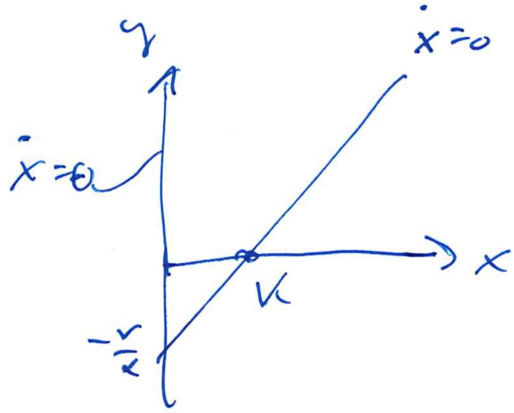
Svarantydning SØK 3004 Vår 2012

1) a) <u>Finn nullklinene</u>

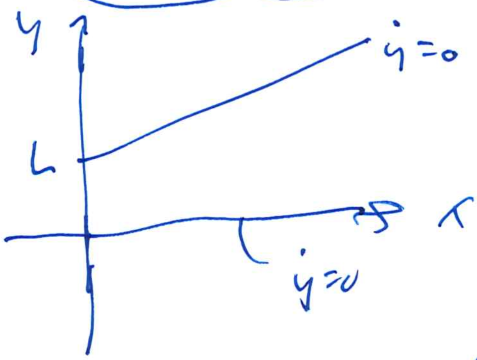
$\dot{x} = 0 \rightarrow \underline{x = 0}$ og $r(1 - \frac{x}{K}) - \alpha y = 0$ når $x \neq 0$

$\rightarrow \boxed{y = -\frac{r}{\alpha} + \frac{r}{\alpha K} \cdot x}$



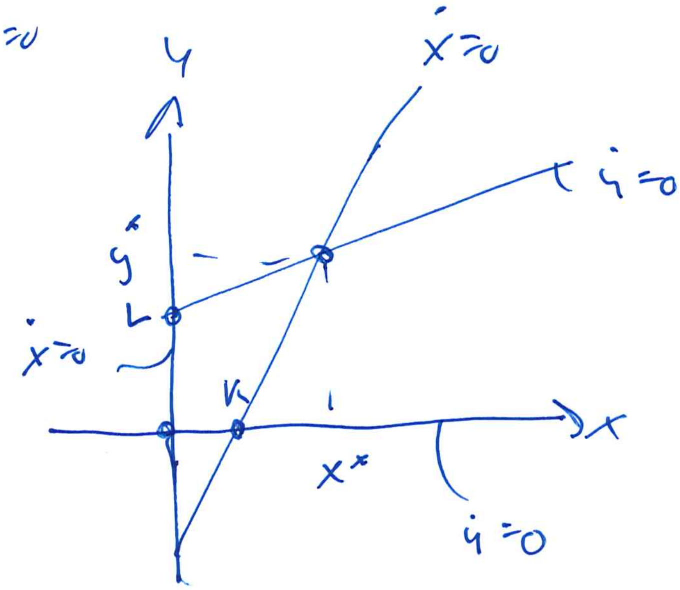
$\dot{y} = 0 \rightarrow y = 0$ og $s(1 - \frac{y}{L}) + \beta x = 0$

$\rightarrow \boxed{y = L + \frac{\beta L}{s} \cdot x}$



Sett dem sammen

Fokuser kun på positive verdier x og y.



