EKSAMEN SØK3004 VÅR 2022

OPPGAVE 1

a) $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

b) $\frac{1}{x}$ ER DERIVERT TIL $Ln(x)$.

SETTER DERFOR $U = Ln(x)$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dU = \frac{1}{x} \cdot dx$$

KAN NÅ SKRIVE INTEGRALET:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{u}\,\underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{du}$$

$$= \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2 + C$$

c) BRUKER DELVIS INTEGRASJON.

DERIVERT AV $e^x = e^x$.

DERIVERT AV $x = 1$, SOM

ER ENKLERE.

VELGER DERFOR X SOM f

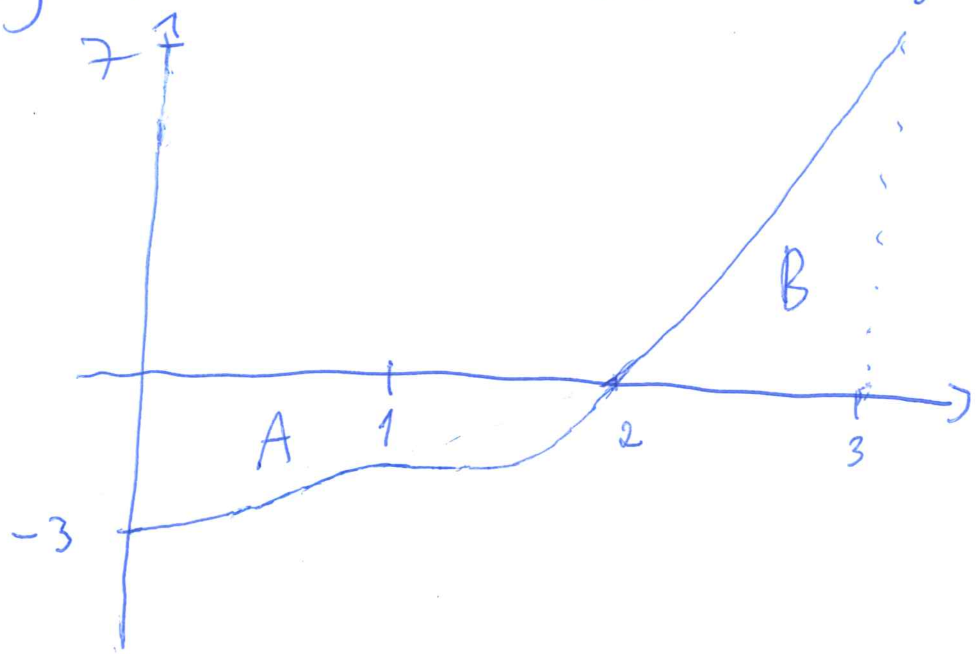
OG e^x SOM g'. $g = \int e^x dx = e^x$.

$$\int x e^x dx = \int f g' dx = fg$$

$$- \int f' g \, dx =$$

$$\underset{f}{\underset{\uparrow}{x}} \, \underset{g}{\underset{\uparrow}{e^x}} - \int \underset{f'}{\underset{\uparrow}{1}} \cdot \underset{g}{\underset{\uparrow}{e^x}} = (x-1)e^x + C$$

d) KURVEN SER SLIK UT:



AREALET BESTÅR AV TO DELER, A, SOM ER UNDER X-AKSEN, OG B, SOM ER OVER X-AKSEN. MÅ HUSKE MINUS FORAN INTEGRALET FOR A.

$$A = -\int_0^2 \left[(x-1)^3 - 1\right] dx =$$

(5)

$$= -\left[\frac{1}{4}(x-1)^4 - x\right]_0^2$$

$$= -\left[\frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{4} + 0\right] = 2$$

$$B = \int_2^3 \left[(x-1)^3 - 1\right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 - x\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 3 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 + 2$$

$$= 4 - 3 - \frac{1}{4} + 2 = 2\frac{3}{4}$$

$$A + B = 2 + 2\frac{3}{4} = 4\frac{3}{4}.$$

OPPGAVE 2

a) $A + B = \begin{bmatrix} 4+3 & -1-2 \\ 2+5 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 4\cdot 3 - 1\cdot 5 & 4\cdot(-2) - 1\cdot 2 \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 2\cdot(-2) + 3\cdot 2 \end{bmatrix}$

$\text{DET } A = 4 \cdot 3 - 2\cdot(-1) = 14$

$\text{DET } B = 3\cdot 2 - 5\cdot(-2) = 16$

$AB = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 21 & 2 \end{bmatrix}$

b)

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 5\cdot 2 & 0\cdot 3 - 1\cdot 1 + 5\cdot 0 & 0\cdot(-1) - 1\cdot 1 + 5\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

FOR Å FORENKLE UTREGNING AV DETERMINANTEN, FORETAR JEG EN ELEMENTÆR OPERASJON. REKKE 2 LEGGES TIL REKKE 3.

NÅ BLIR MATRISEN:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REGNER DETERMINANTEN LANGS SISTE RAD:

$$12 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 12 \cdot (5 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 12 \cdot 4 = 48.$$

KUNNE OGSÅ REGNET UT DET. TIL $\mathbb{C}$ OG $\mathbb{D}$ OG MULTIPLISERT.

(9)

$$\det C = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$$\det D = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

SIDEN DETERMINANTEN TIL CD

ER $\neq 0$, HAR MATRISEN

FULL RANG $= 3$.

