Løsningsforslag SØK 1001 H22

1

a) x^2-4 Det følger av konjugatsetningen at $x^2-4 = x^2-2^2 = \underline{\underline{(x-2)(x+2)}}$

b) $4x^2+8x+4 = 4(x^2+2x+1)$.

Det følger av 1. kvadratsetning at

$x^2+2x+1 = (x+1)^2$.

$4x^2+8x+4 = \underline{\underline{4(x+1)^2}}$

c) $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x}$ $x(x-1)$ er en felles nevner for de to leddene:

$$\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x} + \frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-1}{x-1} = \frac{x^2}{x(x-1)} + \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x^2-2x+1}{x(x-1)}}}$$

d) $\frac{1}{e^x-2} + \frac{e^x}{x^2}$ $x^2(e^x-2)$ er en felles nevner for de to leddene:

$$\frac{1}{e^x-2}\cdot\frac{x^2}{x^2} + \frac{e^x}{x^2}\cdot\frac{e^x-2}{e^x-2} = \frac{x^2}{x^2(e^x-2)} + \frac{e^{2x}-2e^x}{x^2(e^x-2)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^{2x}-2e^x+x^2}{x^2(e^x-2)}}}$$

2

a) $f(x) = \sqrt{x^2-2}$. Her må $x^2-2 \geq 0$.

$x^2-2 \geq 0 \iff x^2 \geq 2 \implies x \geq \sqrt{2}$ og $x \leq -\sqrt{2}$

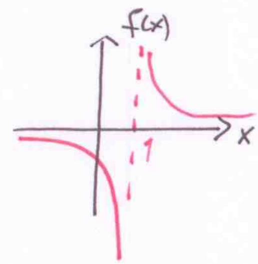
D_f : $-\sqrt{2} \geq x \geq \sqrt{2}$ eller $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$

$\sqrt{x^2-2} \geq 0$, slik at $V_f : \mathbb{R}_+$, altså alle positive tall

b) $f(x) = \dfrac{3}{3x-3} = \dfrac{1}{x-1}$

$f(x)$ er definert for alle x, bortsett fra $x=1$.

D_f : Alle $x \neq 1$.



V_f viser hvilke verdier $f(x)$ kan ta på D_f.

V_f: alle tall bortsett fra 0.

c) $f(x) = \ln(x+3)$. Her må $x+3>0$, slik at $x>-3$.

D_f: $x>-3$.

$f(x)$ kan anta en hvilken som helst verdi på D_f, slik at V_f: $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{d)}}$ Funksjonen $f(x) = -e^{-x^2}$ er definert for alle x:

Denne er ikke med på eksamen

D_f: $\mathbb{R}$.

e^{-x^2} antar bare verdier >0 $(e^{-x^2}>0)$, slik at

V_f: $(-\infty, 0)$.

Løs følgende likninger mhp x.

3

a) $2x+4=8 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$

b) $\dfrac{6x}{x^2+2}=2 \Leftrightarrow 6x=2(x^2+2) \Leftrightarrow 6x=2x^2+4 \Leftrightarrow$

$2x^2-6x+4=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(2)(8)}}{2\cdot 2}=\dfrac{6\pm\sqrt{4}}{4}=\dfrac{6\pm 2}{4}$

$\underline{\underline{x_1=2\ ,\ x_2=1}}$

c) $\dfrac{6x-3}{x^2+3}=0$ Uttrykket vil være lik 0 når

$6x-3=0 \Leftrightarrow 6x=3 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}$

d) $e^{rt}=2 \Leftrightarrow \ln(e^{rt})=\ln 2 \Leftrightarrow rt=\ln 2 \Leftrightarrow$

$\underline{\underline{t=\dfrac{\ln 2}{r}}}$

4 (4

a) $f(x) = \frac{7}{2}x^2 - 8x + \frac{1}{3}$ $f'(x) = 2 \cdot \frac{7}{2}x - 8 = \underline{\underline{7x - 8}}$

b) $f(x) = e^x \ln x$ $f'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} = \underline{\underline{e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)}}$

c) $f(x) = e^{2x^2}$ $f'(x) = \underline{\underline{4x e^{2x^2}}}$

d) $f(x) = \frac{x^2+7}{\ln x}$ $f'(x) = \frac{(2x)\ln x - (x^2+7)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$$= \underline{\underline{\frac{2x\ln x - x - \frac{7}{x}}{(\ln x)^2}}}$$

e) $f(x) = \ln(7x^2)$ $f'(x) = \frac{1}{7x^2} \cdot 14x = \underline{\underline{\frac{2}{x}}}$

f) $f(x) = \ln\left(x\sqrt{x+1}\right)$ $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \cdot \left(\sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\right)$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)}}}$$

5

a) $(x_1, y_1) = (1,1)$ og $a = 1$.

Her bruker vi ettpunktsformelen:

$$(y-1) = 1(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = x}}$$

b) $(x_1, y_1) = (1, 2)$ og $(x_2, y_2) = (2, -1)$

Her bruker vi topunktsformelen:

$$y - 2 = \frac{-1-2}{2-1}(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = -3(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{y = -3x + 5}}$$

c) $(x_1, y_1) = (1,1)$ og $(x_2, y_2) = (2,1)$

Bruker igjen topunktsformelen:

$$y - 1 = \frac{1-1}{2-1}(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$$ (en horisontal linje)

d) $(x_1, y_1) = (1,1)$ og $(x_2, y_2) = (1, 2)$

Topunktsformelen gir:

$$y - 1 = \frac{2-1}{1-1}(x-1) = \underbrace{\frac{1}{0}}_{\text{ikke definert.}}(x-1)$$

