SENSORVEILEDNING – SØK 3005 – VÅREN 2016

Oppgave 1

Modellen fremstilles i Macho-Stadler & Perez-Castrillo, side 72-75. Det forventes at besvarelsen utleder formelt bankens optimale valg av rente når bedriften velger prosjektets risiko (avkastning/spredning) etter at lånekontrakten er inngått. (*Etter* fordi det er et moral hazard problem og ikke et adverse selection problem.) I modellen i læreboka er det to mulige optimale rentesatser. Den ene av rentesatsene (som gjør at bedriften velger et relativt sikkert prosjekt) innebærer at bedriften går med overskudd. Med tilstrekkelig mange bedrifter vil låneetterspørselen overstige bankens utlånsmidler. Da vil prosjekter med positiv forventet avkastning ikke bli finansiert – som er hvordan vi definerer kredittrasjonering.

Oppgave 2

		2	
		(q)L	(1-q)R
1	(p) T	2,1	0,2
	(1-p)M	1,2	3,0

Sannsynligheten for at spiller 1 velger strategi T defineres som p og ssh for at M velges blir da (1-p).
Sannsynligheten for at spiller 1 velger strategi L defineres som q og ssh for at R velges blir da (1-q).

I en nashlikevekt vil ingen av spillerne angre sin beslutning, gitt motspillerens beslutning. Har derfor en nashlikevekt når løsningen er på begge spillernes besteresponskurver.
Grafisk er dette det punktet hvor spiller 1's besterespons krysser spiller 2's besterespons. Det er da en nødvendighet at spillerne setter p og q slik at en ender i dette punktet hvor besteresponsene krysses.

Spiller 1 setter p slik at spiller 2's forventede profitt er lik for L og R :

$$E_2(L) = E_2(R) \tag{1}$$

$$1 \cdot p + 2(1-p) = 2p + 0(1-p) \tag{2}$$

$$2 - p = 2p \tag{3}$$

$$p = \frac{2}{3} \tag{4}$$

Tilsvarende vil spiller 2 sette q slik at spiller 1's forventede profitt er lik for T og M:

$$E_1(T) = E_1(M) \tag{5}$$

$$2 \cdot q + 0(1-q) = 1 \cdot q + 3(1-q) \tag{6}$$

$$2q = 3 - 2q \tag{7}$$

$$q = \frac{3}{4} \tag{8}$$

Nashlikevekt når 1 og 2 spiller hhv. $p = \frac{2}{3}$ og $q = \frac{3}{4}$

Oppgave 3

Markedet består av 3 oligopolister i et Cournot-spill.
Invers etterspørsel er $P(Q) = a - Q$
Hver bedrift produserer q_i. Aggregert produksjon er da $Q = q_1 + ... + q_n$
Ingen faste kostnader, men marginalkostnaden er c.
Dette spillet har 2 perioder. Først velger bedrift 1. Bedrift 2 og 3 observerer dette kvantumet og velger så sitt kvantum.
Løsning: Baklengs induksjon. Vi starter med å maksimere profitten til bedrift 2 og 3 og finner besteresponsen til disse bedriftene.
Disse besteresponsene vil bedrift 1 ta hensyn til i sin maksimering.

Starter med å finne 2 og 3 besteresponser:
Profittfunksjon for bedrift 2:

$$\Pi_2 = (P(Q) - c)q_2 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = P(Q) - q_2 - c = 0 \tag{10}$$

$$a - q_1 - q_2 - q_3 - q_2 - c = 0 \tag{11}$$

Responsfunksjonen for bedrift 2 blir:

$$q_2 = \frac{1}{2}(a - q_1 - q_3 - c) \tag{12}$$

Responsfunksjonen for bedrift 3 blir:

$$q_3 = \frac{1}{2}(a - q_1 - q_2 - c) \tag{13}$$

Utnytter at bedrift 2 og 3 er like for å få et uttrykk hvor q_2/q_3 ikke inngår.:

$$q_2 = \frac{1}{2}(a - q_1 - q_2 - c) \tag{14}$$

og løser for q_2 (og da også tilsvarende for q_3 siden 2 og 3 er like).

$$q_2 = q_3 = \frac{1}{3}(a - q_1 - c) \tag{15}$$

Setter 2 og 3 responsfunskjon inn i bedrift 1's profittfunksjon.

$$\Pi_1 = \left(a - \tfrac{2}{3}(a - q_1 - c) - q_1 - c\right) q_1 \tag{16}$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{3}(a - q_1 - c)q_1 \tag{17}$$

Cournot gjør at vi maksimerer mhp kvantum.