OPPGAVE 3

a) LIGNINGEN ER PÅ FORMEN

$\dot{x} + ax = b$, HVOR $a = -1$ OG

$b = 3$. INTEGRERENDE FAKTOR

$= e^{at} = e^{-t}$.

$$\underbrace{\dot{x}e^{-t} - xe^{-t}}_{\frac{d(xe^{-t})}{dt}} = 3e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad x e^{-t} = \int 3e^{-t}\,dt$$

$$= -3e^{-t} + C$$

$$\Rightarrow \quad x = Ce^{t} - 3$$

b) $\dot{x} = 2tx$ ER

SEPARABEL :

$$\frac{dx}{dt} = 2tx \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2t\,dt$$

INTEGRERER PÅ HVER SIDE:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int 2t\,dt$$

$$\Rightarrow \ln(x) = t^2 + C$$

FRA INITIALBETINGELSEN HAR VI AT

$$x(0) = 1. \Rightarrow \ln(1) = 0^2 + C$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

SVARET BLIR

$$\ln(x) = t^2 \Rightarrow x = e^{t^2}$$

c)

SIDEN X IKKE INNGÅR, KAN VI SETTE $\dot{X} = U$. DA BLIR LIGNINGEN:

$$\underset{\ddot{X}}{\underset{\shortparallel}{\dot{U}}} = 3 + \underset{\dot{X}}{\underset{\shortparallel}{U}} \Rightarrow \dot{U} - U = 3$$

DENNE ER LIK LIGNINGEN I a)

OG SVARET BLIR: $U = Ce^{t} - 3$

14

$$\Rightarrow \dot{x} = Ce^{t} - 3$$

$$\Rightarrow x = \int \left[Ce^{t} - 3 \right] dt$$

$$= Ce^{t} - 3t + B$$

OPPGAVE 4

a)

STASJONÆRPUNKTET ER GITT VED:

$$f_x = 0, \quad f_y = 0$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -4x + 2y = 0 \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \frac{y}{2} - 4y = -3 \Rightarrow -3y = -3$$

$$\Rightarrow y = 1, \; x = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}.$$

x

STASJONÆRPUNKTET ER

$$x^* = \frac{1}{2}, \; y^* = 1.$$

FOR Å FINNE HVA SLAGS STASJONÆRPUKT VI HAR, FINNER VI HESSE-MATRISEN.

$f_{xx} = -4$

$f_{xy} = f_{yx} = 2$

$f_{yy} = -4$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$ ER HESSEMATRISEN.

HOVEDMINORENE ER:

$D_1 = -4$ (TALLET I 1. REKKE OG 1. KOLONNE)

$$D_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-4) - 2\cdot 2 = 8 - 4 = 4$$

SIDEN $D_1 < 0$ OG $D_2 > 0$ HAR

VI ET MAKSIMUMSPUNKT.

b) $$\max_{x,y} \; 5 - 2(x-3)^2 - (y-2)^2$$

GITT

$$x \leq 2$$
$$y \leq 1$$

$$L = 5 - 2(x-3)^2 - (y-2)^2 - \lambda_1(x-2) - \lambda_2(y-1)$$

KUHN-TUCKER BETINGELSENE BLIR:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = -4(X-3) - \lambda_1 = 0 \qquad i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -(Y-2) - \lambda_2 = 0 \qquad ii)$$

$\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1 = 0$ HVIS $X < 2$

$\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_2 = 0$ HVIS $Y < 1$

SER PÅ FIRE MULIGE KOMBINASJONER FOR λ_1 OG λ_2.

A. $\lambda_1 > 0$ OG $\lambda_2 > 0$.

FRA SLACK-BETINGELSENE HAR VI AT $X = 2$ OG $Y = 1$. DET ER EN MULIG LØSNING.

B. $\lambda_1 > 0$ OG $\lambda_2 = 0$.

SIDEN $\lambda_2 = 0$, BLIR (ii):

$$-(Y-2) - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\lambda_2} = 0 \Rightarrow Y = 2.$$ MEN DET

ER IKKE MULIG SIDEN $Y \leq 1$.

C. $\lambda_1 = 0$ OG $\lambda_2 = 0$.

SIDEN $\lambda_1 = 0$, BLIR i):

$$-4(X-3) - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\lambda_1} = 0 \Rightarrow X = 3.$$ MEN

DET ER IKKE MULIG SIDEN $X \leq 2$.

D. $\lambda_1 = 0$ OG $\lambda_2 = 0$.

VED TILSVARENDE RESONMEMENT SOM

FOR B. OG C. FÅR VI AT $Y = 2$ OG

X = 3. MEN DETTE ER IKKE MULIG

SIDEN $Y \leq 1$ OG $X \leq 2$.

ALTSÅ ER A. ENESTE ALTERNATIV.

MAKSIMUM NÅS FOR

$Y = 1$ OG $X = 2$ OG OPTIMANDEN

ER: $5 - 2(2-3)^2 - (1-2)^2 = 3$

EN ALTERNATIV FREMGANGSMÅTE ER Å

SI AT $5 - 2(X-3)^2 - (Y-2)^2$ ER

STØRST NÅR $(X-3)$ OG $(Y-2)$ ER

NÆRMEST MULIG NULL. DET VIL DE

TO PARANTESENE VÆRE FOR $X = 2$ OG $Y = 1$.