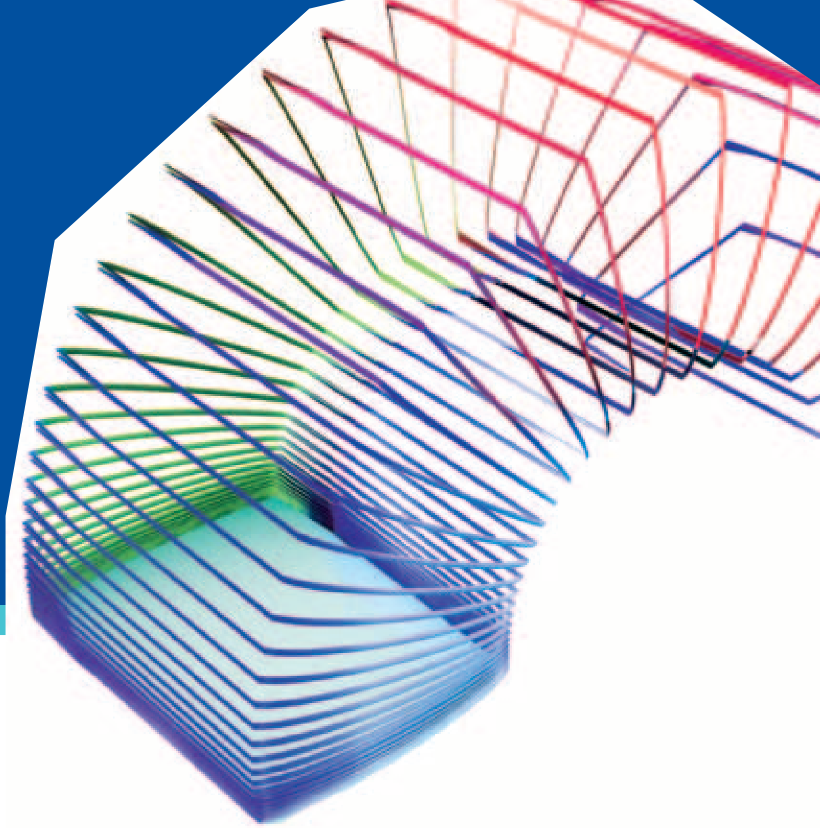


Frode Drevland

Kostnadsestimering under usikkerhet

CONCEPT TEMAHEFTE **NR. 4**

Om forfatteren:
Frode Drevland er universitetslektor ved Institutt for bygg, anlegg og transport på Fakultet for ingeniørvitenskap og teknologi, NTNU. Han var utdannet sivilingeniør fra NTNU i 2003 og har siden den tid jobbet mye med utvikling av metoder og verktøy for usikkerhetsanalyser og usikkerhetsstyring knyttet til investeringskostnad. Dette temaheftet bygger i stor grad på hans arbeid publisert i Concept-rapport nummer 10 og 13, supplert med en del nyere kunnskap. Det er i temaheftet vektlagt å presentere på en enkel måte teori og grunnleggende prinsipper som forfatteren har erfart at mange i praksis sliter med å forstå og som ofte resulterer i feil i kalkylene som gjennomføres.

Kontakt: frode.drevland@ntnu.no

 Heftet er utgitt med støtte fra forskningsprogrammet Concept.

Adresse:
Concept-programmet
NTNU
Høgskoleringen 7A
7491 TRONDHEIM

ISSN: 1891-5620 (papirversjon)
ISSN: 1891-5655 (nettversjon)
ISBN: 978-82-93253-25-9 (papirversjon)
ISBN: 978-82-93253-26-6 (nettversjon)

Informasjon om Concept-programmet: www.concept.ntnu.no

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Usikkerhet defineres gjerne som mangel på viten. Alle som har vært involvert i planlegging av investeringsprosjekter vet at det er mye man gjerne skulle visst, men som det er umulig å fremskaffe på forhånd. Denne usikkerheten som er iboende i ethvert prosjekt gjør det umulig å estimere eksakt på forhånd hvor mye et prosjekt kommer til å koste når det er ferdig. Likevel er det nettopp dette man legger opp til i tradisjonell deterministisk estimering. Man sier at hver post i kostnadsoverslaget kommer til å koste et bestemt kronebeløp, uten å forholde seg til usikkerheten knyttet til det, og summerer dette opp til et eksakt kronebeløp for hele prosjektet.

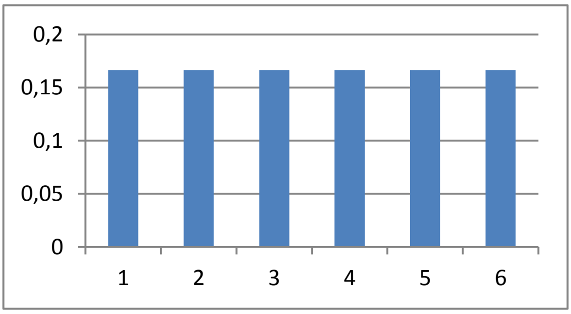
Alternativet er å gjøre kostandsestimering under usikkerhet, der man tar inn over seg at verden er usikker. Her behandler man inngangsverdiene i kalkylen som usikre. Et slikt kostnadsestimat kalles et *stokastisk* (sannsynlighetsbasert) kostnadsestimat. Fordelen med stokastisk kostnadsestimering er at det som regel gir et mye riktigere bilde av kostnadene og den tilhørende usikkerheten enn tradisjonelle deterministiske kalkyler. Ulempen er at dette stiller større krav til oppbyggingen av kalkylen, gjennomføringen av kalkyleprosessen og til de som gjør jobben med dette.

Dette temaheftet tar sikte på å gi leseren en innføring i kostnadsestimering under usikkerhet. Metodikken som presenteres her er velegnet for bruk på så vel offentlige investeringsprosjekter i milliardklassen som på oppussing av badet hjemme.

2 Sannsynlighetsfordelinger – måten vi angir usikkerhet på

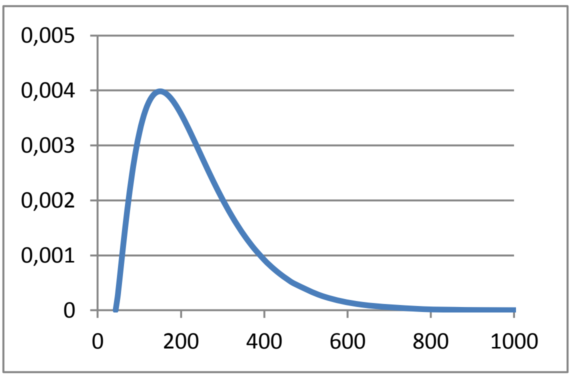
For de aller fleste vil den mest naturlige måten å angi usikkerhet på være å angi et spenn. Man sier at en størrelse er større enn X, men mindre enn Y. Dette fungerer greit i det daglige, hvis man snakker om hvor mye en kartong melk koster eller tilsvarende. Men for kostnadsestimater som skal være beslutningsgrunnlag for investeringer i million- og milliardklassen er ikke dette godt nok. Man kan si at kostnaden av en vei eller et bygg vil ligge mellom X og Y, men det er klart for de fleste at det er ikke like sannsynlig at kostnaden havner på Y som et sted mellom X og Y. For å kunne utrykke både spenn og sannsynligheter for usikre verdier er det mest hensiktsmessig å bruke en sannsynlighetsfordeling.

En sannsynlighetsfordeling angir sannsynlighetene for ulike utfall. Figur 1 viser sannsynlighetsfordelingen for en vanlig sekssidet terning. Det er en sjettedels sjanse for hvert av utfallene.



Figur 1 Sannsynlighetsfordelingen til en vanlig terning

Denne fordelingen er et eksempel på en *diskret* fordeling. Vi kan få 1 eller 2 som resultat av terningkastet, men vi kan for eksempel ikke få 1,4. Når det gjelder bruk i kostnadsoverslag så er det mer naturlig å bruke *kontinuerlige* sannsynlighetsfordelinger, og det mest vanlige er å benytte klokkeformede fordelinger slik som Normal-, Gamma- og Pert-fordelingen.



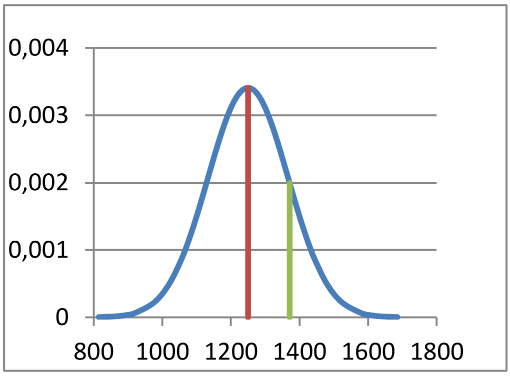
Figur 2 Eksempel på kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

På grunn av at sannsynlighetsfordelinger er såpass sentrale når man skal gjøre kostnadsestimering under usikkerhet, er det en del terminologi og egenskaper ved disse som man er nødt til å kjenne til.

