler også om å begrunne *hvorfor* stegene gir mening for å løse oppgaven: hvor tallene i utregningen kommer fra, sette ord på egenskaper som benyttes, argumentere for valg av regneoperasjon, argumentere for rekkefølgen på stegene som tas, osv.

I arbeid med problemløsningsoppgaver er fremgangsmåten og svaret ikke kjente på forhånd (per definisjon av problemløsning) og slike oppgaver gir en god mulighet til å jobbe med å argumentere, i stedet for å bare fortelle hva man har gjort. Nedenfor er et eksempel på en problemløsningsoppgave som kan brukes på 3-4.trinn, og en måte å argumentere for fremgangsmåten og resultatet.

Eksempel Argument for løsningsstrategi og resultat

La oss tenke oss arbeid med 3-4.trinn med følgende oppgave:

> Sara og Jesper selger boller og muffins på skoleavslutningen. Bollene koster 10 kroner per stykk, mens muffinsene koster 15 kroner per stykk. De selger tre ganger så mange boller som muffins. Bollesalget gir 720 kroner i kassa. Hvor mye penger får de inn totalt på salget av boller og muffins?

En besvarelse utformet som et argument kan være:

- Vi finner først ut hvor mange boller de har solgt. Siden hver bolle koster 10 kroner og de tjener til sammen 720 kroner på bollesalget, må de ha solgt 720:10=72 boller.
- Så finner vi ut hvor mange muffins de har solgt. De har solgt tre ganger så mange boller som muffins, altså er antall muffins bare en tredjedel av antall boller. Det vil si at de har solgt 72:3=24 muffins.
- Vi finner ut hvor mye penger de tjener på muffinsene ved å multiplisere antall muffinser de har solgt (altså 24) med hvor mye hver muffins koster (altså 15 kroner). Det gir 24·15=360 (siden 24·10=240, og 24·5=120, og 240+120=360).
- Til slutt legger vi sammen det de tjente på bollene og det de tjente på muffinsene, noe som gir 720+360=1080 kroner.

I besvarelsen kan vi se hvordan det blir gjort tydelig hva man starter med, hvordan man går videre, hvor tallene kommer fra, hva som er fører til hva. Det er ikke lett for elever å lære å argumentere for sine løsninger på en så tydelig måte, og læreren må prøve å fremheve hva som må til, hvordan man kan gå fram.

Det er ikke bare tekstoppgaver man skal argumentere i, det gjelder alt som er nytt og ikke åpenbart. Vi ser nærmere på et eksempel knyttet til arbeid med en regnestrategi.

EKSEMPEL GYLDIGHET AV EN REGNESTRATEGI

Elever på 2. trinn jobber med oppgaven 31 + 26. En av elevene, Mari, skriver følgende:

31 + 26 30 + 27 57

Læreren spør hvordan hun vet at svaret 57 blir rett. Mari sier: «Jeg flyttet 1 fra 31 til 26. Da blir det 30 + 27, og det er lettere å regne da – det blir 57.»

Det er klart for oss som kjenner til regnestrategien at Mari bruker en strategi som er gyldig i den gitte oppgaven og som også kan brukes generelt i addisjon av to vilkårlige tall. Hvis elevene har jobbet med strategien tidligere, og det ikke er noe tvil om at «det går an å flytte 1 mellom tallene i addisjon, summen blir den samme» er sant og hvorfor, er løsningen til Mari bare en konsekvens av det, og det er ikke nødvendig å argumentere for den mer enn hun gjør. Men hvis den strategien er noe som ikke er kjent for elevene i Maris klasse fra før, er hennes argumentasjon mangelfull. For Mari har bare fortalt *hva hun har gjort* og ikke *hvorfor det hun har gjort gir mening* og medfører at hennes hypotese («svaret er 57») er rett. Et spørsmål som kan lede videre til et gyldig matematisk argument, er: «Hvordan visste du at du kunne gjøre det slik, at det blir samme svar når du flytter 1 fra det ene tallet til det andre tallet i et addisjonsstykke?». For å klare å argumentere er det avgjørende å få fram betydningen av den involverte operasjonen gjennom en regnefortelling eller tegning. Det er først da vi kan si noe om hvorfor regnestrategien kan brukes og hvorfor den vil gi rett svar.

REFERANSER

Enge. O. & Valenta, A. (2022). Matematisk resonnering, argumentasjon og bevis på barnetrinnet. I T. S. Gustavsen, R. A. Rinvold, K. R. C. Hinna & T. Sundtjønn (Red.), *QED 1-7. Matematikk for grunnskolelærerutdanning. Bind 1.* (2.utgave, s. 507-544). Cappelen Damm Akademisk.

Kunnskapsdepartementet (2019). Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05). Slik den kunne lastes ned som pdf-fil fra hjemmesiden til Utdanningsdirektoratet i januar 2020 https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 91*(6), 1–16.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289–321.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(4), 307–332.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics,* 9–16.