Oppgave 1

To partier konkurrerer ved valg, Parti 1 og Parti 2

Det er n velgere. Vi betrakter velger i, i=1,n

Hvis Parti 1 vinner, får velger i nytte = U_{1i}

Hvis Parti 2 vinner, får velger i nytte = U_{2i}

π_{1i} = Sannsynligheten for at velger i stemmer på Parti 1

π_{2i} = Sannsynligheten for at velger i stemmer på Parti 2

$\pi_{2i} = 1 - \pi_{1i}$

NB: Velgerne selv vet hva de skal stemme. Det er partiene som lager sannsynligheter om velgernes valg av parti

Sannsynligheten for å stemme på et parti er høyere jo høyere nytte velgeren får hvis partiet vinner:

$\pi_{1i} = f_i(U_{1i},U_{2i})$,

$\pi_{2i} = 1-f_i(U_{1i},U_{2i})$,

$\partial f_i/\partial U_{1i} > 0$, $\partial f_i/\partial U_{2i} < 0$

Partiene ønsker å maksimere forventet antall stemmer

EV_1 = Forventet antall stemmer for Parti 1

EV_2 = Forventet antall stemmer for Parti 2

$$EV_1 = \sum_{i=1}^{n} \pi_{1i} = \sum_{i=1}^{n} f_i(U_{1i}, U_{2i})$$

$$EV_2 = \sum_{i=1}^{n} (1-\pi_{1i}) = \sum_{i=1}^{n} [1-f_i(U_{1i}, U_{2i})]$$

Velgernes nytte avhenger bare av egen inntekt:

$U_i = U_i(Y_i)$, $dU_i/dY_i > 0$, $d^2U_i/dY_i^2 < 0$, $i=1,n$

Y_i = Velger i sin inntekt etter valget, i=1,n

Partienes valgplattformer forteller hvor mye inntekt hver velger skal få etter valget

Y_{1i} = Inntekten til velger i hvis Parti 1 vinner

Y_{2i} = Inntekten til velger i hvis Parti 2 vinner

For hvert av partiene må valgprogrammene være i tråd med samfunnets budsjettbetingelse

Partiene kan ikke love mer inntekt til velgerne enn hva som er totalt tilgjengelig i samfunnet

Parti 1: $\sum_{i=1}^{n} Y_{1i} = \underline{Y}$

Parti 2: $\sum_{i=1}^{n} Y_{2i} = \underline{Y}$

$\underline{Y}$ = Total inntekt i samfunnet

Parti 1 sitt optimaliseringsproblem

Maks $_{Y_{11}\, Y_{12}, .., Y_{1n}}$ $\sum f_i(U_{1i}(Y_{1i}), U_{2i})$

gitt

$$\sum Y_{1i} = \underline{Y} \qquad (\lambda)$$

λ = Langrange-multiplikator

Langrange-uttrykket:

$$L = \sum f_i(U_{1i}(Y_{1i}),U_{2i}) \; - \lambda[\sum Y_{1i} - \underline{Y}]$$

Førsteordens-betingelsene:

$$\partial L/\partial Y_{1i} = (\partial f_i/\partial U_{1i})\,(\partial U_{1i}/\partial Y_{1i}) - \lambda = 0,\ i=1,n$$

Ser på spesialtilfellet med:

a) $\pi_{1i} = f(U_{1i} - U_{2i})$

1. ordens-betingelsen er:

$$(\partial f/\partial U_{1i})\,(\partial U_{1i}/\partial Y_{1i}) = \lambda,\ i=1,n$$

Vi har: $\partial f/\partial U_{1i} = f'(U_{1i}\text{-}U_{2i})$, $f' = \partial f/\partial(U_{1i}\text{-}U_{2i})$

I likevekt, vil partiene love det samme til hver velger:

$$U_{1i} = U_{2i} \rightarrow \partial f/\partial U_{1i} = f'(U_{1i}\text{-}U_{2i}) = f'(0)$$