Prosentkvantiler og P-verdier

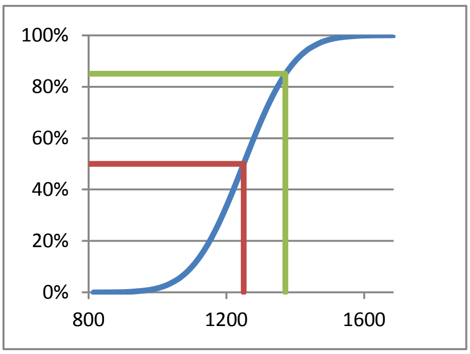
Ved bruk av kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger gir det ingen mening å snakke om sannsynligheten for et gitt utfall. Derimot kan vi snakke om sannsynligheten for at investeringskostnaden blir *lik eller lavere* enn et gitt tall, dvs. sannsynligheten for at et budsjett på dette beløpet vil holde.

Et n-prosentkvantil er den verdien som det er n prosent sannsynlig at en ikke vil overskride. 85 prosentkvantilet angir for eksempel den verdien som det er 85 prosent sannsynlig at ikke overskrides. I praksis benevner man prosentkvantilene som P85, P50 og tilsvarende.



Figur 3 – P50 (rød) og P85 (grønn) prosentkvantilene angitt på en sannsynlighetsfordeling (blå)

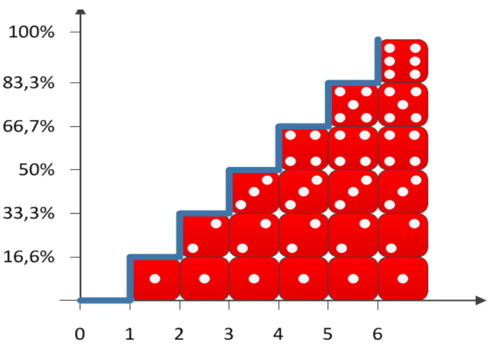
S-kurven – den kumulative sannsynlighetsfordelingen



Figur 4 - Den kumulative sannsynlighets-fordelingen til en klokkeformet fordeling

En utfordring med kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger er at de ikke er direkte lesbare. Hvis vi ser på figur 3 så gir ikke tallet på y-aksen noen mening. Hvis man vil lese av en gitt P-verdi så må man ta integralet av fordelingsfunksjonen for å beregne arealet under kurven. Dette er ikke hensiktsmessig å gjøre i de fleste sammenhenger, og man foretrekker derfor som regel å benytte kumulative sannsynlighets-fordelinger for å vise kalkyleresultater.

For klokkeformede sannsynlighets-fordelinger får den kumulative fordelingskurven en karakteristisk s-form og det er derfor vanlig å referere til denne som en s-kurve. Figur 4 viser hvordan det for en slik kurve er mulig å lese av P-verdiene direkte. Mange sliter med å forstå hva som er sammenhengen mellom den vanlige sannsynlighetsfordelingen og den kumulative. Dette er enklere å forstå når man ser på en diskret fordeling. Figur 5 viser den kumulative versjonen av terningens fordeling som var vist i figur 1.



Figur 5 - Den kumulative sannsynlighets-fordelingen til en terning

Mest sannsynlig verdi

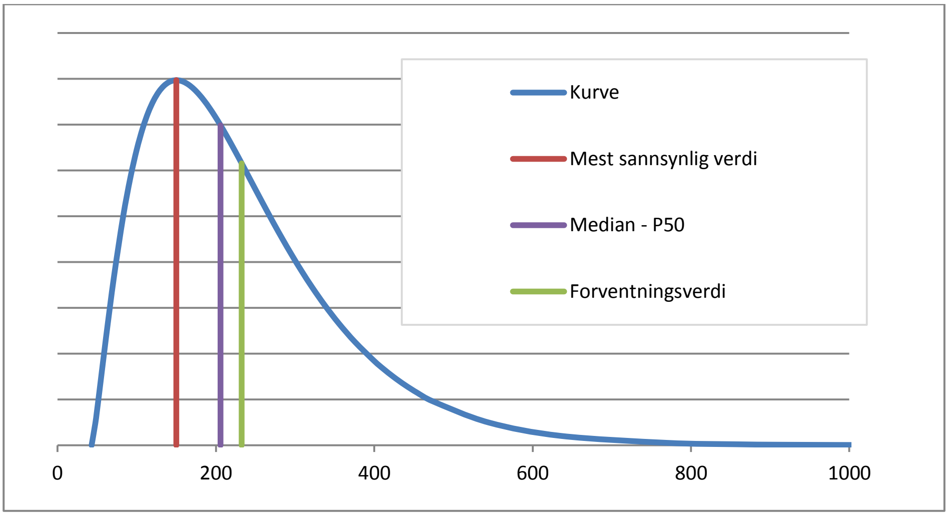
Den mest sannsynlige verdien er toppunktet i en sannsynlighetsfordeling. Dette er den enkeltverdien det er størst sannsynlighet for at vil forekomme. Det engelske begrepet for mest sannsynlig verdi er «mode».

Median

Medianen er det punktet i en sannsynlighetsfordeling der halvparten av arealet under kurven ligger til venstre og den andre halvparten av arealet ligger til høyre. Det vil med andre ord si at medianen er identisk med 50 prosent -kvantilet, eller P50.

Forventningsverdi

Forventningsverdien er tyngdepunktet i en sannsynlighets-fordeling. Den er summen av alle tenkelige utfall, hvor hver av dem er vektet med sine respektive sannsynligheter. Hvis man snakker om statistikk i stedet for sannsynlighetsregning, så er det tilsvarende begrepet aritmetisk middelverdi, eller med andre ord, hva de fleste forbinder med begrepet gjennomsnitt. I sannsynlighetsregning benevnes forventningsverdien med *E* (Expected value)

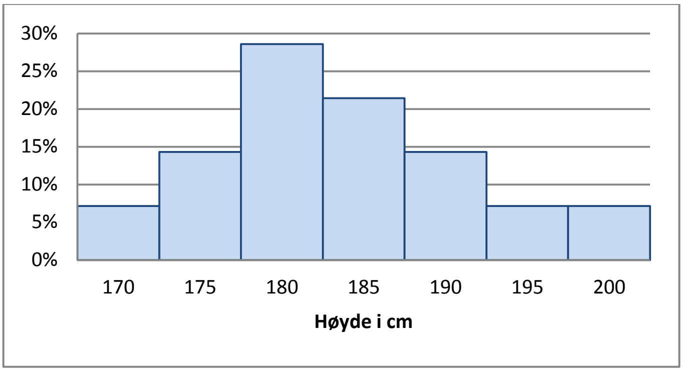


Figur 6 - Mest sannsynlig verdi, forventningsverdi og median angitt på en høyreskjev fordeling

Forskjellen på median, mest sannsynlig verdi og forventningsverdi

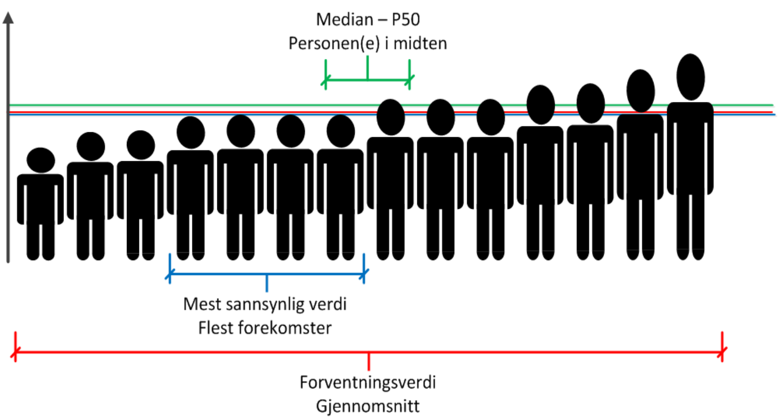
For mange er det en utfordring å forstå forskjellen mellom median, mest sannsynlige verdi og forventningsverdi. For en symmetrisk sannsynlighetsfordeling vil disse tre verdier være sammenfallende, men for skjeve fordelinger vil de være ulike. Investeringskostnaden har typisk en høyreskjev fordeling, og det er derfor viktig at man har kontroll på disse begrepene.

For å vise forskjellen skal vi bruke et eksempel. Figur 6 viste hvordan de tre verdibegrepene typisk faller i en høyreskjev fordeling. Det er imidlertid enklere å forstå forskjellen på dem med å se på en diskret sannsynlighetsfordeling i stedet for en kontinuerlig, og vi skal her se på sannsynlighetsfordelingen til høyden for en gruppe menn. Denne er vist i figur 7.



Figur 7 Sannsynlighetsfordelingen for høyden til en gruppe menn.

Hvis vi tar alle mennene som denne sannsynlighetsfordelingen representer og stiller dem opp på rad fra lavest til høyest, så vil median, mest sannsynlig verdi og forventningsverdi være som vist i figur 8.



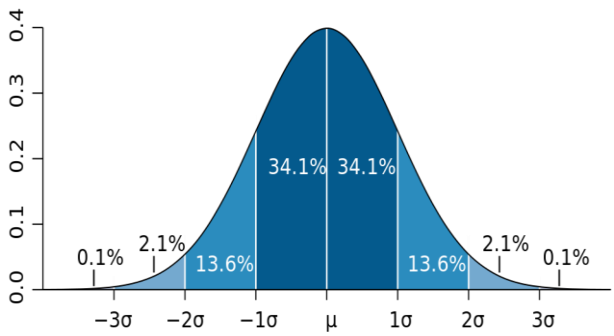
Figur 8 Forskjellen på forventningsverdi, median og mest sannsynlig verdi

Standardavvik

Standardavviket er det vanligste målet på hvor stor spredningen i en sannsynlighetsfordeling er. Standardavviket har samme benevning som forventningsverdien (f.eks. kroner eller meter) og er normalt sett i samme størrelsesorden som denne.