Derfor likevektene

1) Indre likevekt x^*, y^* er løsningen av ligningssystemet

$$y = -\frac{r}{\alpha} + \frac{r}{\alpha K}\cdot x$$

$$y = L + \frac{\beta L}{s}\cdot x$$

(Krav til parametre for å få en indre positiv løsning $\frac{r}{\alpha K} > \frac{\beta L}{s}$)

2) Randlikevekter: $x = 0,\ y = 0$

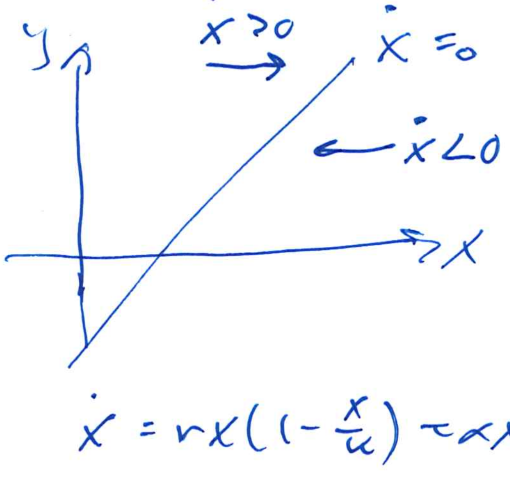
$x = 0,\ y = L$

$x = K,\ y = 0$

b), c), d) Isoklinene

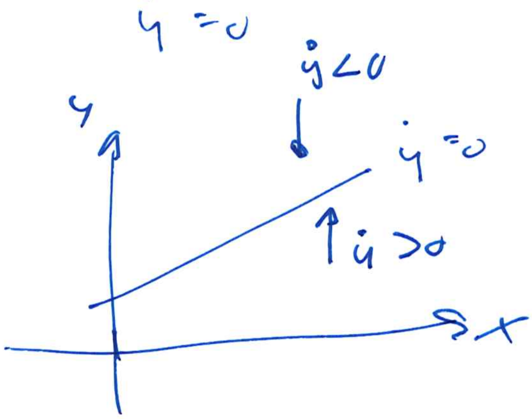
Fokus på indre, positiv likevekt

4) $\dot{x} = 0$



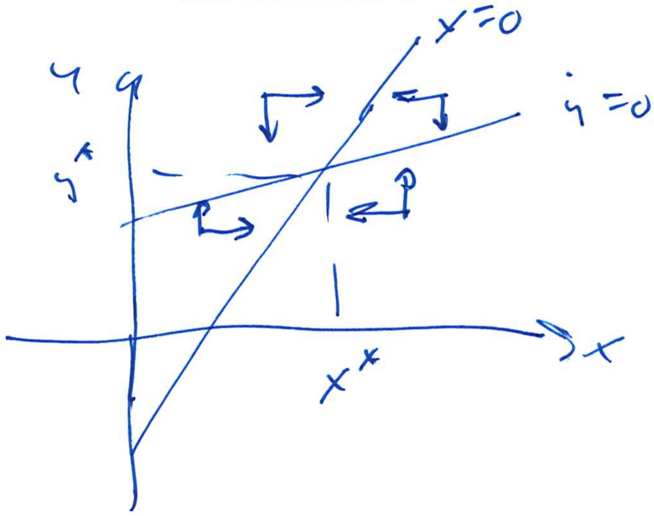
$\cancel{\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x}$ $\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha x y$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Ser at 'høy' verdi } y \text{ betyr} \\ \dot{x} > 0\end{array}\right.$

(ii)



$\dot{y} = sy\left(1 - \frac{y}{L}\right) + \beta x y$ $\Bigg\{$ Ser at 'høy' verdi x betyr $\dot{y} > 0$

(iii) Sette sammen



Konklusjon: Pil-analyse tyder på stabilitet.

e) Jacobi matrise

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(r - \frac{2rx}{K} + \alpha y\right) & \alpha x \\ \beta y & \left(s - \frac{2sy}{L} + \beta x\right) \end{pmatrix}$$

Jacobi matrisen skal så evalueres ved likevekten. Inn i likevekten:

$$J^* = \begin{pmatrix} \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \alpha y^*\right) & \alpha x^* \\ \beta y^* & \left(s - \frac{2sy^*}{L} + \beta x^*\right) \end{pmatrix}$$

Stabilitet hvis

$|J^*| > 0$ og $Tr(J^*) < 0$

2)

$$y = B \cdot A^{\alpha} \cdot N^{\beta}$$

a) B er teknologi parameter

α grenseelastisiteten av land : $\frac{\partial y}{\partial A} \frac{A}{y} = \alpha$

β —"— arbeid $\frac{\partial y}{\partial N} \frac{N}{y} = \beta$

Skalaelastisiteten sier hva som den prosentvise endringen i produksjonen blir om begge produksjonsfaktorer endres med 1 %.

