

# Oppgave 1

SØK 2005 V21

$$a) S_m = \frac{E[\tilde{r}_m] - r_f}{\sigma_m}$$

$$b) E[\tilde{r}_i] = r_f + [E[\tilde{r}_m] - r_f] \beta_i$$

$$c) \sigma_i^2 = E\left[\left(\tilde{r}_i - E[\tilde{r}_i]\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(r_f + (\tilde{r}_m - r_f)\beta_i + \tilde{\epsilon}_i - (r_f + [E[\tilde{r}_m] - r_f]\beta_i)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left((\tilde{r}_m - E[\tilde{r}_m])\beta_i + \tilde{\epsilon}_i\right)^2\right] \quad \left(\begin{array}{l} \text{Bruk at} \\ \text{Var}(\hat{x} + b + \tilde{y}) \\ = \text{Var}(\hat{x} + \tilde{y}) \end{array}\right)$$

$$= \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$$

d) Siden  $\sigma_{\epsilon_i}^2$  ikke har noe med markedens risikoen å gjøre, må dette være usystematiske risiko.

$\beta_i^2 \sigma_m^2$  er aksje  $i$ 's systematiske risiko.

$$e) S_i = \frac{r_f + [E[\tilde{r}_m] - r_f]\beta_i - r_f}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2}} = \frac{(E[\tilde{r}_m] - r_f)\beta_i}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2}}$$

f) Fra e) ser vi at den usystematiske risikoen  $\sigma_{\epsilon_i}^2$  øker nevneren og dermed reduserer Sharpe-raten  $S_i$ .

$$\begin{aligned}
g) \quad \text{cov}(\tilde{r}_m, \tilde{r}_i) &= E\left[(\tilde{r}_m - E(\tilde{r}_m))(\tilde{r}_i - E[\tilde{r}_i])\right] \\
&= E\left[(\tilde{r}_m - E(\tilde{r}_m))\left((\tilde{r}_m - E[\tilde{r}_m])\beta_i + \tilde{\epsilon}_i\right)\right] \\
&= \beta_i \sigma_m^2 \\
\rho_{i,m} &= \frac{\beta_i \sigma_m^2}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2} \sigma_m} = \frac{\beta_i \sigma_m}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2}}
\end{aligned}$$

h) Fra g) ser vi at  $\rho_{i,m} = 1$  for  $\sigma_{\epsilon_i}^2 = 0$ :

$$\frac{\beta_i \sigma_m}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2}} = \frac{\beta_i \sigma_m}{\beta_i \sigma_m} = 1.$$

Dette stemmer godt med resultatet i g).  $\tilde{r}_m$  og  $\tilde{r}_i$  er perfekt korrelerte når  $\rho = 1$ , altså når  $\sigma_{\epsilon_i}^2 = 0$ .

i) En veldiversifisert portefølje har  $\sigma_{\epsilon_i}^2 = 0$ . Siden all usystematisk risiko er diversifiserbart. For en hver portefølje som ikke er veldiversifisert er  $\sigma_{\epsilon_i}^2 > 0$  og har dermed lavere Sharpe-rate enn en veldiversifisert portefølje.

## Oppgave 2

$$a) P_0 = \frac{5}{1,04} + \frac{105}{(1,05025)^2} = \underline{\underline{100,00}}$$

$$b) 100 = \frac{5}{1+y} + \frac{105}{(1+y)^2}$$

Dette er en pari-obligasjon og da er yielden like kuppeten (alternativt: løs som en annengradslikning):

$$y = 0,05 = \underline{\underline{5\%}}$$

$$c) D = \left( \frac{1 \cdot 5}{1,05} + \frac{2 \cdot 105}{(1,05)^2} \right) / 100 = \underline{\underline{1,95 \text{ år}}}$$

$$d) P_0 = \frac{5}{1,04} + \frac{5}{(1,05025)^2} + \frac{(1-0,1914) \cdot 100}{(1,05025)^2} + \frac{0,1914 \cdot 0,5 \cdot 100}{(1,05025)^2} = \underline{\underline{91,32}}$$

$$e) 91,32 = \frac{5}{1+y} + \frac{105}{(1+y)^2} \cdot (1+y)^2 \text{ og sett } x = 1+y$$

$$91,32x^2 - 5x - 105 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(91,32)(-105)}}{2 \cdot 91,32}, x_1 = 1,1, x_2 = -1,05$$

$$\hookrightarrow \text{Yielden er } 0,1 = \underline{\underline{10\%}}$$

- f) Yielden er lovett avkastning og er derfor den høyeste avkastningen investoren kan oppnå. Her er det 19,14% sannsynlighet for at den blir mye lavere. For å kompensere for denne risikoen, krever investoren en lavere obligasjonspris for å få en høyere forventet avkastning.

#3 a)  $S > X \Rightarrow \frac{S}{X} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{X}\right) > 0.$

$$\frac{(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{(r \pm \sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma} \rightarrow 0 \text{ när } T \rightarrow 0.$$

$$\frac{\ln \frac{S}{X}}{\sigma\sqrt{T}} \rightarrow \infty \text{ när } T \rightarrow 0$$

$\hookrightarrow N(d_1)$  og  $N(d_2) \rightarrow 1$  när  $T \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} c = \underline{\underline{S - X}} > 0.$$

b)  $S < X \Rightarrow \frac{S}{X} < 1 \Rightarrow \ln \frac{S}{X} < 0$

$$\frac{\ln \frac{S}{X}}{\sigma\sqrt{T}} \rightarrow -\infty \text{ när } T \rightarrow 0$$

$\hookrightarrow N(d_1)$  og  $N(d_2) \rightarrow 0$  när  $T \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} c = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S}{x} \rightarrow \infty \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{x}\right) \rightarrow \infty \quad d_1 \text{ og } d_2 \rightarrow \infty$$

$$N(d_1) \text{ og } N(d_2) \rightarrow 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} C = \underbrace{S N(d_1)}_{\rightarrow 1} - e^{-rT} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \underbrace{N(d_2)}_{\rightarrow 1} = \underline{\underline{S.}}$$

d) Når det ikke koster noe å utøve opsjønen, vil du alltid utøve den til pris  $x=0$ .

Da vil du motta aksjen på tid  $T$ .

Siden den ikke betaler dividende, er dette verdt  $S$  idag  $\Rightarrow C=S$ .

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{x}\right) \rightarrow -\infty$$

$$\hookrightarrow N(d_1) \text{ og } N(d_2) \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C = \underbrace{S N(d_1)}_0 - e^{-rT} \underbrace{x N(d_2)}_{\infty \cdot 0} = 0$$

?

Vi forstår (og det kan vises matematisk) at  $x N(d_2) = 0$  siden opsjønen ikke kan ha negativ verdi.

f) Hvis det blir veldig (uendelig) dyrt å utøve opsjønen, vil den aldri bli utøvet  $\Rightarrow \underline{\underline{C=0}}$ .