Standardavviket benevnes med den greske bokstaven sigma og er matematisk definert som kvadratroten av variansen. $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Figur 9 viser spredningen av verdier omkring forventningsverdien i en normalfordeling. Normalfordelingen er en av de viktigste fordelingene i statistikk og sannsynlighetsregning på grunn av at naturlige variasjoner har en tendens til å være normalfordelte. Det gjelder for eksempel eksamenskarakterer og levealder. Resultatene av stokastiske kalkyler vil også normalt sett være normalfordelte (se kapittel 6.2 for nærmere forklaring).



Figur 9- Spredningen av verdier en normalfordeling omkring forventningsverdien

Varians

Vi benytter som regel standardavvik når vi skal si noe om størrelsen på usikkerhet. Men denne er definert ut ifra variansen. Variansen er kvadratavviket fra forventningsverdien og benevnes σ^2. Det er et tall som er vanskelig å forholde seg til når en skal diskutere usikkerhet, men bortsett i enkelte beregninger er det heller ikke behov for det.

Relativt standardavvik

Relativt standardavvik angir hvor stort standardavviket et i forhold til forventningsverdien. Dette oppgis i prosent.

$$\sigma_{\mathrm{Re}l} = \frac{\sigma}{E}$$

Det gir mening når vi snakker om rene investeringskostnader, men merk at hvis forventningsverdier er nær null, for eksempel hvis man har med både inntekts- og utgiftssiden av et prosjekt og disse balanserer hverandre, så gir ikke dette tallet mening. I så fall kan det være mer interessant å regne ut usikkerheten for inntekts- og usikkerhetsiden hver for seg.

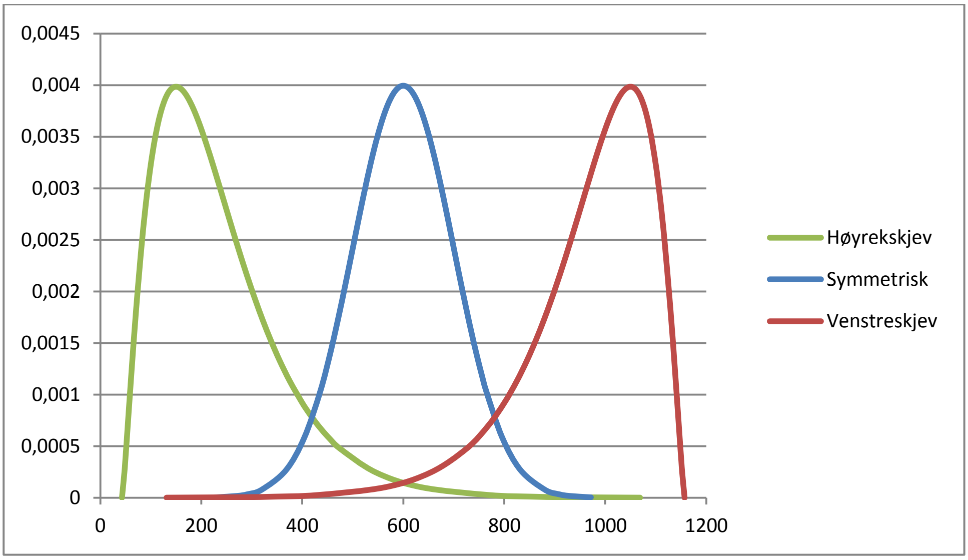
Trippelanslag / Trippelestimat

Et trippelestimat, eller trepunktsestimat, består som navnet tilsier, av tre estimater. Alle sannsynlighetsfordelinger som det er vanlig å benytte i usikkerhetsanalyser kan entydig defineres ved hjelp av tre vilkårlige punkter på kurven. Vanligvis anslår man en nedre verdi, den mest sannsynlige verdien (dvs. kurvens toppunkt) og en øvre verdi. Den nedre og den øvre verdien er alltid symmetriske kvantiler på fordelingen.

Vanligvis brukes enten P10 og P90 eller P01 og P99. I praksis har det vist seg at P10 og P90 er bedre egnet enn på grunn av at folk flest ikke er i stand til å forestille seg hvor bra eller dårlig ting virkelig kan gå i ekstreme tilfeller. Men dette er avhengig av både hvilket domene man operer innenfor, hvilken detaljeringsgrad man benytter i kalkylen og andre ting.

Skjevhet

Sannsynlighetsfordelinger som er usymmetriske sier vi er skjeve. En fordeling der toppunktet ligger mot venstre og med en lengre hale mot høyre sier man er høyreskjev og vice versa. Som nevnt har investeringskostnaden typisk en høyreskjev fordeling



Figur 10 - Sannsynlighetsfordelinger kan være høyre-, venstreskjeve eller symmetriske

3 Kalkylemodellering

Å bygge opp og strukturere en kalkyle når man skal gjøre stokastiske kostnadsoverslag kan være krevende. En stokastisk kalkyle kan ikke bygges opp på samme vilkårlige vis som et deterministisk kostnadsoverslag. Dette skyldes i hovedsak prinsippet om stokastisk uavhengighet som må ivaretas for at resultat skal være gyldig.

3.1 Stokastisk uavhengighet

I et kostnadsoverslag er postene i utgangspunktet antatt å være stokastisk uavhengige. Stokastisk uavhengighet betyr at to usikre størrelser eller hendelser ikke på noe vis påvirker hverandre. Et godt eksempel er et terningkast. Hvis man kaster to terninger på rad så er resultatet av det andre terningkastet fullstendig uavhengig av det første.

Gitt at vi har en kalkyle med to poster A og B som begge er estimert til å koste mellom 10 og 20 millioner kroner, så er det slik at hvis vi plutselig får inn informasjon som gjør at vi er helt sikre på at A kommer til å koste 20 millioner, så kan vi si at postene er stokastiske uavhengige kun hvis forventningen til hva post B kommer til å koste ikke endres. Hvis ikke så er de stokastisk avhengige, og har det vi kaller samvariasjon – postene varier i takt. Denne samvariasjon må på et eller annet hvis håndteres i kalkylen. Dette handler om å ha en korrekt kalkylemodell, men fenomenet omtales ofte som å «regne vekk» usikkerheten på grunn av at det er i beregningen dette kommet til syne.

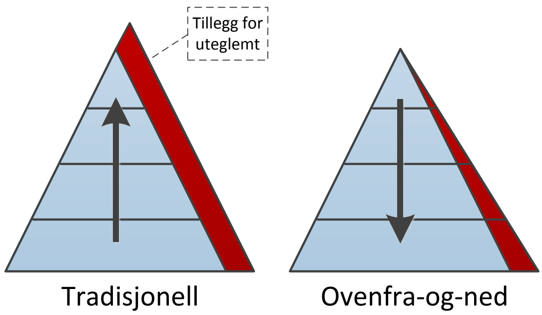
Den primære måten å håndtere samvariasjon på er å sørge for at den ikke er der i utgangspunktet. Når man lager kalkylestrukturen så bør man så langt som mulig sørge for at postene er stokastisk uavhengige. Det kan ofte være fristende å bryte opp kalkylene etter kontraktsstruktur eller lignende, men dette kan være lite hensiktsmessig hvis det er mye samvariasjon. Det er bedre å sitte igjen med et korrekt kalkyleresultat som man må gjøre noe jobb med å brekke om på for å kunne følge opp under prosjektgjennomføring, enn et resultat som er perfekt for oppfølging, men som gir et uriktig bilde av usikkerheten i prosjektet.

I tillegg til å være bevisst hvordan man deler opp kalkylen så har vi to andre metoder for å håndtere samvariasjon. Den ene er å trekke ut det som er felles for postene i egne usikkerhetsfaktorer og den andre går ut på å eksplisitt modellere samvariasjon i kalkylen. Begge disse metodene beskrevet nærmere senere i dette kapitelet.

Ovenfra og ned tilnærming

Tradisjonell kostnadsestimering benytter som regel det vi kan kalle en nedenfra-og-opp tilnærming. Her blir prosjektet brutt ned på et detaljert nivå. Man starter på bunnen, på skruer- og mutter-nivået, og summerer seg opp derifra. Svakheten med denne tilnærmingen er at det er betydelig fare for at noe blir uteglemt.

Med en ovenfra-og-ned tilnærming starter man derimot på toppen og detaljerer seg ned til et hensiktsmessig nivå. Hvis vi anslår én verdi for hele prosjektet, alt inkludert, så er det per definisjon ingenting som er utelatt. Jo mer vi detaljerer oss ned, jo større er sjansen for at ting faller mellom to stoler og blir utelatt.



Figur 11 - Tradisjonell nedenfra-og-opp tilnærming versus en ovenfra-og-ned tilnærming

I forbindelse med stokastiske kostnadsoverslag er det også en utfordring å ha kontroll på samvariasjonen i kalkylene dersom man benytter en veldig detaljert oppdeling. Det vil finnes avhengigheter på kryss og tvers som man ikke greier å modellere inn i kalkylen på fornuftig vis.