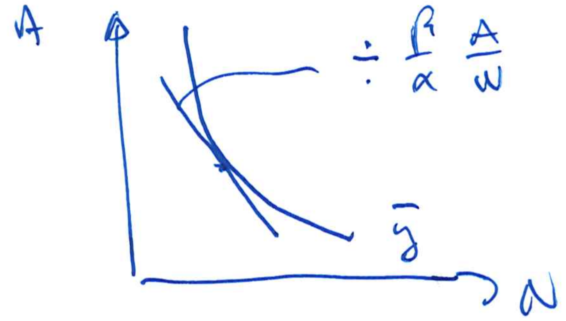
Dermed har skalaelastisitet $= \alpha + \beta$.

Det tekniske substitusjonsforholdet:

$$dy = B\alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot N^{\beta} \cdot dA + B A^{\alpha} \cdot \beta \cdot N^{\beta-1} \cdot dN = 0$$

langs en isokvant.

→ Finner så: $\frac{dA}{dN} = \div \frac{\beta}{\alpha} \frac{A}{N}$



$\div \frac{\beta}{\alpha} \frac{A}{W}$ tekniske substitusjonsforhold.

b) $A = \bar{A}$ gitt på kort sikt.

→ $y = B \cdot \bar{A}^{\alpha} \cdot N^{\beta}$

Profitt: $\pi = py \div (r \cdot \bar{A} + wN)$

r, w faktorpriser

p produktpris.

$\pi = pB\bar{A}^{\alpha} N^{\beta} - (r\bar{A} + wN)$

$\frac{\partial \pi}{\partial N} = 0 \rightarrow N^{*} = \left(\frac{p\beta B \cdot \bar{A}^{\alpha}}{w} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}$ } Kortsiktig etterspørsel etter arbeidskraft

Setter så N^{*} inn i $y = B \cdot \bar{A}^{\alpha} \cdot N^{*\beta}$ som da gir y^{*} kortidstilbudsfunksjon

Til slutt blir kortsids profittfunksjon bestemt av

$$\Pi^* = p y^* - (r\bar{A} + w N^*)$$

c) <u>Langsikt</u>

På lang sikt kan også mengden land variere

$$\Pi = p \cdot B \cdot A^{\alpha} \cdot N^{\beta} - (rA + wN)$$

$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial N} = 0$ → Gir langtids etterspørsels-funksjonene → N^{**} og A^{**}.

Innsatt i produktfunksjonen finnes så tilbudsfunksjonen y^{**}

Og endelig innsatt i uttrykket for profitten finnes langtids profittfunksjon

$$\Pi^* = p B \cdot A^{**\alpha} \cdot N^{**\beta} - (rA^{**} + wN^{**})$$

→ Generelt: $N^{**} = N^{**}(p, w, r)$, $A^{**} = A^{**}(p, w, r)$ etc.

d) <u>Hotellings lemma</u>

<u>I langtids betraktningen</u> :

$$\frac{\partial \pi^{**}(p,w,v)}{\partial p} = y^{**}(p,w,v)$$

$$\frac{\partial \pi^{*}(p,w,v)}{\partial w} = \div\, W^{**}(p,w,v)$$

$$\frac{\partial \pi^{*}(p,w,v)}{\partial v} = \div\, A^{**}(p,w,v)$$

Kan også diskutere tolkningen her.