Dette må være kordinadene til en vertikal linje for $x = 1$.

a) $f(x) = 4x - e^{2x}$

$f'(x) = 4 - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow$

$2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2 = \underline{\underline{\frac{\ln 2}{2}}}$

$= \ln \sqrt{2}$

b) $f''(x) = -4e^{2x} < 0 \quad \forall x.$

Det er derfor en konkav funksjon og vi har et maksimumspunkt for $x = \frac{\ln 2}{2}$.

c) $f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 4\,\frac{\ln 2}{2} - e^{2\frac{\ln 2}{2}} = 2\ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1)$

$\underline{\underline{\approx -0{,}6137}}$

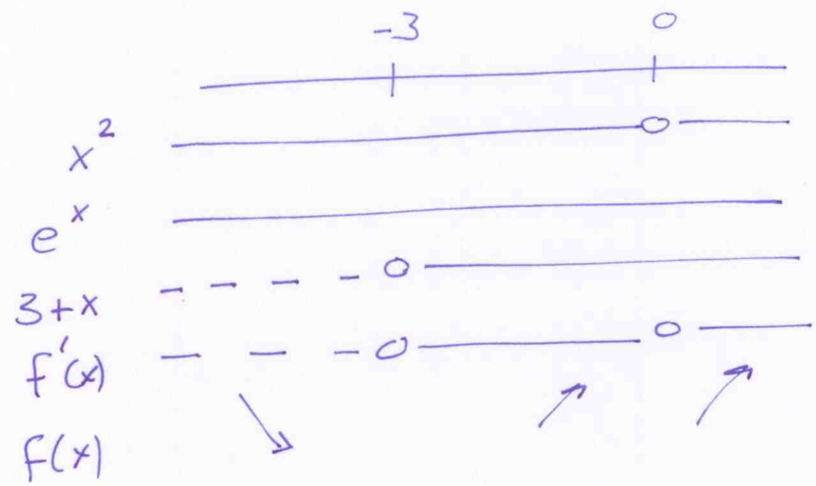
7 $f(x) = x^3 e^x$

a) $f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3+x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^x (3+x) = 0 \Rightarrow x = -3 \;,\; x = 0.$

Vi har stasjonære punkt for $x = -3$ og $x = 0$

b)



Punktet $x = -3$ er et (lokalt) minimumspunkt.

Punktet $x = 0$ er et trappepunkt.

c) Bruker at $f'(x) = e^x(3x^2 + x^3)$.

$$f''(x) = e^x(3x^2 + x^3) + e^x(6x + 3x^2)$$
$$= e^x(x^3 + 6x^2 + 6x) = x e^x (x^2 + 6x + 6) = 0$$

Løser andregradslikningen $x^2 + 6x + 6 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= -3 \pm \sqrt{3}.$$

$f''(x) = 0$ for $x = -3 \pm \sqrt{3}$ og $x = 0$.

$$f''(x) = x e^{x}\left(x-(-3+\sqrt{3})\right)\left(x-(-3-\sqrt{3})\right)$$

		$-3-\sqrt{3}$		$-3+\sqrt{3}$		0	
e^{x}	+	+	+	+	+	+	+
x	−	−	−	−	−	0	+
$x-(-3-\sqrt{3})$	−	0	+	+	+	+	+
$x-(-3+\sqrt{3})$	−	−	−	0	+	+	+
$f''(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

$f(x)$ har vendepunkt for $x = -3-\sqrt{3}$, $x = -3+\sqrt{3}$, $x=0$.

8

$f(x,y) = x^2 + y^3 + 6xy$

a)

$f_x = 2x + 6y = 0 \iff y = -\frac{1}{3}x$

$f_y = 3y^2 + 6x = 3\left(-\frac{1}{3}x\right)^2 + 6x = \frac{1}{3}x^2 + 6x$

$= \frac{1}{3}x(x+18) = 0 \iff x = 0 \,,\ x = -18$

Innsatt i uttrykket for y:

$y = -\frac{1}{3}\cdot 0 = 0$ eller $y = -\frac{1}{3}(-18) = 6.$

Vi har to stasjonære punkt: $\underline{\underline{(0,0) \text{ og } (-18,6)}}.$

b)

$f_{xx} = 2$

$f_{xy} = 6$

$f_{yy} = 6y$

	A	B	C	$AC-B^2$	
(0,0)	2	6	0	−36	Sadel
(−18,6)	2	6	36	36	lokalt min.

For punktet (0,0) er $AC-B^2 < 0 \Rightarrow$ Sadelpunkt

For punktet (−18,6) er $A > 0$ og $AC-B^2 > 0 \Rightarrow$ lokalt min.punkt.

9

maks $\ln(xy)$

ubb

$$x+3y=6$$

a) $$\mathcal{L} = \underbrace{\ln(xy)}^{=\ln x+\ln y} - \lambda(x+3y-6)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x &= \frac{1}{x} - \lambda = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda} \\ \mathcal{L}_y &= \frac{1}{y} - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 3y = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} x = 3y$$

$$x+3y=6 \Leftrightarrow 3y+3y=6 \Leftrightarrow 6y=6 \Leftrightarrow \underline{y=1} \quad (b)$$

$$x=3y \Rightarrow \underline{x=3} \quad (a)$$

Vi har et stasjonært punkt for $\underline{\underline{(3,1)}}$

Dette er et maksimumspunkt.

b) $$f(3,1) = \ln(3\cdot 1) = \underline{\underline{\ln 3}}$$

d) Vi har at $x = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{x}$.

Innsatt for $x=3$ får vi at $\underline{\underline{\lambda = \frac{1}{3}}}$