En tilnærming som enkelte benytter er å først lage en tradisjonell kalkyle og benytte et aggregert nivå av denne inn i et stokastisk kostnadsoverslag. Dette løser utfordringen med å håndtere samvariasjon, men er allikevel ikke noen god tilnærming. Man har fortsatt like stor grad av uteglemmelse og det blir ofte slik at man ikke klarer å arbeide ut ifra et felles sett forutsetninger gjennom hele kalkyleprosessen.

3.2 Kalkyleoppbygging

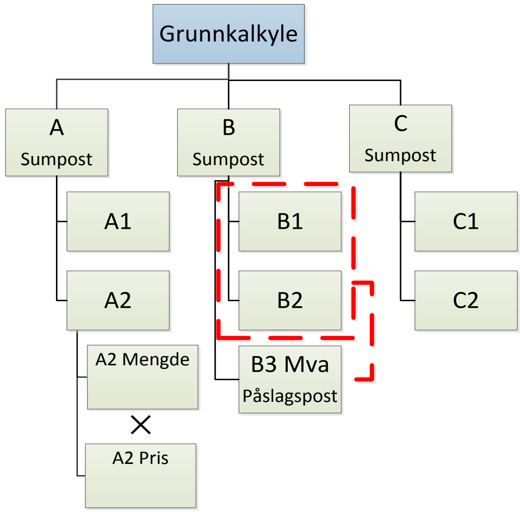
Et stokastisk kostnadsoverslag kan i teorien bygges opp på ulike vis, spesielt hvis man benytter Monte Carlo simulering som beregningsmetode (se kapittel 6). Nedenfor er det beskrevet noen prinsipper for oppbygging og «byggeklosser» som er basert på beste praksis. Det anbefales at man forholder seg til disse med mindre man har en meget god forståelse for teorien som ligger til grunn og god kontroll på hva man holder på med.

Grunnkalkyle

Grunnkalkylen er en hierarkisk nedbrytning av det som skal leveres fra prosjektet, og man bør her etterstrebe å velge en oppdeling som i størst mulig grad gir stokastisk uavhengighet mellom postene. Denne bygges opp ved hjelp av sumposter, vanlige poster og påslagsposter.

Sumposter
Alle poster som ikke er på nederste nivå i kalkylen kaller vi sumposter. De summer opp postene som ligger under de i hierarkiet.

Vanlige poster
Normalt sett så vil de aller fleste postene i en kalkyle være vanlige poster. Det vil si poster som enten er en rund sum eller et produkt av mengde og pris per enhet.



Figur 12 - Grunnkalkyle med ulike posttyper

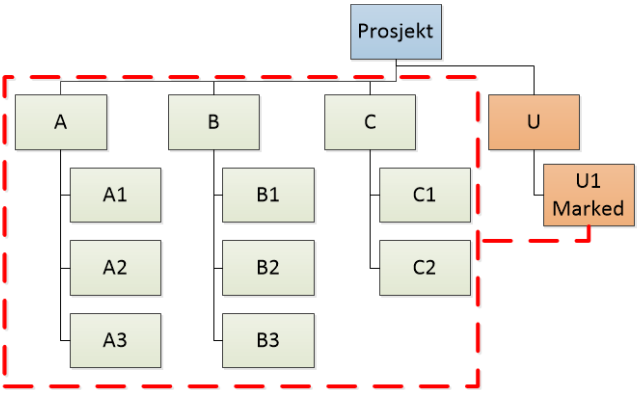
Påslagsposter
Enkelte ganger ønsker man å ha poster som er beregnet på grunnlag av andre poster. Eksempler kan være påslag for rigg eller merverdiavgift. Disse postene beregnes på grunnlag av et trippelanslag og er summen av de postene man har regnet på grunnlag av. Påslagsposter ligger ofte på samme nivå i kalkylen som postene de beregnes på grunnlag av, men de kan også være beregnet på grunnlag av poster andre steder i kalkylen.

3.3 Usikkerhetsfaktorer

Selv om man gjør en aldri så bra jobb med den grunnleggende kalkylestrukturen, så vil det normalt være helt umulig å sørge for at alle postene er fullstendig uavhengige. Det vil alltid finnes underliggende forhold som vil være felles for alle eller mange av postene, et eksempel på dette er markedsforhold. Det er derfor vanlig å trekke ut disse felles forholdene i egne usikkerhetsfaktorer som regnes som et prosentpåslag av postene det gjelder.

I den overordnede kalkylestrukturen har man gjerne en topp-post som alle usikkerhetsfaktorene plasseres under som vist i figuren.

I eksempelet i figur 13 er markedsforhold skilt ut som en egen usikkerhetsfaktor. For denne usikkerhetsfaktoren bestemmer man en basisforutsetning for markedsforhold som alle postene i grunnkalkylen blir prissatt med utgangspunkt i. Usikkerheten omkring denne forutsetningen tas inn i usikkerhetsfaktoren.

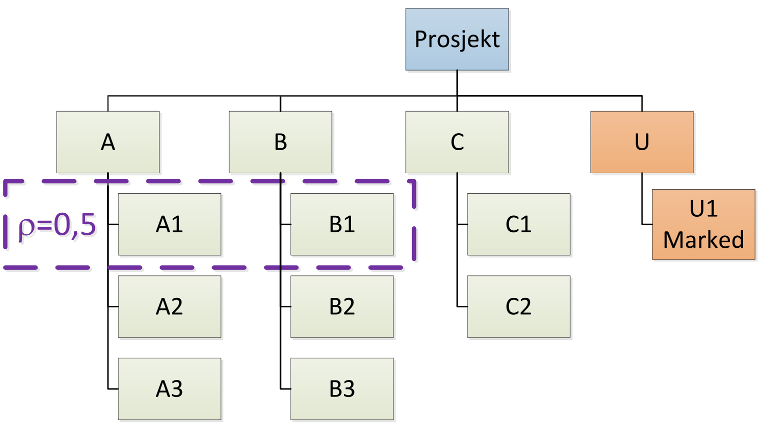


Figur 13 Usikkerhetsfaktor som virker på hele kalkylen

Usikkerhetsfaktorer angis som trippelanslag sentrert rundt null eller en, avhengig av praksis. For eksempel (-10 %, 0 %, 15 %) eller (0,90, 1, 1,15). I de fleste tilfeller vil mest sannsynlig verdi i trippelsanslaget være lik null (eller en), men i visse tilfeller kan man i løpet av kalkyle-prosessen komme frem til at mest sannsynlige verdi er noe annet enn det man har valgt som basisforutsetning for grunnkalkylen.

3.4 Samvariasjon

I tillegg til å ha en hensiktsmessig kalkylestruktur og bruke usikkerhetsfaktorer kan man, ved bruk av Monte Carlo-simulering som beregningsmetode, også fange opp samvariasjon ved å eksplisitt legge dette inn i kalkylen. Dette innebærer at man sier noe om i hvor stor grad inngangsverdiene i kalkylen samvarierer ved å angi en parvis samvariasjonskoeffisient mellom 0 og 1. Tallet 0 vil si at postene er fullstendig uavhengige og 1 vil si at de svinger i takt på perfekt vis. Eksakt hvordan dette gjøres er verktøyavhengig, men det vanligste er å benytte en såkalt samvariasjonsmatrise.



Figur 14 - Modellering av samvariasjon

Ulempen med denne måten å håndtere samvariasjon på er at det er et relativt abstrakt konsept som det kan være vanskeligere for folk å forholde seg til enn usikkerhetsfaktorer. Samvariasjon modellert på dette viset blir dessuten veldig usynlig i kalkylen sammenlignet med bruk av usikkerhetsfaktorer.

Hendelsesposter
De postene som er omtalt hittil er alle knyttet til estimatusikkerhet. Det er usikkert hva markedsprisen vil være på kjøpstidspunktet, hva mengden av noe blir og lignende. Det kan være underliggende hendelser som bidrar til å dra størrelsen på disse opp eller ned, men ingen av verdiene er hundre prosent avhengige av enkelthendelser.

Usikkerhet som er knyttet til enkelthendelser kaller vi hendelsesusikkerhet. For eksempel om en del av prosjektet skal bygges eller ikke kan være avhengig av et politisk vedtak. I kalkylesammenheng kan vi håndtere denne type usikkerhet ved hjelp av hendelsesposter. Vi må da angi en sannsynlighet for at en hendelse inntreffer og en kostnadsmessig konsekvens hvis den gjør det.

3.5 Kalkylens detaljeringsgrad

Det finnes ingen klare regler for hvor detaljert en kalkyle bør være. Men det er del retnings-linjer man bør sørge for å følge for å sikre et best mulig resultat.

Ha kontroll på stokastisk avhengighet og samvariasjon
Hovedregelen når det gjelder kalkylens detaljeringsgrad er at man aldri bør detaljere seg mer ned enn at man har kontroll på stokastisk avhengighet og samvariasjon.

Ikke detaljer ned mer enn nødvendig
Et annet hovedprinsipp er at man aldri bør detaljere ned kalkylen mer enn det som er nødvendig i forhold til formålet med kalkylen. Hvis man i hovedsak er ute etter å finne den totale prosjektkostnaden risikerer man å gå seg bort i detaljene hvis man bryter kalkylen ned på mutter- og skrue-nivå. Man klarer ikke å se skogen for alle trærne.

