FASIT EKSAMEN SØK1001 VÅREN 2022

Oppg. 1 (10%)

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{x^3}$

$$f'(x) = \underline{\frac{2}{3}x - \frac{3}{x^4}}$$

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 e^{4x}$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x e^{4x} + \frac{3}{4}x^2 4 e^{4x}$$

$$= \frac{3}{2}x e^{4x} + 3x^2 e^{4x}$$

$$= \underline{3x e^{4x}\left(\frac{1}{2} + x\right)}$$

c) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1} = \left(e^{2x} - 1\right)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right)^{-1/2} \cdot 2e^{2x}$$

$$= e^{2x}\left(e^{2x} - 1\right)^{-1/2}$$

$$= \underline{\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}$$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{5-x^3}$

$$f'(x) = \frac{2x(5-x^3) - (x^2+1)\cdot(-3x^2)}{(5-x^3)^2}$$

$$= \frac{10x - 2x^4 + 3x^4 + 3x^2}{(5-x^3)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 + 10x}{(5-x^3)^2}$$

Oppg. 2 (4%)

$f(x,y) = \frac{4}{3}x^3y - \frac{1}{2}xy + 2y^2 + 8$

a) $f_1'(x,y) = 4x^2y - \frac{1}{2}y$

b) $f_2'(x,y) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + 4y$

Oppg. 3 (5%)

a) $f(x) = \ln(x-2)$

Def. mengde : $x-2 > 0 \Rightarrow \underline{x > 2}$

b) $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{3-2x}}$

Def. mengde : $3-2x > 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow \underline{x < \frac{3}{2}}$

Oppg. 4 (15%)

a) $x^2 - xy + 2y^2 = 14$

$\Rightarrow 2x - (y + xy') + 4yy' = 0$

$\Rightarrow 2x - y - xy' + 4yy' = 0$

$\Rightarrow (4y-x)y' = y-2x$

$\Rightarrow \underline{y' = \dfrac{y-2x}{4y-x}}$

b) Stasjonære punkt:

$y' = 0 \Rightarrow y = 2x$

Settes inn i likningen:

$x^2 - xy + 2y^2 = 14$

$\Rightarrow x^2 - 2x^2 + 8x^2 = 14$

$\Rightarrow 7x^2 = 14$

$\Rightarrow x^2 = 2$

$\Rightarrow \underline{x = \pm\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \underline{y = \pm 2\sqrt{2}}$

To stasjonære punkt: $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ og $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

c) Vertikal tangent: $y' \to \infty$

$\Rightarrow 4y = x \Rightarrow y = \frac{1}{4}x$

Punktet må ligge på kurva:

$x^2 - xy + 2y^2 = 14$

$\Rightarrow x^2 - x \cdot \frac{1}{4}x + 2 \cdot \frac{1}{16}x^2 = 14$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 = 14$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{8}x^2 = 14$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x = \pm 4} \qquad \Rightarrow \quad \underline{y = \pm 1}$$

Vertikal tangent i to punkt: $(4,1)$ og $(-4,-1)$.

Oppg. 5 (6%)

$$\text{Nåverdi} = \underbrace{2000 + \frac{2000}{1{,}025} + \frac{2000}{1{,}025^2} + \dots + \frac{2000}{1{,}025^5}}_{} + \underbrace{\frac{1200}{1{,}025^3} + \dots + \frac{1200}{1{,}025^6}}_{}$$

Geometrisk rekke med:

$a_1 = 2000$, $k = \frac{1}{1{,}025}$, $n = 6$

$$\Sigma = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$$

Geometrisk rekke med:

$a_1 = \frac{1200}{1{,}025^3}$, $k = \frac{1}{1{,}025}$,

$n = 4$

$$\Rightarrow \text{Nåverdi} = 2000 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1{,}025}\right)^6}{1-\frac{1}{1{,}025}} + \frac{1200}{1{,}025^3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1{,}025}\right)^4}{1-\frac{1}{1{,}025}}$$

$$= 11291{,}66 + 4296{,}84$$

$$= \underline{15588{,}5}$$

Oppg. 6 (8%)

a) $K = \frac{D}{r}\left((1+r)^n - 1\right)$

$= \frac{5000}{0{,}04}\left(1{,}04^{12} - 1\right)$

$= \underline{75129}$

b) $K = \frac{D}{r}\left((1+r)^n - 1\right)$

$\Rightarrow 100\,000 = \frac{8000}{0{,}02}\left(1{,}02^n - 1\right)$

$\Rightarrow 1{,}02^n - 1 = \frac{100\,000 \cdot 0{,}02}{8000}$

$\Rightarrow 1{,}02^n - 1 = 0{,}25$

$\Rightarrow 1{,}02^n = 1{,}25$

$\Rightarrow \ln 1{,}02^n = \ln 1{,}25$

$\Rightarrow n \cdot \ln 1{,}02 = \ln 1{,}25 \quad \Rightarrow n = \frac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}02} = 11{,}27$

Saldoen passerer 100 000 kr etter det 12. innskuddet.