I likevekt blir altså $\partial f/\partial U_{1i}$ den samme for alle velgere. 1. ordens-betingelsen kan nå skrives:

$$(\partial U_{1i}/\partial Y_{1i}) = \lambda/f'(0),\ i=1,n$$

Parti 1 (og også Parti 2, pga symmetri) vil lage plattformen slik at alle velgerne har samme grensenytte. Det er det samme som å maksimere en utilitaristisk sosial velferdsfunksjon, W:

$$W = U_{11} + U_{12} + \ldots + U_{1n}$$

Oppgave 2

Individenes nyttefunksjoner:

$$U_1 = X_1^{a1} G^{b1} \tag{1}$$

$$U_2 = X_2^{a2} G^{b2} \tag{2}$$

Individenes budsjettbetingelser:

$$X_1 + G = Y_1 \tag{3}$$

$$X_2 + (1-t)G = Y_2 \tag{4}$$

Vil maksimere nytte mhp på inntekt. Gir følgende Lagrange-funksjoner for hhv. individ 1 og 2:

$$L = X_1^{a1} G^{b1} - \lambda[X_1 + G - Y_1] \tag{5}$$

$$L = X_2^{a2} G^{b2} - \lambda[X_2 + G - Y_2] \tag{6}$$

Førsteordensbetingelsene for 1:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = a1 X_1^{a1-1} G^{b1} - \lambda = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = b1 X_1^{a1} G^{b1-1} - \lambda t = 0 \tag{8}$$

Løser (7) for λ og setter inn i (8):

$$b1 X_1^{a1} G^{b1-1} - t(a1 X_1^{a1-1} G^{b1}) = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{b1 X_1}{a1 G} = MRS_1 \tag{9}$$

Gjør tilsvarende for 2; deriverer (6) mhp X_2 og G, løser den første FOB for λ, setter inn i den andre og finner (1-t):

$$1 - t = \frac{b2 X_2}{a2 G} = MRS_2 \tag{10}$$

Har at siden $t + (1-t) = 1$, så vil $MRS_1 + MRS_2 = 1$.
Vil videre finne individenes ønskede G. For 1, så gjøres dette ved å løse (9) for X_1 og sette inn i budsjettbetingelsen. Da finner vi at

$$G = \frac{b1}{a1 + b1} Y_1 \frac{1}{t}$$

Tilsvarende for individ 2, finner vi:

$$G = \frac{b2}{a2 + b2} \frac{Y_2}{1-t}$$

I Lindahl-likevekten er $G = G^*$, så vi setter $G = G$:

$$\frac{b1}{a1+b1} Y_1 \frac{1}{t} = \frac{b2}{a2+b2} \frac{Y_2}{1-t}$$

Som løses til:

$$t = \frac{b1Y_1(a2+b2)(1-t)}{b2Y_2(a1+b1)}$$

Benytter oss av at $t + (1-t) = 1$:

$$\underbrace{\frac{b1Y_1(a2+b2)(1-t)}{b2Y_2(a1+b1)}}_{=t} + (1-t) = 1$$

$$(1-t)\left[\frac{b1Y_1(a2+b2)}{b2Y_2(a1+b1)} + 1\right] = 1$$

$$(1-t)\left[\frac{b1Y_1(a2+b2)}{b2Y_2(a1+b1)} + \underbrace{\frac{b2Y_2(a1+b1)}{b2Y_2(a1+b1)}}_{=1}\right] = 1$$

$$(1-t) = \frac{b2Y_2(a1+b1)}{(a2+b2)b1Y_1 + b2Y_2(a1+b1)}$$

Setter inn i $t + (1-t) = 1 \Leftrightarrow t = 1 - (1-t)$:

$$t = \frac{(a2+b2)b1Y_1 + b2Y_2(a1+b1)}{(a2+b2)b1Y_1 + b2Y_2(a1+b1)} - \frac{b2Y_2(a1+b1)}{(a2+b2)b1Y_1 + b2Y_2(a1+b1)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{(a2+b2)b1Y_1}{(a2+b2)b1Y_1 + b2Y_2(a1+b1)}$$

Hadde videre at

$$G^* = \frac{b1}{a1+b1} Y_1 \frac{1}{t}$$

Setter inn for t og finner G^*:

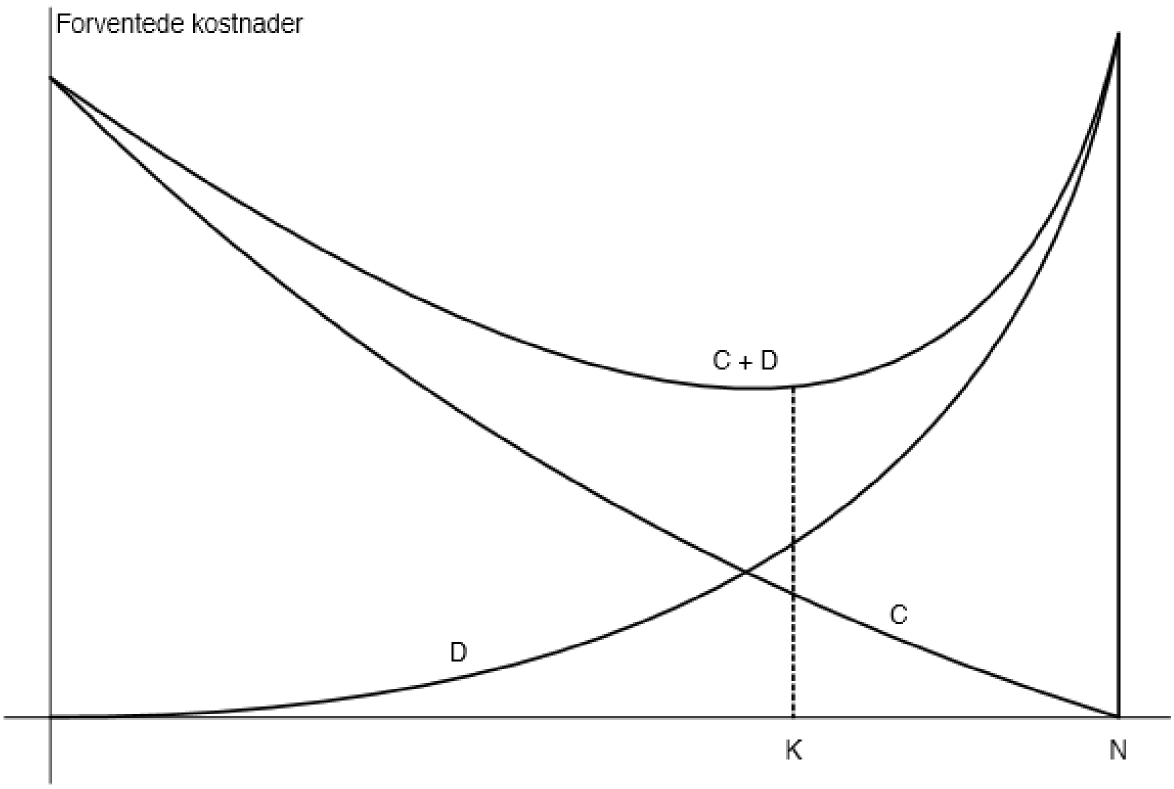
$$G^* = \frac{b1Y_1}{a1+b1} + \frac{b2Y_2}{a2+b2}$$

Oppgave 3

Beslutningskostnader er kostnader som følge av bruk av tid eller avvik fra paretooptimalitet.

Den paretooptimale beslutningen vil være enstemmighet, fordi da vil alle være fornøyd med utfallet. Dette er imidlertid tidkrevende å oppnå jo flere individer som er involvert i prosessen. Motsatt kan man spare tid ved å bruke flertallsbeslutninger, men da vil det være noen som er uenig i utfallet – og på den måten "taper". Vi får da beslutningskostnader fordi det er et avvik mellom nyttenivået som oppnås ved flertallsbeslutning og nyttenivået som kunne vært oppnådd ved enstemmighet.