Ikke detaljer ned mer enn hva det er grunnlag for å gjøre
Kalkylens detaljeringsgrad bør alltid tilpasses prosjektets modningsgrad. Hvis man på et tidlig tidspunkt lager en veldig detaljert kalkyle, så innebærer dette at man må gjøre mange forutsetninger og antagelser om hvordan den endelige løsningen vil bli. Det har man ofte ikke grunnlag for å gjøre i tidligfasen, og man introduserer dermed usikkerhet i kalkylen som ikke håndteres.

Samstemme med nivå på erfaringstall
Det er viktig å klare å tallfeste postene i kalkylen. Det vil si at de må være på et nivå som harmonerer med de erfaringstallene som de som skal gi inn priser sitter inne med og kan forholde seg til.

4 Estimering av usikre størrelser

I kalkylene er alle usikre inngangsverdier gitt som sannsynlighetsfordelinger. Den vanligste formen for å definere disse fordelingene er ved hjelp av trippelestimat som fastsettes gjennom subjektive ekspertvurderinger. Subjektive ekspertvurderinger innebærer at man får eksperter på området til å anslå verdi for trippelanslagene basert på den informasjon som er tilgjengelig og sitt beste skjønn.

Alternativet til å benytte subjektive ekspertvurderinger er å benytte harde statistiske data. Ulempen her er at man må ha svært mange observasjoner å basere seg på. Dette gjør at en slik tilnærming er mer egnet for bruk i forsikringsbransjen og lignede enn i kostnadsestimering av et stort investeringsprosjekt. Det skjer ofte at noen krasjer en bil, men det bygges sjelden hengebruer her i landet.

Selv om subjektive ekspertvurderinger av og til kan fremstå litt som «tipp-på-et-tall», så har forskning vist at selv der det finnes store mengder statistiske data, så gir subjektive ekspertvurderinger som regel like gode eller bedre anslag som det ren statistisk analyse gir.

Den vanligste måten er å gjøre dette ved bruk av såkalte gruppeprosesser. Dette innebærer at man samler en gruppe folk som enten har spesiell kjennskap til prosjektet, har erfaringer fra tilsvarende prosjekter eller innehar spesialkompetanse på områder som er relevante for å anslå kostnaden av prosjektet. En fasilitator leder så gruppen gjennom en prosess med å finne trippelestimater for postene i kalkylen. Den store fordelen med å bruke gruppeprosesser er at hver deltaker bringer ulike ting til bordet, og prosessen lar de ulike ekspertene få innblikk i hverandres erfaringer og resonnement.

5 Gangen i estimeringsarbeidet

Å gjennomføre en estimeringsprosess kan være en omstendelig affære, spesielt hvis man skal benytte seg av gruppesamlinger. Det er dessverre ikke mulig å dekke dette fullstendig i dette temaheftet. Men vi har i det følgende angitt noen hovedsteg basert på beste praksis for å sikre et mest mulig riktig kalkyleresultat.

1. Avgrens kalkyle og gjøre forutsetninger

Før man kan sette seg ned for å begynne på selve kalkylen bør man sørge for en klar avgrensning av prosjektet som skal estimeres. Hva ligger innenfor og hva ligger utenfor prosjektet. Eventuelle forutsetninger som skal legges til grunn for kalkylen må også på bordet.

Vær oppmerksom på at for at kalkylen skal være valid så er det svært viktig at de forutsetningene som gjøres er reelle. Man kan ikke forutsette seg vekk fra usikkerhet som prosjektet er forventet å håndtere.

2. Sett opp struktur for grunnkalkyle

Grunnkalkylen settes opp etter prinsippene gitt i kapitel 3, men postene tallfestes foreløpig ikke. Man bør på dette tidspunktet unngå å detaljere seg for mye ned. Dette gjøres heller senere ved behov.

3. Finn usikkerhetsfaktorer

Etter at man har fått opp strukturen for grunnkalkylen er det på tide å finne usikkerhetsfaktorer, dvs. det som er felles og skal trekkes ut fra hver av postene. Her benyttes ofte idedugnad som verktøy. Mange kan også benytte lister med standard usikkerhetsfaktorer som et supplement. Å støtte seg hundre prosent på slike lister er imidlertid ikke en god ide. Da risikerer man at usikkerhet som er særegen for prosjektet ikke fanges opp.

Ved bruk av idedugnad vil man som regel få opp en mengde momenter som må grupperes i et mindre antall faktorer. Igjen så er hovedregelen at man bør sikre stokastisk uavhengighet mellom faktorene. Samtidig bør man ikke ha for få faktorer da dette gjerne innebærer at det vil finnes usikkerhet som ikke blir fanget opp.

4. Definer basisforutsetning for hver usikkerhetsfaktor

Når man benytter usikkerhetsfaktorer i kalkylen er ideen å trekke denne usikkerheten ut av grunnkalkylen. For å da kunne kostnadssette grunnkalkylen korrekt er man avhengig av å først ha en basisforutsetning på plass for hver av usikkerhetsfaktorene. For eksempel hvis vi velger å trekke ut markedsforhold som en usikkerhetsfaktor, så skal usikkerheten knyttet til dette ligge på faktoren, mens alle postene i kalkylen prises ut fra en grunnforutsetning om markedets utvikling.

5. Tallfest grunnkalkylen

Når basisforutsetningene for hver usikkerhetsfaktor er låst kan man tallfeste grunnkalkylen, det vil si at man går inn på hver post og angir trippelestimat. Man bør her passe på å alltid gjøre en reell vurdering av usikkerhetspredningen på hver post og unngå å bruke sjablongmessige tilnærminger, slik som å bare angi ekstremverdiene som +/- 10% av mest sannsynlig verdi.

6. Vurder og tallfest usikkerhetsfaktorer

Etter at grunnkalkylen er tallfestet er det på tide å vurdere og tallfeste usikkerhetsfaktorene. Det vil si at man vurderer hva som kan skje i forhold til basisforutsetningen som er benyttet i grunnkalkylen og hvor mange prosent fra eller til dette vil utgjøre.

7. Vurder samvariasjon

Forutsatt at man benytter en beregningsmetode og et verktøy som tillater modellering av samvariasjon, så er dette tidspunktet å gjøre det på. Etter at man har jobbet seg gjennom hele kalkylen og tallfestet postene kan man vurdere om det fortsatt er avhengigheter mellom postene som ikke er fanget opp og, hvis det er det, legge inn samvariasjon i kalkylemodellen.

8. Beregn

Med mindre man benytter penn og papir, så består dette steget som regel bare av å trykke på en knapp og vente mens simuleringen kjøres.

9. Vurder resultat

Etter at man har beregnet kalkylen så må man vurdere om resultatet man har fått er brukbart og rimelig. Er usikkerheten innenfor de krav som er stilt og, kanskje enda viktigere, er den stor nok? Det har vært tilfeller der man har kommet ut med en usikkerhet på under fem prosent på prosjekter vurdert ved beslutning om finansiering, noe som vanligvis er fullstendig urealistisk.

10. Raffiner

Hvis kalkyleresultatet ikke er akseptabelt så må man gå tilbake og gjøre noe. Er usikkerheten for høy i forhold til de kravene som er stilt så må man se på muligheten for å hente inn mer informasjon for å redusere usikkerheten knyttet til inngangsverdiene og for å eventuelt kunne detaljere kalkylen ytterligere. Merk at man bør aldri dele opp poster, fjerne usikkerhetsfaktorer eller lignende kun med det mål for øye å redusere usikkerheten i anslaget. Med mindre man sitter på informasjon som tilser at dette er riktig å gjøre, så har man bare fjernet usikkerheten på papiret. Den er «regnet vekk», men usikkerheten har ikke forsvunnet fra prosjektet av den grunn.

Hvis derimot den totale usikkerheten viser seg å være for lav i forhold til det man anser som normalt, så er sannsynligvis årsaken at man ikke i stor nok grad har sørget for stokastisk uavhengighet og ikke har håndtert samvariasjon godt nok i kalkylen. Man må da gå tilbake og vurdere kalkylestruktur, bruk av usikkerhetsfaktorer og modellering av samvariasjon på nytt.

En annen mulig årsak til lav usikkerhet kan være at trippelestimatene for postene er for smale, noe som tyder på at prosessen ikke har vært optimalt gjennomført med tanke på å tallfeste postene i kalkylen.

6 Regning med usikre størrelser

Det finnes to prinsipielle måter å beregne stokastiske kostnadsoverslag på; ved bruk av analytiske metoder og ved bruk av simuleringsmetoder.

Ved bruk av analytiske metoder beskrives kostnadene for hvert element ved et matematisk uttrykk. Hver av kostnadene regnes så i hop til et nytt uttrykk som gir fordelingen av mulige utfall. Å modellere og regne en kostnadsanalyse ved bruk av eksakte matematiske sannsynlighetsfordelinger og beregningsmetoder er både meget tidkrevende og krever betydelige matematiske ferdigheter. Trinnvis kalkulasjon er en analytisk metode der man benytter tilnærmingsformler som gir et svar som er tilstrekkelig nøyaktig i kostnadsestimeringsøyemed. Metodikken ble opprinnelig utviklet som et regneverktøy for bruk i den såkalte Trinnvismetoden for kostnadsestimering, derav navnet Trinnvis kalkulasjon.

