SENSORVEILEDNING – SØK 3005 – VÅREN 2017

Oppgave 1

Oppgaven løses enklest ved å bruke modellen nederst på side 67 i Eeckhoudt et al.

Investorens forventet nytte: $Eu(g(\alpha)) = Eu(w+\alpha\tilde{y})$, hvor w er initial formue og α er beløpet som plasseres i et usikkert verdipapir med avkastning $\tilde{y}$.

Førsteordens betingelsen: $\partial Eu(w+\alpha\tilde{y})/\partial\alpha = E[\tilde{y}u'(w+\alpha\tilde{y})] = 0$

Taylor-utvikler $u'(w+\alpha\tilde{y})$ rundt $u'(w)$: $u'(w+\alpha\tilde{y}) = u'(w) + \alpha\tilde{y}u''(w)$

Uttrykket settes inn i førsteordens betingelsen:

$$
\begin{aligned}
E[\tilde{y}u'(w+\alpha\tilde{y})] &= E[\tilde{y}u'(w) + \alpha\tilde{y}^2u''(w)] \\
&= u'(w)E(\tilde{y}) + \alpha u''(w)E(\tilde{y}^2) \\
&= u'(w)\mu_Y + \alpha u''(w)(\sigma_y^2+\mu_Y^2) = 0,
\end{aligned}
$$

hvor μ_Y og σ_y^2 er forventningsverdi og varians til $\tilde{y}$.

$$u'(w)\mu_y + \alpha^*u''(w)(\sigma_y^2+\mu_y^2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$w\mu_y = -wu''(w)/u'(w)\alpha^*(\sigma_y^2+\mu_y^2)$$

$$\downarrow$$

$$w\mu_y= R(w)\alpha^*(\sigma_y^2+\mu_y^2)$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^*/w &= [\mu_y/(\sigma_y^2+\mu_y^2)](1/R(w)) \\
&\approx (\mu_y/\sigma_y^2)(1/R(w))
\end{aligned}
$$

Andelen av formuen som investeres i det risikable verdipapiret vil

være høyere:

- Jo høyere er forventet meravkastning, μ
- Jo lavere er variansen til meravkastningen, σ_y^2
- Jo lavere er investors relative risikoaversjon, $R(w)$

Oppgave 2

- Vi har n bedrifter i en Cournot oligopol. Varene de selger er perfekte substitutter. Bedriftene velger kvantum samtidig.
- q_i er kvantum som bedrift i produserer.
  Aggregert produksjon:

$$Q = q_1 + ... + q_n... = \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{3}$$

  Alle andres produksjon:

$$q_{-i} = Q - q_i \tag{4}$$

  Markedsprisen er P og invers ettersporsel ($P(Q)$) er:

$$P(Q) = a - Q \tag{5}$$

  Definert for $a > Q$
- Bedriftene står overfor samme kostnader: De har ingen faste kostnader og marginalkostnaden for hver bedrift er:

$$C_i(q_i) = c \cdot q_i \tag{6}$$

  hvor vi antar at $c < a$

Hva er nashlikevekten?
Profittfunksjonen:

$$\Pi_i = (P(Q - c)q_i = (a - q_i - q_{-i} - c)q_i \tag{7}$$

Variabelen bedriftene kan styre er kvantum, og de velger derfor det kvantum som maksimerer kvantum (for gitt kvantum hos motspillerne).
Maksimerer Π_i mhp q_i

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = P(Q) + \frac{\partial P(Q)}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q_i} q_i - c = 0 \tag{8}$$

$$a - q_{-i} - 2q_i - c = 0 \tag{9}$$

$$q_i = \frac{1}{2}(a - q_{-i} - c) \tag{10}$$

Likningen over kan tolkes som beste responsfunksjon til bedrift i. Beste respons er fallende med økt produksjon hos motspillere og økte kostnader. Kurven angir beste respons for enhver produksjon hos motspillerne.
Denne profittmaksimeringen (og responskurve) er felles for alle bedriftene noe som betyr at de vil produsere likt kvantum.

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = nq \tag{11}$$

Responsfunksjonen kan nå skrives:

$$q = \frac{1}{2} \cdot (a - (n-1)q - c) \tag{12}$$

$$a - (n+1)q - c = 0 \tag{13}$$

$$q = \frac{a-c}{n+1} \tag{14}$$

Total produksjon:

$$Q = nq = \frac{n(a-c)}{n+1} \tag{15}$$

Pris:

$$P(Q) = a - Q = a - \frac{n(a-c)}{n+1} = \frac{an + a - an + nc}{n+1} = \frac{a+nc}{n+1} \tag{16}$$

Profitt:

$$\Pi_i = (P(Q) - c)q = (\frac{a+nc}{n+1} - c)(\frac{a-c}{n+1}) = (\frac{a-c}{n+1})^2 \tag{17}$$

Effekten av en økning i antallet bedrifter:

$$\frac{\partial q}{\partial n} = -\frac{(a-c)}{(n+1)^2} < 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = \frac{(a-c)}{(n+1)^2} > 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2} = -\frac{2(a-c)}{(n+1)^3} < 0 \tag{20}$$

Tolkning: Økt antall bedrifter reduserer produksjonen til den enkelte bedrift, men øker totalproduksjonen. Produksjonsøkningen for total produksjon er avtakende med antallet bedrifter. Når en har mange bedrifter fra før og en ny kommer til blir det i større grad deling av eksisterende produksjon.

Profitten påvirkes også ved etablering av flere bedrifter:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial n} = -\frac{2(a-c)}{(n+1)^3} < 0 \tag{21}$$

Hva skjer når n går mot uendelig? Ser på likningene $14-17$.