Dette kan illustreres i en figur:

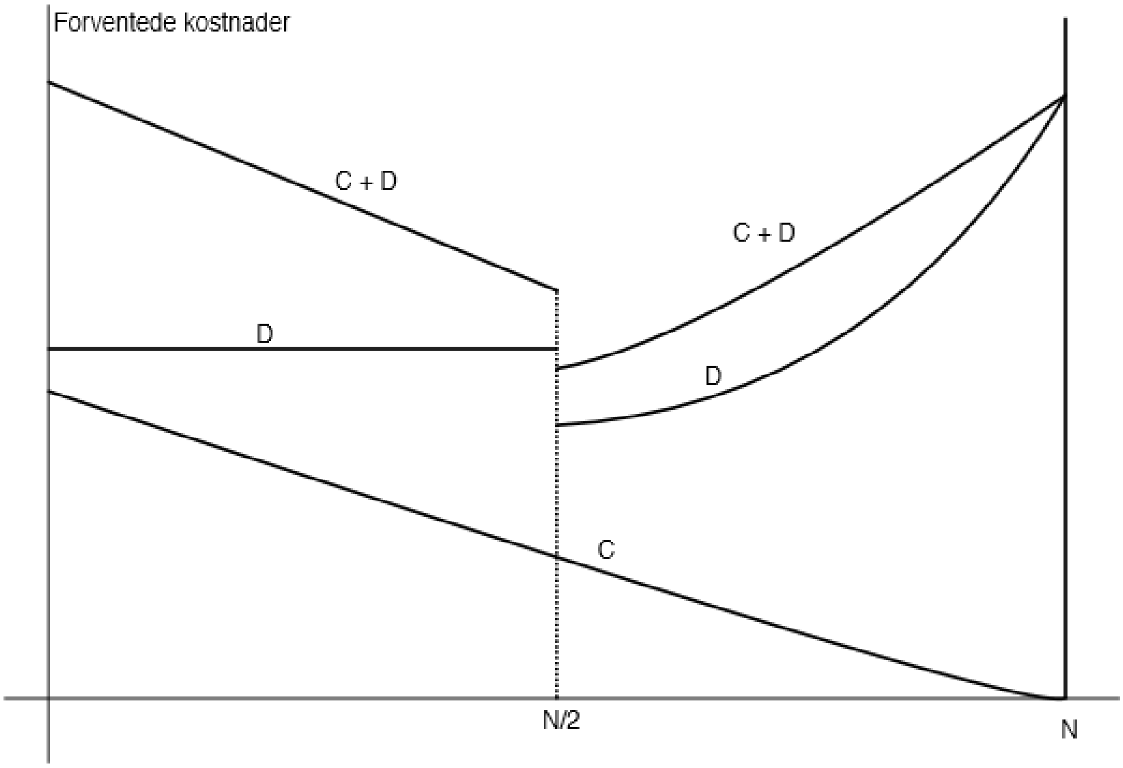


I figuren har vi at C illustrerer tap av nytte som følge av at en beslutning blir tatt som et (eller flere) individ er uenig i. D er tidskostnader som en funksjon av hvor mange som skal være enige. Det optimale flertallet for å gjennomføre en beslutning er hvor de totale beslutningskostnadene er minimert, dette skjer i K – så det optimale flertallet vil være K/N. Ved K/N så vil forventet økning i nytte for å få en ekstra støttespiller være lik tidskostnadene ved å oppnå det.

Disse kostnadene vil være ulik utifra hvilke saker man diskuterer, avhengig av størrelse på N etc.

Hvordan kan man så begrunne simpelt flertall som optimal majoritet?

I boken blir det drøftet et mulig brudd i tids-kostnadskurven ved N/2:



Grunnen til denne bristen i kostnadskurven D, er at når mindre enn halvparten av medlemmene skal være enig i en avgjørelse, så åpner dette muligheten for at flere motstridende forslag kan bli vedtatt – slik at man havner i en låst situasjon med kontinuerlig nye forslag som man sløser vekk tid på. Derfor blir tidskostnaden D høyere når færre enn N/2 skal til for å vedta noe. Når vi har et simpelt flertall som beslutningsavgjørelse, kan ikke flere saker vedtas samtidig – og derfor vil tids-kostnadene være lavere til høyre for N/2.