Monte Carlo-simulering er mer en "rå-makt"-metode i forhold til Trinnvis kalkulasjon. I stedet for å regne gjennom kalkylen én gang regner man gjennom den fra noen hundre til flere tusen ganger. Det vil si, man får naturligvis en datamaskin til å gjøre det for seg. For hver gjennomregning trekkes en tilfeldig verdi ut fra hver av sannsynlighetsfordelingene og benyttes i beregningen. Med andre ord for hver gjennomregning "kaster" datamaskinen "terning" for å finne ut hvilken verdi den skal bruke for en gitt post. Datamaskinen vil for hver gjennomregning ta vare på den beregnede investeringskostnaden (og evt. andre tall man er interessert i). Etter at simuleringen er kjørt ferdig vil den da ha et statistisk grunnlag for utarbeide en sannsynlighetsfordeling for sluttsummen og andre tall man måtte ønske å få ut.

6.1 Trinnvis kalkulasjon versus Monte Carlo-simulering

Per i dag i Norge så er Monte Carlo-simulering den mest anvendte beregningsmetoden for usikkerhetsanalyser. Resultatene man får fra å bruke Monte Carlo-simulering og Trinnvisformlene er i praksis de samme forutsatt samme modelloppbygging. Fordelen med Monte Carlo-simulering er at man står langt friere med tanke på hvordan man bygger opp modellen, hvilke fordelingsfunksjoner man benytter og muligheter til å korrigere for samvariasjon. Men dette stiller igjen langt større krav til den som skal utarbeide kalkylene. Unntaket her er enkelte verktøy, slik som Statens vegvesens Anslag 4.0, der man har lagt opp et mer rigid system for kalkylestruktur og har begrenset muligheten for valg av fordelingsfunksjoner, antall iterasjoner etc. for å abstrahere vekk noe av kompleksiteten ved metodikken.

Tilgang på programvare er et annet ankepunkt med Monte Carlo simulering. Den er som regel enten relativt dyr[1] eller ikke tilgjengelig for allmennheten. En fordel med å bruke trinnvisformlene er at man kan klare seg med et vanlig regneark eller sågar penn og papir.

[1]En lisens for å bruke @Risk på en PC koster i skrivende stund £1085.

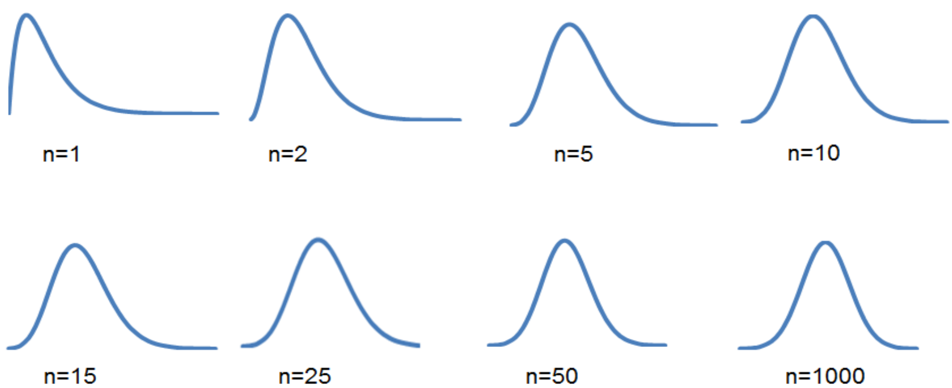
En annen ulempe med Monte Carlo-simulering er at denne metoden av mange blir sett på som en svart boks. Man putter noen tall inn i den ene enden og får noen andre ut i den andre enden, men man hverken ser eller forstår hva som foregår på innsiden. Metodikken er derfor lite egnet til å gi en intuitiv forståelse av hvordan regning med usikkerhet fungerer. Ved bruk av trinnvisformlene kan man derimot følge beregningene steg for steg og se hva som skjer.

Hvis man aldri har jobbet med kostnadsestimering under usikkerhet før, men er nysgjerrig på å prøve det ut er det fint å starte med å bruke Trinnvis-formlene. Du trenger ikke å anskaffe eller sette deg inn i ny programvare og du får opparbeidet en intuitiv forståelse for regning med usikre størrelser.

6.2 Trinnvis kalkulasjon

I Trinnvis kalkulasjon benytter man formler som baserer seg på å regne med forventningsverdier og standardavvik. Inngangsverdiene er gitt som gammafordelinger angitt ved et trippelestimat og man beregner postenes forventningsverdi og standardavvik ut ifra dette.

Å regne med forventningsverdi og standardavvik er mulig fordi man gjør en antagelse om at sluttresultatet av kalkylen vil være normalfordelt. Denne antagelsen bygger på sentralgrenseteoremet som sier at summen av et stort antall stokastiske verdier med tilfeldige fordelinger tenderer mot å være normalfordelt. Dette betyr at selv om man har fordelinger som er svært skjevfordelte hver for seg, så vil resultatet av en summasjon av dem være tilnærmet normalfordelt om man har et tilstrekkelig stort antall poster.



Figur 15 - Endring i kurveform ved summering av n-antall like poster

Vanligvis anser vi rundt 30 poster for å være et tilstrekkelig antall. Men dette fordrer at postene er i samme størrelsesorden og at det er mer summasjon enn multiplikasjon i kalkylen. (Sentralgrenseteoremet gjelder for summasjon av poster, ikke multiplikasjon. Ved multiplikasjon øker skjevheten.) For eksempel så vil en kalkyle der man har flere usikkerhetsfaktorer enn poster typisk ikke være normalfordelt.

Formelverk
I vedlegg A finnes er komplett formelverk for Trinnvis kalkulasjon med forklaring for når disse benyttes og med regneeksempler for hver av formlene.

6.3 Monte Carlo-simulering

Monte Carlo-verktøy
For å kunne benytte Monte Carlo-simulering som beregningsmetode er man avhengig av å ha egnet dataverktøy tilgjengelig. Det finnes enkelte spesialverktøy for kostnadsestimering som benytter Monte Carlo-simulering, for eksempel Statens vegvesens Anslag-program, men det mest utbredte er generelle Monte Carlo-verktøy som kjører på toppen av Excel. De meste kjente er @Risk og Crystal Ball.

Kalkyleoppsett
Å sette opp kalkyler i slike verktøy er som regel rett frem. Man setter opp kalkylen som et vanlig regneark i Excel, og angir deretter hvilke celler som skal inneholde usikre verdier og hvilke sannsynlighetsfordeling de skal benytte, samt hvilke celler som inneholder resultater man ønsker å ta vare på. Selv om man har stor frihet til å gjøre hva man vil anbefales det at man holder seg til retningslinjene gitt i kapittel 3.

Fordelingsfunksjoner
Når man benytter Monte Carlo-simulering må man selv velge hvilke fordelingsfunksjoner man skal bruke for hver usikre størrelse i kalkylen. Man benytter normalt samme type fordeling på alle postene i kalkylen. Hovedregelen for valg av fordelingsfunksjon er at den må være mulig å angi ved hjelp av et trippelestimat. Selv om de fleste fordelinger vil være entydig definert ved hjelp av et trippelestimat så er det ikke sikkert simuleringsverktøyet man benytter har innebygd algoritmer for å regne om til de egentlige parameterne for fordelingen. For eksempel så kan Gammafordelingen, som benyttes i Trinnvis kalkulasjon, normalt sett ikke angis ved hjelp av trippelestimat. Det vil si det er som regel en mulighet å angi ved bruk av tre prosentkvantiler. Men å angi P50 er ikke det samme som å angi mest sannsynlig verdi, som er det man benytter i trippelestimater. Det er da bedre å velge en annen fordeling som faktisk lar oss benytte trippelestimat som ønsket.

I de fleste simuleringsverktøy vil Pert-fordelingen være den mest egnede. Man må bare være oppmerksom på at den i utgangspunktet tar absolutte minimums- og maksimumsverdier som ytterpunkter. Man må derfor gå inn og definere at man i stedet benytter ønskede prosentkvantiler (for eksempel P10 og P90).

Iterasjoner
Når vi snakker om iterasjoner i forbindelse med simulering, så er det snakk om gjennomregninger. For hver iterasjon trekker simuleringsmotoren nye tall for alle usikre størrelser og gjør sine beregninger.

Det er viktig å kjøre et tilstrekkelig antall iterasjoner for å få et korrekt kalkyleresultat. Hva som er tilstrekkelig avhenger av kalkylens størrelse og oppbygging, men som regel er det tilstrekkelig å kjøre rundt 10 000 iterasjoner. De fleste simuleringsverktøy har også muligheten til å kjøre simuleringen frem til den konvergerer.