3)

a) $5u + 5v - 2x + 3y = 0$

$2u - 3x + 4v + 3y = 0$

v og u er eksogene variable

x og y er endogene variable

Ta det totale differensialet :

$5 \cdot du + 5 \cdot dv - 2dx + 3dy = 0$

$2du - 3dx + 4dv + 3dy = 0$

Eller:

$$-2dx + 3dy = -5du - 5dv$$
$$-3dx + 3dy = \div 2du - 4dv$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(5du + 5dv) \\ -(2du + 4dv) \end{pmatrix}$$

Finne så dx og du ved hjelp av Cramers regel.

Deretter kan de partielle effekten studeres.

b) i) $$\int_0^2 (2x^4 - 3x^3 - 0{,}5x^2 + e^{-3x})\,dx$$

$$= \Big|_0^2 \left(\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 \div \frac{1}{3}e^{-3x}\right)$$

$$= \underline{\frac{2}{5}(2)^5 - \frac{3}{4}(2)^4 \div \frac{1}{6}(2)^3 \div \frac{1}{3}e^{-3\cdot 2} + \frac{1}{3}}$$

ii) $$\int \frac{4x^3 - 5x^2 + 8x - 1}{(x-2)}\,dx$$

Delbrøkoppspalting

$$(4x^3 - 5x^2 + 8x - 1) : (x-2) = 4x^2 + 3x + 14 + \frac{27}{(x-2)}$$

$$\rightarrow \quad \int (4x^2 + 3x + 14) + \frac{27}{(x-2)} = \underline{\frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 14x}$$

$$\underline{+\ 27 \cdot \ln(x-2) + C}$$

c)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & 0 & 4 \\ \frac{15}{8} & (5-2b) & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ (5-2b) & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} b & 4 \\ \frac{15}{8} & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} b & 0 \\ \frac{15}{8} & (5-2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0 \cdot 3 \div 4(5-2b)) - 2\left(3b - 4\frac{15}{8}\right) + 3\left(b(15-2b) - 0\frac{15}{8}\right.$$

$$|A| = \div 6b^2 + 17b - 5 \quad ; \quad |A| = 0 \rightarrow$$

$$b = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4(\div 6)(\div 5)}}{2(\div 6)} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} \end{cases}$$

Matrisen har invers når determinanten er ulik null, dvs $b \neq \frac{1}{3}$ og $b \neq \frac{5}{2}$

10

d)

i) $PV = \div I + \sum_{t=1}^{T} \frac{\pi}{(1+r)^t} = \div I + \pi \cdot \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^t}$

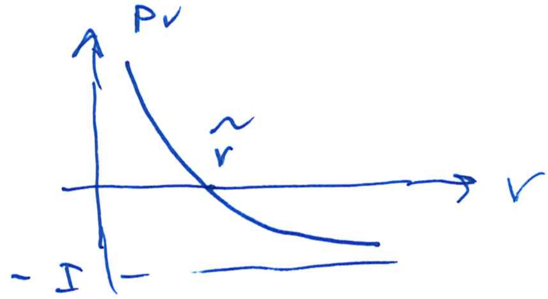
Bruker formel geometrisk rekke $\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} = \frac{1 \div \frac{1}{(1+r)^T}}{r}$

$\rightarrow \quad PV = \div I + \frac{\pi}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)$

Iverksett prosjektet om $\underline{PV > 0}$.

ii) $T = \infty$

$PV = \div I + \frac{\pi}{r}$



Internrate $\tilde{r}$

$PV = 0 \Leftrightarrow \div I + \frac{\pi}{\tilde{r}} = 0 \rightarrow \boxed{\tilde{r} = \frac{\pi}{I}}$

4)

$\max_{x,y} U = xy + 3x + 2y$ u.b.b $qx + py \leq m$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Fordi U er stigende i både x og y holder restriksjonen $qx + py \leq m$ som likhet $\rightarrow qx + py = m$

$\rightarrow$ Ikke-metning

Dette betyr at skyggeprisen λ i denne skranken alltid er positiv.

