Oppgave 1

a) $$S_m = \frac{E[\tilde{r}_m] - r_f}{\sigma_m}.$$

b) $$E[\tilde{r}_i] = r_f + [E[\tilde{r}_m] - r_f]\beta_i$$

c) $$\sigma_i^2 = E\left[\left(\tilde{r}_i - E[\tilde{r}_i]\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(r_f + (\tilde{r}_m - r_f)\beta_i + \tilde{\varepsilon}_i - (r_f + [E[\tilde{r}_m] - r_f]\beta_i)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\left(\tilde{r}_m - E[\tilde{r}_m]\right)\beta_i + \tilde{\varepsilon}_i\right)^2\right] \quad \left(\begin{array}{l}\text{Bruk at} \\ Var(\tilde{x} + b + \tilde{y}) \\ = Var(\tilde{x} + \tilde{y})\end{array}\right)$$

$$= \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

d) Siden $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ ikke har noe med markedsrisikoen å gjøre, må dette være usystematisk risiko.

$\beta_i^2 \sigma_m^2$ er aksje is systematiske risiko.

e) $$S_i = \frac{r_f + [E[\tilde{r}_m] - r_f]\beta_i - r_f}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2}} = \frac{(E[\tilde{r}_m] - r_f)\beta_i}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2}}$$

f) Fra e) ser vi at den usystematiske risikoen $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ øker nevneren og dermed reduserer Sharpe-raten S_i.

g) $$\mathrm{cov}(\tilde{r}_m, \tilde{r}_i) = E\left[(\tilde{r}_m - E(\tilde{r}_m))(\tilde{r}_i - E[\tilde{r}_i])\right]$$

$$= E\left[(\tilde{r}_m - E(\tilde{r}_m))((\tilde{r}_m - E[\tilde{r}_m])\beta_i + \tilde{\varepsilon}_i)\right]$$

$$= \beta_i \sigma_m^2$$

$$\rho_{i,m} = \frac{\beta_i \sigma_m^2}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2}\,\sigma_m} = \frac{\beta_i \sigma_m}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2}}$$

h) Fra g) ser vi at $\rho_{i,m} = 1$ for $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = 0$:

$$\frac{\beta_i \sigma_m}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_m^2}} = \frac{\beta_i \sigma_m}{\beta_i \sigma_m} = 1.$$

Dette stemmer godt med resultatet i g). $\tilde{r}_m$ og $\tilde{r}_i$ er perfekt korrelerte når $\rho = 1$, altså når $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = 0$.

i) En veldiversifisert portefølje har $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = 0$ siden all usystematisk risiko er diversifisert bort. For en hver portefølje som ikke er veldiversifisert er $\sigma_{\varepsilon_i}^2 > 0$ og har dermed lavere Sharpe-rate enn en veldiversifisert portefølje.

Oppgave 2

a) $P_0 = \frac{5}{1{,}04} + \frac{105}{(1{,}05025)^2} = \underline{\underline{100{,}00}}$

b) $100 = \frac{5}{1+Y} + \frac{105}{(1+Y)^2}$ Dette er en pari-obligasjon og da er yielden lik kupongen (alternativt: løs som en annengrads likning):

$Y = 0{,}05 \;):\; \underline{\underline{5\%}}$

c) $D = \left(\frac{1 \cdot 5}{1{,}05} + \frac{2 \cdot 105}{(1{,}05)^2}\right) / 100 = \underline{\underline{1{,}95 \text{ år}}}$

d) $P_0 = \frac{5}{1{,}04} + \frac{5}{(1{,}05025)^2} + \frac{(1-0{,}1914) \cdot 100}{(1{,}05025)^2} + \frac{0{,}1914 \cdot 0{,}5 \cdot 100}{(1{,}05025)^2}$

$= \underline{\underline{91{,}32}}$

e) $91{,}32 = \frac{5}{1+Y} + \frac{105}{(1+Y)^2} \;\Big|\; \cdot (1+Y)^2$ og sett $X = 1+Y$

$91{,}32X^2 - 5X - 105 = 0$

$X = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(91{,}32)(-105)}}{2 \cdot 91{,}32}$, $X_1 = 1{,}1$, $X_2 = -1{,}05$

↳ Yielden er $0{,}1 = \underline{\underline{10\%}}$

f) Yielden er <u>lovet</u> avkastning og er derfor den høyeste avkastningen investoren kan oppnå. Her er det 19,14% sannsynlighet for at den blir mye lavere. For å kompensere for denne risikoen, krever investorene en lavere obligasjonspris for å få en høyere forventet avkastning.

#3

a) $S > X \Rightarrow \frac{S}{X} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{X}\right) > 0.$

$$\frac{(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{(r \pm \sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma} \to 0 \text{ når } T \to 0.$$

$$\frac{\ln\frac{S}{X}}{\sigma\sqrt{T}} \to \infty \text{ når } T \to 0$$

$\hookrightarrow N(d_1)$ og $N(d_2) \to 1$ når $T \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{T \to 0} c = \underline{\underline{S - X > 0.}}$$

b) $S < X \Rightarrow \frac{S}{X} < 1 \Rightarrow \ln\frac{S}{X} < 0$

$$\frac{\ln\frac{S}{X}}{\sigma\sqrt{T}} \to -\infty \text{ når } T \to 0$$

$\hookrightarrow N(d_1)$ og $N(d_2) \to 0$ når $T \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{T \to 0} c = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{S}{x} \to \infty \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{x}\right) \to \infty$ $\qquad d_1$ og $d_2 \to \infty$

$N(d_1)$ og $N(d_2) \to 1$.

$$\lim_{x \to 0} C = S\underbrace{N(d_1)}_{\to 1} - e^{-rT}\underbrace{X}_{\to 0}\underbrace{N(d_2)}_{\to 1} = \underline{\underline{S.}}$$

d) Når det ikke koster noe å utøve opsjonen, vil du alltid utøve den til pris $X=0$. Da vil du motta aksjen på tid T. Siden den ikke betaler dividende, er dette verdt S idag $\Rightarrow C=S$.

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{S}{x} \to 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{x}\right) \to -\infty$

$\hookrightarrow N(d_1)$ og $N(d_2) \to 0$.

$$\lim_{x \to \infty} C = S\underbrace{N(d_1)}_{0} - e^{-rT}\underbrace{\underbrace{X}_{\infty}\underbrace{N(d_2)}_{0}}_{?}$$

$= 0$

Vi forstår (og det kan vises matematisk) at $XN(d_2)=0$ siden opsjonen ikke kan ha negativ verdi.

f) Hvis det blir veldig (uendelig) dyrt å utøve opsjonen, vil den aldri bli utøvd $\Rightarrow$ $\underline{\underline{C=0.}}$

g) $\lim_{T\to\infty} d_1 = \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)}{\sigma\sqrt{T}}}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma}}_{\to\infty} \to \infty$

$\hookrightarrow N(d_1) \to 1.$

$\lim_{T\to\infty} \underbrace{Xe^{-rT}}_{\to 0} \underbrace{N(d_2)}_{\to 0 \text{ eller } 1} \to 0$

$\lim_{T\to\infty} c = \underline{\underline{S}}$