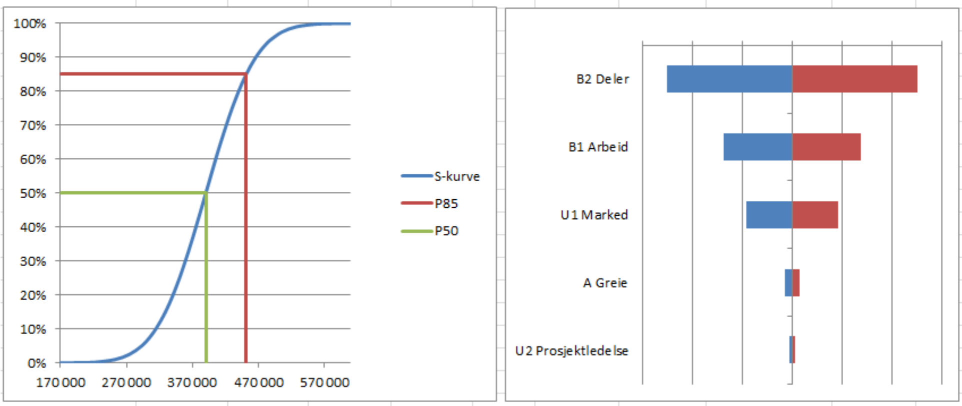
Såtall

Simuleringsmotorer bruker det man kaller en pseudo-tilfeldigtallgenerator som tar utgangspunkt i et såtall. Et såtall vil alltid produsere den samme strømmen av tilfeldige tall. Det vil si at om man kjører en simulering to ganger på rad så vil man få eksakt samme resultat selv om man bare kjører et titalls iterasjoner. Det anbefales derfor at man stiller inn simuleringsverktøyet til å bruke et tilfeldig tall som såtall. Dette gjør det lettere å se om man benytter tilstrekkelig antall iterasjoner. En simulering av en kalkyle kjørt to ganger med ulikt såtall skal gi tilnærmet identisk resultat.

6.4 Komplett regneeksempel

Et komplett regneeksempel som viser hvordan en kalkyle er satt opp etter metodikken presentert i dette temaheftet kan se ut og beregnes, kan lastes ned fra Concepts hjemmesider. Det finnes både tilgjengelig en versjon som benytter Trinnvis kalkulasjon og en versjon som er satt opp for Monte Carlo-simulering med @Risk. (Sistnevnte krever således at man har @Risk installert i tillegg til Excel for å fungere.)

	P10	Sannsynlig	P90	Forv.verdi	Std.avvik	Varians	Forv.verdi	Varians	Std.avvik	Andel
Poster										
A Greie	140 000,00	150 000,00	165 000,00	152 066,12	9 881,42	97 642 519	152 066,12	97 642 519	9 881,42	3 %
B Dingsebom							**229 073,97**	**2 716 652 081**	**52 121,51**	
B1 Arbeid							**92 859,23**	**959 304 100**	**30 972,63**	27 %
B1a Timer	100,00	120,00	200,00	144,79	39,53	1 562				
B1b Timerate	500,00	600,00	800,00	641,32	118,58	14 061				
B2 Deler							**136 214,74**	**1 757 347 982**	**41 920,73**	50 %
B2a Kostnad	5 000,00	6 000,00	8 000,00	6 413,22	1 185,77	1 406 052				
B2b Mengde	15,00	20,00	28,00	21,24	5,14	26				
Sum grunnkalkyle							**381 140,09**	**2 814 294 600**	**53 049,93**	
Usikkerhetsfaktorer										
U1 Marked	0,95	1,02	1,10	1,02	0,06	0	9 197,76	645 417 360,35	25 405,07	18 %
U2 Prosjektledelse	0,98	1,00	1,02	1,00	0,02	0	0,00	36 067 338,28	6 005,61	1 %
Sum usikkerhetsfaktorer							**9 197,76**	**681 484 699**	**26 105,26**	
Sum prosjekt							**390 337,85**	**3 495 779 299**	**59 125,12**	**100 %**

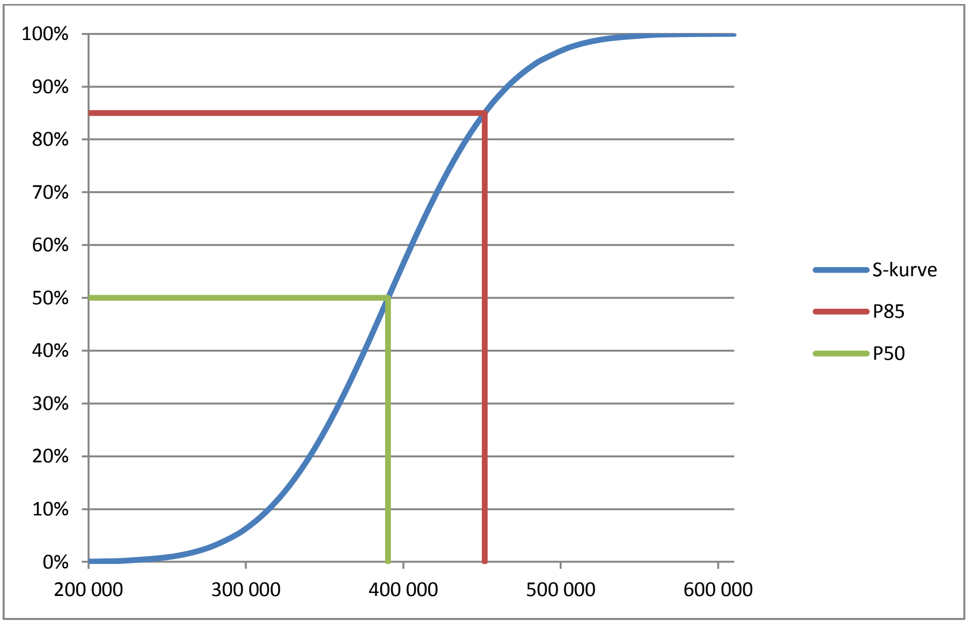


Figur 16- Skjermdump av regneeksempel i Excel som kan lastes ned fra Concepts hjemmesider

7 Kalkyleresultater

Hovedresultat vi får fra en kalkyle er en sannsynlighetsfordeling for prosjektets totale investeringskostnad. Det er vanlig å fremstille denne grafisk som en s-kurve, som beskrevet i kapittel 2. I tillegg er det vanlig å trekke ut relevante måltall for midtpunkt og spredning. Det vil typisk si forventningsverdi, median (P50), standardavvik og relativt standardavvik.

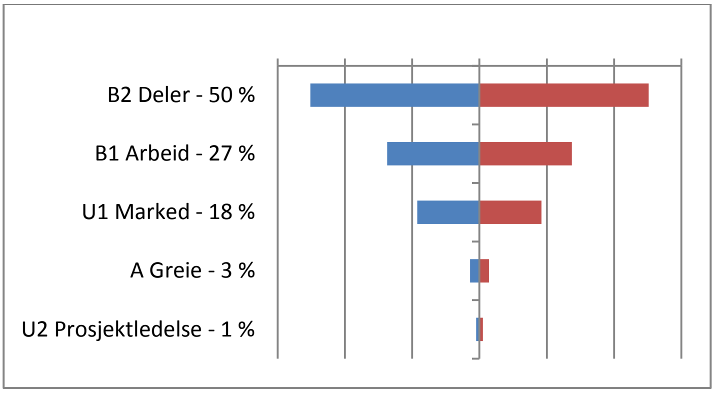
I mange organisasjoner er midlene som bevilges til et prosjekt basert på en sum på et høyere prosentkvantil enn midtpunktet. Dette for å øke sannsynligheten for at budsjettet holder selv om en skulle få negative utslag av usikkerhet, det vil si at man setter av en avsetning for usikkerhet i tillegg til det prosjektet er forventet å koste. For eksempel er det i store statlige investeringsprosjekter vanlig å benytte P85 (som er cirka forventningsverdien pluss ett standardavvik). Da er det også vanlig at dette tallet presenteres som en del av kalkyleresultatet.



Figur 9- Eksempel på S-kurve med P50 og P85

S-kurven og måltallene gir oversikt over hva prosjektet er estimert til å koste og usikkerheten omkring dette estimatet. Men i tillegg til dette er det også ønskelig å vite hva det er i kalkylen som bidrar mest til usikkerheten. Dette både for å vurdere og prioritere tiltak, og for å kunne vite hvor det eventuelt bør jobbes for å få frem ytterligere informasjon hvis usikkerheten i kalkylen er uakseptabel.

Et tornadodiagram viser en oversikt over hvilke poster i kalkylen som bidrar mest til usikkerheten og hvor stor andel av usikkerheten hver av dem bidrar til. Hvordan dette fremstilles varier med hvilken beregningsmetode som brukes. I Monte Carlo-verktøy fremkommer denne som regel på bakgrunn av en statistisk analyse. Ved bruk av Trinnvis-kalkulasjon regner man ut postens andel av den totale usikkerheten ved å ta postens varians og dele den på den totale variansen for prosjektet[2].



Figur 18 - Eksempel på tornadodiagram

Totalt sett gir s-kurven og tornadodiagrammet et godt bilde av hva prosjektet kommer til å koste, hvor stor usikkerheten omkring dette tallet er og hvor denne usikkerheten befinner seg hen i prosjektet. De er så måte gode verktøy for å kommuniserer kalkyleresultater til beslutningstakerne, forutsatt at disse er opplært i å lese denne type informasjon.

[2] Merk at denne tilnærmingen er uegnet ved bruk av Monte Carlo simulering.

Vedlegg A – Trinnvis kalkulasjon - formelverk og regneeksempel

Beregning av inngangsverdier

Ved bruk av Trinnvis- kalkulasjon antas det at alle inngangsverdier er gammafordelte og angitt ved et trippelansalg. For å regne ut fordelingenes forventningsverdi og standardavvik for bruk i videre beregninger benyttes følgende formler.