Lagrange

$$L = xy + 3x + 2y - \lambda(qx + py - m)$$

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 3 - \lambda q \leq 0 \begin{cases} < 0 & \text{hvis } x = 0 \\ = 0 & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2 - \lambda p \leq 0 \begin{cases} < 0 & \text{hvis } y = 0 \\ = 0 & \text{hvis } y > 0 \end{cases}$

Løsningsmuligheter

i) $x > 0,\ y > 0$

1) $\rightarrow \dfrac{y+3}{q} = \lambda$

2) $\dfrac{x+2}{p} = \lambda.$

$\Rightarrow \dfrac{y+3}{q} = \dfrac{x+2}{p}$. Denne sammen med budsjettbetingelsen gir: $\boxed{x = \dfrac{m+3p}{2q} - 1}$

$$\boxed{y = \dfrac{2q + m - 3p}{2p}}$$

Ser at $x > 0$ krever at $m + 3p - 2q > 0$

$\rightarrow$ q kan ikke være 'for høy'

$y > 0$ krever at $2q + m - 3p > 0$

$\rightarrow$ p kan ikke være 'for høy'

ii) $x = 0,\ y > 0$

(1) $\rightarrow \boxed{\lambda > \frac{y+3}{q}}$.

(2) $\boxed{\lambda = \frac{2}{p}}$ $\rightarrow \frac{2}{p} > \frac{(y+3)}{q}$.

Eller $2q > py + 3p$

Budsjettbetingelsen nå: $py = m$

$\left.\begin{array}{l} 2q > py + 3p \\ py = m \end{array}\right\}$ $2q > m + 3p$ eller $q > \frac{m+3p}{2}$

Dvs mulig løsning hvis eks. q 'høy' og p 'lav'.

iii) $x > 0,\ y = 0$

(1) $\lambda = \frac{3}{q}$, (2) $\lambda > \frac{x+2}{p}$

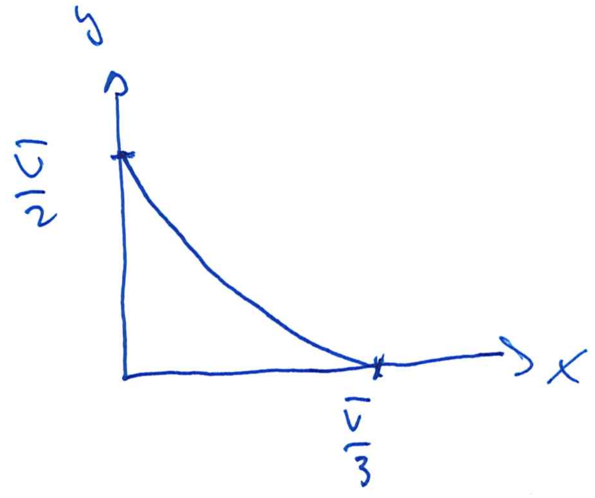
Tilsvarende omforming som over $\rightarrow p > \frac{m+2q}{3}$

Dvs mulig løsning hvis eks p 'høy' og q 'lav'

13

Indifferenskurve $\bar{U} = xy + 3x + 2y$

$\rightarrow \bar{U} = (x+2)y + 3x \rightarrow y = \frac{\bar{U} - 3x}{(x+2)}$



Budsjettlinje

$y = \frac{m}{p} \div \frac{q}{p} \cdot x$

Ut fra hvordan indifferenskurvene ser ut, ser vi at andre ovenfor stemmer. Hvis få store relative prisforskjeller → randløsning.

b) Helt standard. Se a) ovenfor.

Setter så: $x^* = \frac{m + 3p}{2q} - 1$ og $y^* = \frac{2q + m - 3p}{2p}$

Inn i nyttefunksjonen fåes den indirekte nyttefunksjonen, U^*.

c) Ut fra b) finner vi gsi at $\lambda = \frac{\partial U^*}{\partial m}$