Oppg. 7 (12%)

a) Avdrag: $\frac{450\,000}{15} = 30000$

Renter: $rK_0 = 0{,}03 \cdot 450000 = 13500$

Første terminbeløp $= \underline{43500}$

b) Avdrag: $\frac{450\,000}{15} = 30000$

Renter: $r \cdot \frac{K_0}{n} = 0{,}03 \cdot \frac{450000}{15} = 900$

Siste terminbeløp $= \underline{30900}$

c) Renteutgifter:

Aritmetisk rekke der $a_1 = 13500$, $a_n = 900$ og $n = 15$.

Totale renteutgifter: $\frac{13500 + 900}{2} \cdot 15 = \underline{108000}$

Oppg. 8 (20%)

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{3}$$

a) $f'(x) = -2x^2 + x + 6$

$f''(x) = -4x + 1$

b) Stasjonære punkt:

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + x + 6 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}}{2 \cdot (-2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{-4}$$

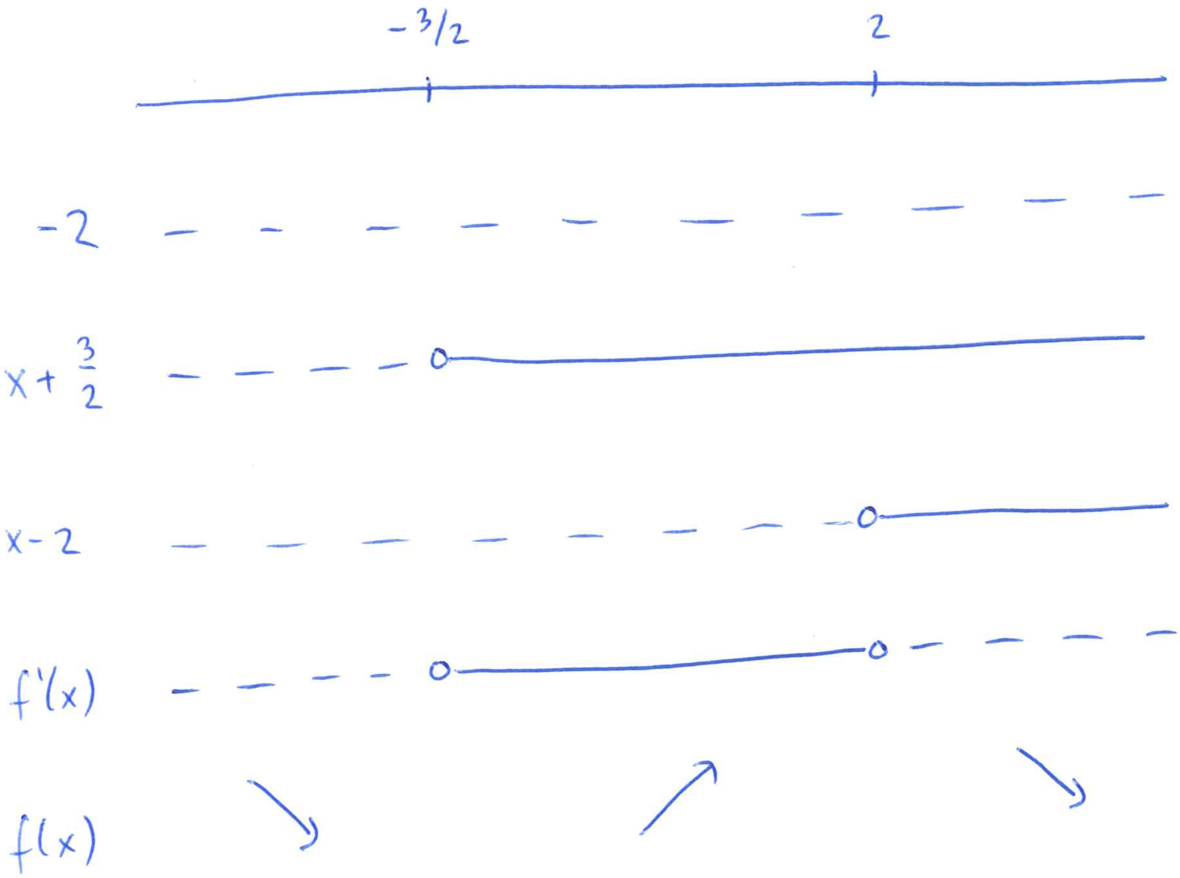
$\Rightarrow \underline{x = -\frac{3}{2}}$ og $\underline{x = 2}$

To stasjonære punkt:

$\underline{(x, y) = \left(-\frac{3}{2}, -5,29\right)}$ og $\underline{(x, y) = (2, 9)}$

Førstederiverttesten:

$$f'(x) = -2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)$$

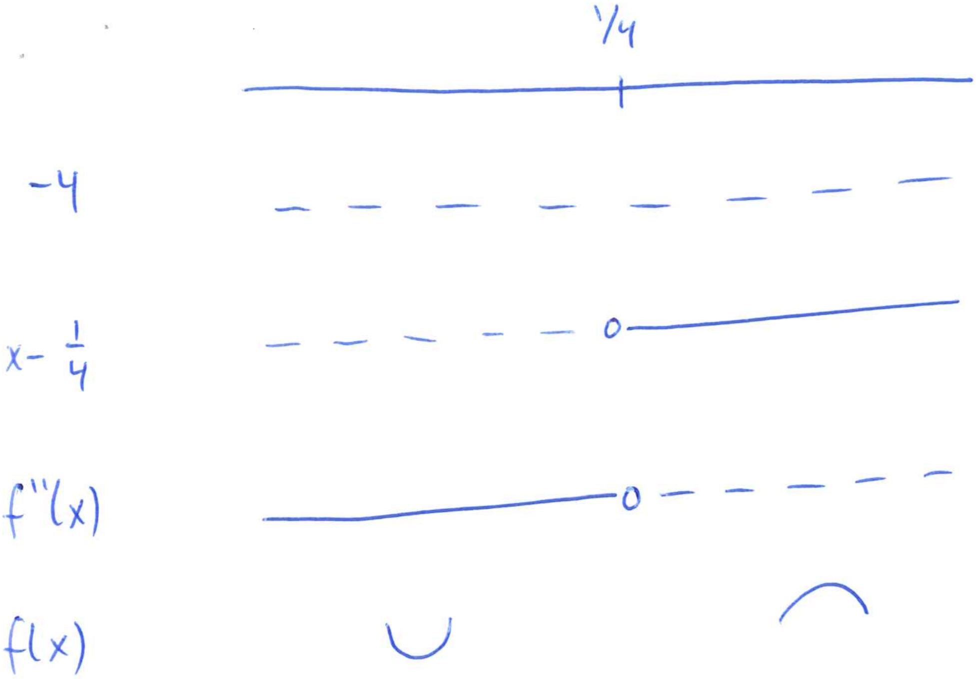


$x = -\frac{3}{2}$ er lokalt bunnpunkt, mens $x = 2$ er lokalt toppunkt.

c) Vendepunkt:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -4x+1 = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

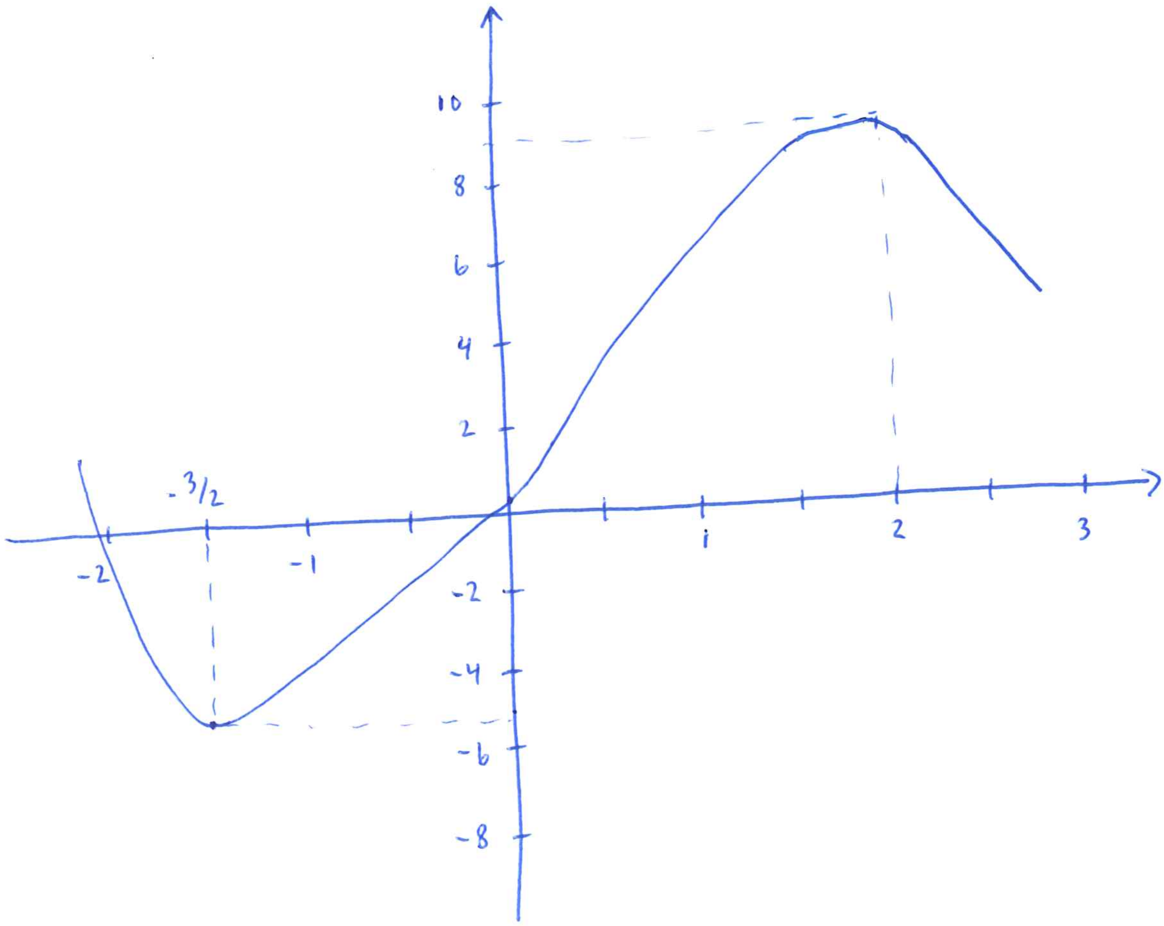
$$f''(x) = -4x+1 = -4\left(x-\frac{1}{4}\right)$$