Tabell 1- Formler for beregning av forventningsverdi og standardavvik fra trippelestimat

	Forventningsverdi	Standardavvik
P1/P99	$E = \frac{P_1 + 2,9 \times M + P_{99}}{4,9}$	$\sigma = \frac{P_{99} - P_1}{4,6}$
P10/P90	$E = \frac{P_{10} + 0,41 \times M + P_{90}}{2,41}$	$\sigma = \frac{P_{90} - P_{10}}{2,53}$

E = forventningsverdi

σ= standardavvik

M = mest sannsynlig verdi

P_n = verdien av n-prosentkvantilet

Regneeksempel:

Hvis vi har en post i kalkylen gitt ved trippelanslaget (100, 200, 400), der ekstremverdiene er anslått for P10 og P90, blir utregningen av forventningsverdi og standardavvik:

$$E = \frac{P_{10} + 0,41 \times M + P_{90}}{2,41} = \frac{100 + 0,41 \times 200 + 400}{2,41} = 241,32$$

$$\sigma = \frac{P_{90} - P_{10}}{2,53} = \frac{400 - 100}{2,53} = 117,65$$

Summering

Summering av forventningsverdien av usikre størrelser er rett frem summasjon. Summering av standardavvik er også relativt enkelt, man summerer her variansen av postene og tar kvadratroten av den totale variansen for å finne standard-avviket.

I en normal kalkyle er alle poster som ikke ligger nederste nivå i kalkylehierarkiet sumposter og bergenes ved bruk av disse formlene.

Tabell 2- Formler for summering av forventningsverdi og standardavvik

	Forventningsverdi	Standardavvik
Summering	$E_{Tot} = E_A + E_B$ $E_{Tot} = E_A + E_B + \ldots + E_n = \sum_{x=A}^{n} E_x$	$\sigma_{Tot} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$ $\sigma_{Tot} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \ldots + \sigma_n^2} = \sqrt{\sum_{x=A}^{n} \sigma_x^2}$

Regneeksempel:

Gitt at vi har to poster A og B med forventningsverdi og standardavvik som angitt:

	E	σ
A	500	150
B	400	200

Så blir

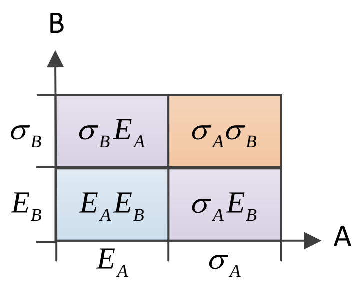
$$E_{Tot} = E_A + E_B = 500 + 400 = 900$$

og

$$\sigma_{Tot} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = \sqrt{150^2 + 200^2} = 250$$

Multiplikasjon

Å regne ut produktet av usikre størrelser er rett frem multiplikasjon, men når det gjelder multiplikasjon av standardavvik så blir det litt mer komplisert på grunn av at her vil også de usikre størrelsenes forventnings-verdier spille inn, illustrert i figuren til høyre.

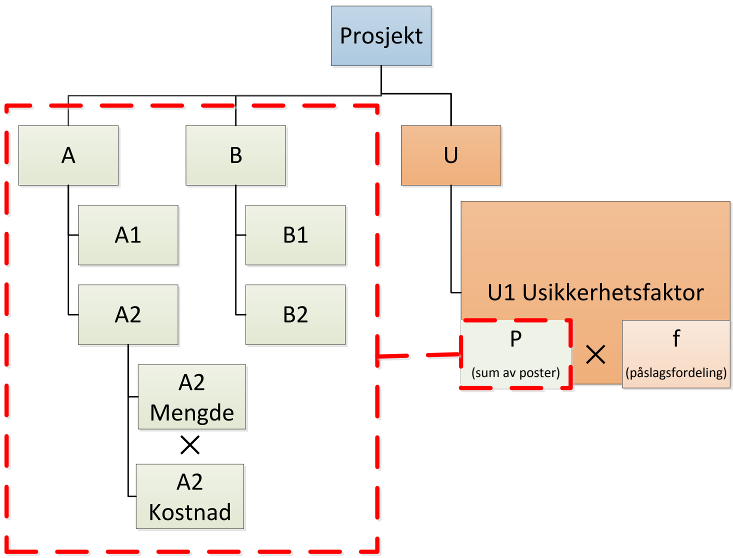


Figur 19 - Multiplikasjon av usikre størrelser

Formlene for multiplikasjon av standardavvik gjelder for «hierarkisk» multiplikasjon. Det gjelder for eksem-pel hvis man skal multiplisere mengde og pris. Hvis vi derimot har multiplikasjon som går utenfor kalkylehierarkiet, slik som ved bruk av påslagsposter eller usikkerhetsfaktorer så er man nødt til å gjøre noen triks for å få med all usikkerheten. Dette skyldes at når vi regner med usikre størrelser så er følgende tilfelle når vi skal regne ut totalen for produktet av en post (eller sum av poster) og en usikkerhetsfaktor:

$$Tot = P \times (1 + f) \neq P + P \times f$$

Grunnen til dette er at P ikke representer én verdi, men en variabel som kan innta flere verdier. Det vil si i det siste uttrykket der P forekommer to ganger, så er P i realiteten ikke en og samme post, men derimot to identiske, men stokastisk uavhengige poster. For å få med all usikkerhet for en faktor F må vi derfor først regne ut hva den totalt blir for P x f og deretter trekke ifra usikkerheten for P som allerede ligger inne i kalkylen.



Figur 20 - Hierarkisk og ikke-hierarkisk multiplikasjon i kalkylen

Tabell 3- Formler for summering av forventningsverdi og standardavvik

	Forventningsverdi	Standardavvik
Multiplikasjon	$E_{Tot} = E_A \times E_B$	$\sigma_{Tot} = \sqrt{(\sigma_A E_B)^2 + (\sigma_B E_A)^2 + (\sigma_A \sigma_B)^2}$
Multiplikasjon av faktor og sum av poster[1]	$E_F = E_P \times E_f$	$\sigma_F = \sqrt{(\sigma_P (1+E_f))^2 + (\sigma_f E_P)^2 + (\sigma_P \sigma_f)^2 - \sigma_P{}^2}$

Regneeksempel – produktet av mengde or pris:
Gitt at vi har en post med mengde A og pris B med forventningsverdi og standardavvik som angitt:

	E	σ
A	10	12
B	20	15

Så blir

$$E_{Tot} = E_A \times E_B = 10 \times 20 = 200$$

og

$$\sigma_{Tot} = \sqrt{\left(\sigma_A E_B\right)^2 + \left(\sigma_B E_A\right)^2 + \left(\sigma_A \sigma_B\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(12 \times 20\right)^2 + \left(15 \times 10\right)^2 + \left(12 \times 15\right)^2} = 335,41$$

Regneeksempel – produktet av sum av poster og faktor:
Gitt at vi har en sum av poster angitt ved P og en faktor F der sannsynlighetsfordelingen for påslaget er angitt ved f:

	E	σ
P	1000	100
f	0,02	0,1

Så blir

$$E_F = E_P \times E_f = 1000 \times 0,02 = 20$$

og

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\sigma_P (1 + E_f)\right)^2 + \left(\sigma_f E_P\right)^2 + \left(\sigma_P \sigma_f\right)^2 - \sigma_P{}^2}$$

$$= \sqrt{\left(100 \times (1 + 0,02)\right)^2 + \left(0,1 \times 1000\right)^2 + \left(100 \times 0,1\right)^2 - 100^2} = 102,49$$

Temahefter fra Concept-programmet

Hefte nr.	Tittel	Forfatter	Utgitt
1	Fleksibilitet i prosjekter – et tveegget sverd	Nils Olsson	2009
2	På sporet av relevans og levedyktighet	Ole Jonny Klakegg	2010
3	Gjøre det selv eller betale andre for jobben – Byggherrens valg av kontraktstrategi i bygg- og anleggsprosjekt	Ola Lædre	2012
4	Kostnadsestimering under usikkerhet	Frode Drevland	2013

Temahefter og andre publikasjoner fra Concept-programmet kan lastes ned fra programmets nettsider: www.concept.ntnu.no

Forskningsprogrammet Concept skal utvikle kunnskap som sikrer bedre ressursutnytting og effekt av store statlige investeringer. Programmet driver følgeforskning knyttet til de største statlige investeringsprosjektene over en rekke år. En skal trekke erfaringer fra disse som kan bedre utformingen og kvalitetssikringen av nye investeringsprosjekter før de settes i gang.

Concept er lokalisert ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet i Trondheim (NTNU), ved Institutt for bygg, anlegg og transport. Programmet samarbeider med ledende norske og internasjonale fagmiljøer og universiteter, og er finansiert av Finansdepartementet.

EX ANTE

Concept-programmet, Høgskoleringen 7A, 7491 Trondheim

Informasjon om Concept-programmet: **www.concept.ntnu.no**

ISSN: 1891-5620 (papirversjon)
ISSN: 1891-5655 (nettversjon)
ISBN: 978-82-93253-25-9 (papirversjon)
ISBN: 978-82-93253-26-6 (nettversjon)

Produksjon: www.fagtrykk.no Miljømerket trykkeri, lisensnr. 241 811