Enkeltbedriftens produksjon:

$$\frac{\lim q}{n \to \infty} = 0 \tag{22}$$

Produksjonen til hver enkelt bedrift går mot null når antallet bedrifter går mot ∞

Aggregert produksjon:

$$\frac{\lim Q}{n \to \infty} = a - c \tag{23}$$

Den totale produksjon nærmer seg $a-c$.
Forklaring: Når $n \to \infty$ går $\frac{n}{n+1} \to 1$

Pris:

$$\frac{\lim P(Q)}{n \to \infty} = c \tag{24}$$

Mark-up'en faller mot grensekostnaden når antallet bedrifter går mot ∞

Profitt:

$$\frac{\lim \Pi}{n \to \infty} = 0 \tag{25}$$

Som et naturlig resultat av at prisen faller mot grensekostnader går profitten mot null når $n \to \infty$.

Antall bedrifter går mot uendelig og prisen nærmer seg grensekostnad = enhetskostnad når antall bedriften går mot uendelig. Likevekten nærmer seg altså frikonkurranseløsningen.

Oppgave 3

a)

Forventet tap = 0.25 * 8 = 2 millioner. I tillegg må det betales 20 % administrasjonskostnader. Premien til Kari blir altså 2.4 millioner.

b) Hva er optimal verdi av β?

Maksimeringsproblemet:

$$max_\beta H(\beta) = E(u(\tilde{y}) = Eu(w_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\tilde{x}) \tag{2}$$

$$H'(\beta) = \frac{\partial Eu(\tilde{y})}{\partial \beta} = E[(\tilde{x} - P_0)u'(\tilde{y})] = 0 \tag{3}$$

$$H'(B) = \frac{1}{4}\frac{\tilde{x} - P_0}{(w_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\tilde{x}))} + \frac{3}{4}\frac{(-P_0)}{(w_0 - \beta P_0)} = 0 \tag{4}$$

$$\tilde{x} - P_0 = \frac{3P_0[w_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\tilde{x}]}{(w_0 - \beta P_0)} \tag{5}$$

$$8 - 2.4 = \frac{3 \cdot 2.4[12 - 2.4\beta - (1-\beta)8)]}{12 - 2.4\beta} \tag{6}$$

$$\beta = \frac{38.4}{53.76} = 0.7142 \tag{7}$$

c)

$$8 - 2.4 = \frac{3 \cdot 2.4[16 - \beta 2.4 - (1-\beta)8]}{(16 - 2.4\beta)}$$

$$89.6 - 13.44\beta = 57.6 + 40.32\beta$$

$$\beta = \frac{32}{53.76} = 0.5952$$

Optimal andel faller fra 71.4 % til 59.5 % når initial formue går opp.

d)

Uten administrasjonskostnader følger det fra Mossins teorem at Kari vil full-forsikre fabrikken, $\beta^* = 1$

Oppgave 4

Oppgaven kan løses ved hjelp av modellen i kapittel 2.3 i Macho-Stadler og Perez-Castrillo.

Prinsipalens optimaliseringsproblem

$$\underset{[e, \{w(x_i)\}_{i=1,\dots,n}]}{\text{Max}} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\, B(x_i - w(x_i))$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\, u(w(x_i)) - v(e) \geq \underline{U}.$$

Førsteordensbetingelsen blir:

$$\lambda^O = \frac{B'(x_i - w^O(x_i))}{u'(w^O(x_i))}, \text{for all } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Førsteordensbetingelsen beskriver kontrakten som gir optimal risikofordeling mellom prinsipal og agent.

En god besvarelsen vil gjennomgå ulike kombinasjoner av risikoaversjon hos prinsipal og agent.

i) Bare prinsipalen er risikonøytral

Hvis B''=0, blir B' en konstant. Førsteordens-betingelsen blir da:

$$u'\,(w^O\,(x_i)) = \text{constant for all } i.$$

$$w^O\,(x_1) = w^O\,(x_2) \;\; = \ldots = w^O\,(x_n)$$

I dette tilfellet er det optimalt at prinsipalen bærer all risiko slik at agenten får en fast lønn.

ii) Bare agenten er risikonøytral

Hvis u''=0, blir u' en konstant. Førsteordens-betingelsen blir da:

$$w^O\,(x_i) = x_i - k.$$

I dette tilfellet er det optimalt at agenten bærer all risiko slik at prinsipalen får en fast betaling, tilsvarer franchising.

iii) Begge har risikoaversjon

$$-B'\,(x_i - w^O\,(x_i)\,) + \lambda\, u'\,(w^O\,(x_i)\,) = 0.$$

Differentiating with respect to x_i gives:

$$-B''\left[1 - \frac{\mathrm{d}w^O}{\mathrm{d}x_i}\right] + \lambda\, u''\frac{\mathrm{d}w^O}{\mathrm{d}x_i} = 0.$$

Now, by substituting the equality

$$\lambda = \frac{B'\ (x_i - w^O(x_i))}{u'\ (w^O(x_i))},$$

$$-\frac{B''}{B'}\left[1 - \frac{\mathrm{d}w^O}{\mathrm{d}x_i}\right] + \frac{u''}{u'}\frac{\mathrm{d}w^O}{\mathrm{d}x_i} = 0.$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}w^O}{\mathrm{d}x_i} = \frac{r_p}{r_p + r_a}$$

r_p = Prinsipalens absolutte risikoaversjon

r_a = Agentens absolutte risikoaversjon

I dette tilfellet vil risikoen bli fordelt proporsjonalt med partenes absolutte risikoaversjon. Den som har størst absolutt risikoaversjon bærer minst risiko i den forstand at vedkommende mottar et beløp som varierer mindre med resultatet enn hva den andres beløp gjør.

Det er ikke nødvendig å karakterisere hvilken innsats som kontrakten angir, men det gir heller ikke trekk for å gjøre det.