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \frac{a - q_1 - c}{3} - \frac{q_1}{3} = 0 \tag{18}$$

$$a - q_1 - c - q_1 = 0 \tag{19}$$

Bedrift 1's produksjon:

$$q_1 = \frac{a-c}{2} \tag{20}$$

Setter inn uttrykket for q_1 i bedrifts 2 og 3's responsfunksjon.

$$q_2 = \frac{1}{3}\left(a - c - \tfrac{a-c}{2}\right) \tag{21}$$

$$6q_2 = 2a - 2c - a + c \tag{22}$$

$$q_2 = \frac{a-c}{6} \tag{23}$$

Total produksjon blir her:

$$Q = \frac{a-c}{2} + \frac{2(a-c)}{6} = \frac{5(a-c)}{6} \tag{24}$$

Den delspillperfekte Nash-likevekten består av Bedrifts 1 sin valg av kvantum og responsfunksjonene til bedriftene 2 og 3. NB! Det er ikke riktig å si at Nash-likevekten består av bedrift 2 og 3 sine valg av kvantum q_2 og q_3. De tre kvanta er svar på siste spørsmål: Hvor mye produserer hver bedrift.

Oppgave 4

Et individ har nyttefunksjonen $u(w) = w^{\frac{1}{2}}$, og har initiell formue (w) lik 10.
Individet står ovenfor lotteriet: $\tilde{X} : (-6, \frac{1}{2}; +6, \frac{1}{2})$.
Dette lotteriet har $E(\tilde{X}) = -3 + 3 = 0$

a) Kalkuler sikkerhetsekvivalenten og risikopremien:

$$\begin{aligned} Eu(w + \tilde{X}) &= \frac{1}{2}(10-6)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(10+6)^{\frac{1}{2}} \qquad (1) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4} + \frac{1}{2}\sqrt{16} \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Vi har her funnet forventet nytte for individet som må delta i lotteriet.
Dersom individet med sikkerhet ville hatt $w = 10$ ville nytten vært:

$$u(w) = u(10) = \sqrt{1}0 = 3.162 \tag{2}$$

Det risikoaverse individet ville fått høyere nytte om lotteriet hadde vært unngått.

Hvilken utgift gjør at en ender med samme nytte som ved lotteriet?

$$u(w - \Pi) = u(10 - \Pi) = (10 - \Pi)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

$$(10 - \Pi)^{\frac{1}{2}} = 3 \rightarrow \Pi = 10 - 3^2 = 1 \tag{4}$$

som vi definerer som risikopremien.
Sikkerhetekvivalenten(e) blir da:

$$e = E(\tilde{X}) - \Pi = 0 - 1 = -1 \tag{5}$$

$e = -1$
individet er indifferent mellom lotteriet og å betale en enhet for å unngå det.

b)Anvend Pratts formel for å finne en approksimering av risikopremien :

$$\Pi \simeq \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot A(w) = \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \frac{-u''(w)}{u'(w)} \tag{6}$$

$$\Pi \simeq \frac{1}{2}E(\tilde{X}^2)\frac{-u''(w)}{u'(w)} = \frac{1}{2}6^2\frac{-u''(w)}{u'(w)} \tag{7}$$

ettersom $E(\tilde{X}^2) = E(\tilde{X}^2 - E(\tilde{X})^2) = \frac{1}{2}6^2 + \frac{1}{2}(-6)^2 = 6^2$

Finner 1. og 2.deriverte av nyttefunksjonen:

$$U'(w) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \tag{8}$$

$$U''(w) = -\frac{1}{4} \cdot 10^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{10^3}} \tag{9}$$

Dette gir:

$$\frac{-u''(w)}{u'(w)} = \frac{1}{2\sqrt{10^2}} = 0.05 \tag{10}$$

6 gir da at:

$$\Pi \simeq= 0.5 \cdot 36 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{10^2}} = \frac{18}{20} = 0.9 \tag{11}$$

c) Vis at med en slik nyttefunksjon så vil absolutt risikoaversjon (Hva som skjer med risikoaversjonen når w øker med en enhet) være avtakende, mens den relative risikoaversjonen (hva som skjer risikoaversjonen når w øker med 1%) holdes konstant.

$$A(w) = \frac{-u''(w)}{u'(w)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot w^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot w^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2w} \tag{12}$$

Deriverer den absolutte risikoaversjonen mhp w:

$$A'(w) = \frac{-1}{2w^2} < 0 \tag{13}$$

Den relative risikoaversjonen er:

$$R(w) = wA(w) = \frac{w}{2w} = \frac{1}{2} \tag{14}$$

Deriverer den relative risikoaversjonen mhp w:

$$R'(w) = 0 \tag{15}$$

Forståelse: Etterhvert som w øker, blir en økning i w med en enhet, mindre viktig ettersom denne enheten er en mindre andel av din formue.