Funksjonen går fra konveks til konkav når $x = 1/4$.

Punktet $(x, y) = (1/4\,,\ 1{,}85)$ er derfor et vendepunkt.

d)



Oppg. 9 (20%)

a) Max $u(x,y) = 2x^{1/2}y^{1/4}$

gitt at $px + qy = m$

Lagrangefunksjonen blir da:

$$\mathcal{L}(x,y) = 2x^{1/2}y^{1/4} - \lambda(px + qy - m)$$

Nødvendige betingelser for optimum:

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = 0 \Rightarrow x^{-1/2}y^{1/4} - \lambda p = 0 \qquad (i)$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-3/4} - \lambda q = 0 \qquad (ii)$$

$$px + qy = m \qquad (iii)$$

Tre likninger og tre ukjente: x, y og λ.

(i) $\lambda p = x^{-1/2}y^{1/4} \Rightarrow \lambda = \dfrac{x^{-1/2}y^{1/4}}{p}$

(ii) $\lambda q = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-3/4} \Rightarrow \lambda = \dfrac{x^{1/2}y^{-3/4}}{2q}$

Kombinerer (i) og (ii):

$$\frac{x^{-1/2}\,y^{1/4}}{p} = \frac{x^{1/2}\,y^{-3/4}}{2q}$$

$$\Rightarrow 2q\,x^{-1/2}\,y^{1/4} = p\,x^{1/2}\,y^{-3/4} \qquad / \cdot x^{1/2}$$

$$\Rightarrow 2q\,y^{1/4} = p\,x\,y^{-3/4} \qquad / \cdot y^{3/4}$$

$$\Rightarrow 2qy = px$$

$$\Rightarrow y = \frac{p}{2q}\,x \qquad (iv)$$

Likningene (iii) og (iv) er nå to likninger i de to ukjente x og y.

Setter (iv) inn i (iii):

$$(iii) \quad px + qy = m$$

$$\Rightarrow px + q \cdot \frac{p}{2q} \cdot x = m$$

$$\Rightarrow x\left(p + \frac{1}{2}p\right) = m \quad \Rightarrow x \cdot \frac{3}{2}p = m \quad \Rightarrow \underline{x = \frac{2m}{3p}}$$

Finner y ved å sette inn i (iv):

$$y = \frac{p}{2q} x \Rightarrow y = \frac{p}{2q} \cdot \frac{2m}{3p} \Rightarrow \underline{y = \frac{m}{3q}}$$

Dvs: Når $(x,y) = \left(\frac{2m}{3p}, \frac{m}{3q}\right)$ har individet størst nytte.

b) La x^* og y^* være den optimale kombinasjonen:

$$x^* = \frac{2m}{3p} = \frac{2}{3} m p^{-1}$$

$$y^* = \frac{m}{3q} = \frac{1}{3} m q^{-1}$$

i) Økt pris på vare 1 (økt p):

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{2}{3} m p^{-2} = -\frac{2m}{3p^2} < 0$$ Mindre etterspørsel etter vare 1

$$\frac{\partial y^*}{\partial p} = 0$$ Ingen effekt på etterspørselen etter vare 2

ii) Økt inntekt (økt m):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x^*}{\partial m} &= \frac{2}{3p} > 0 \\ \frac{\partial y^*}{\partial m} &= \frac{1}{3q} > 0 \end{aligned}\right\}$$ Økt etterspørsel etter både vare 1 og vare 2.