Sensorveiledning SØK 1002 – høsten 2019

Oppgave 1

Petter etterspør to goder, X_1 og X_2. Prisene på de to godene, som Petter må ta for gitt, er henholdsvis p_1 og p_2. Etterspørselen til Petter er slik at høyere p_1 reduserer etterspørselen etter X_1 og høyere p_2 reduserer etterspørselen etter X_2. Anta at Petter har preferanser for de to godene som kan uttrykkes med en nyttefunksjon, og at Petter har en gitt pengeinntekt som han i sin helhet bruker på de to godene.

a) Ut fra teorien om konsumentens tilpasning, forklar hvorfor Petter kan ha disse to etterspørselsfunksjonene med de egenskapene som er oppgitt ovenfor.

Ut fra teorien for konsumentens tilpasning vil Petter maksimere nyttefunksjonen, f.eks. angitt ved $\mathrm{U}(x_1, x_2)$. Vi antar at nyttefunksjonen gir konvekse indifferenskurven som krummer mot origo. Videre antar vi at Petter bruker hele inntekten på de to godene slik at budsjettbetingelsen blir $m = p_1 x_1 + p_2 x_2$, hvor m er den gitte pengeinntekten.

Matematisk løsning av dette maksimeringsproblemet ved bruk av Lagrange metode gir to betingelser som må være oppfylt: Den marginale substitusjonsbrøken (MSB) må være lik relative priser og hele budsjettet må brukes på de to godene. Dette gir etterspørselen etter x_1 og x_2 som funksjoner av p_1, p_2 og m: $x_1^* = \mathrm{f}(p_1, p_2, m)$ og $x_2^* = \mathrm{g}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, m)$.

Matematisk er problemet: $\underset{x_1,\, x_2}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{U}(x_1,\ x_2)$ slik at $m = p_1 x_1 + p_2 x_2$
Setter opp Lagrange-funksjonen $\mathcal{L} = \mathrm{U}(x_1,\ x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$,
der λ er Lagrange-multiplikatoren

Deriverer mhp. $x_1,\ x_2$ og λ, og finner førsteordensbetingelsene:

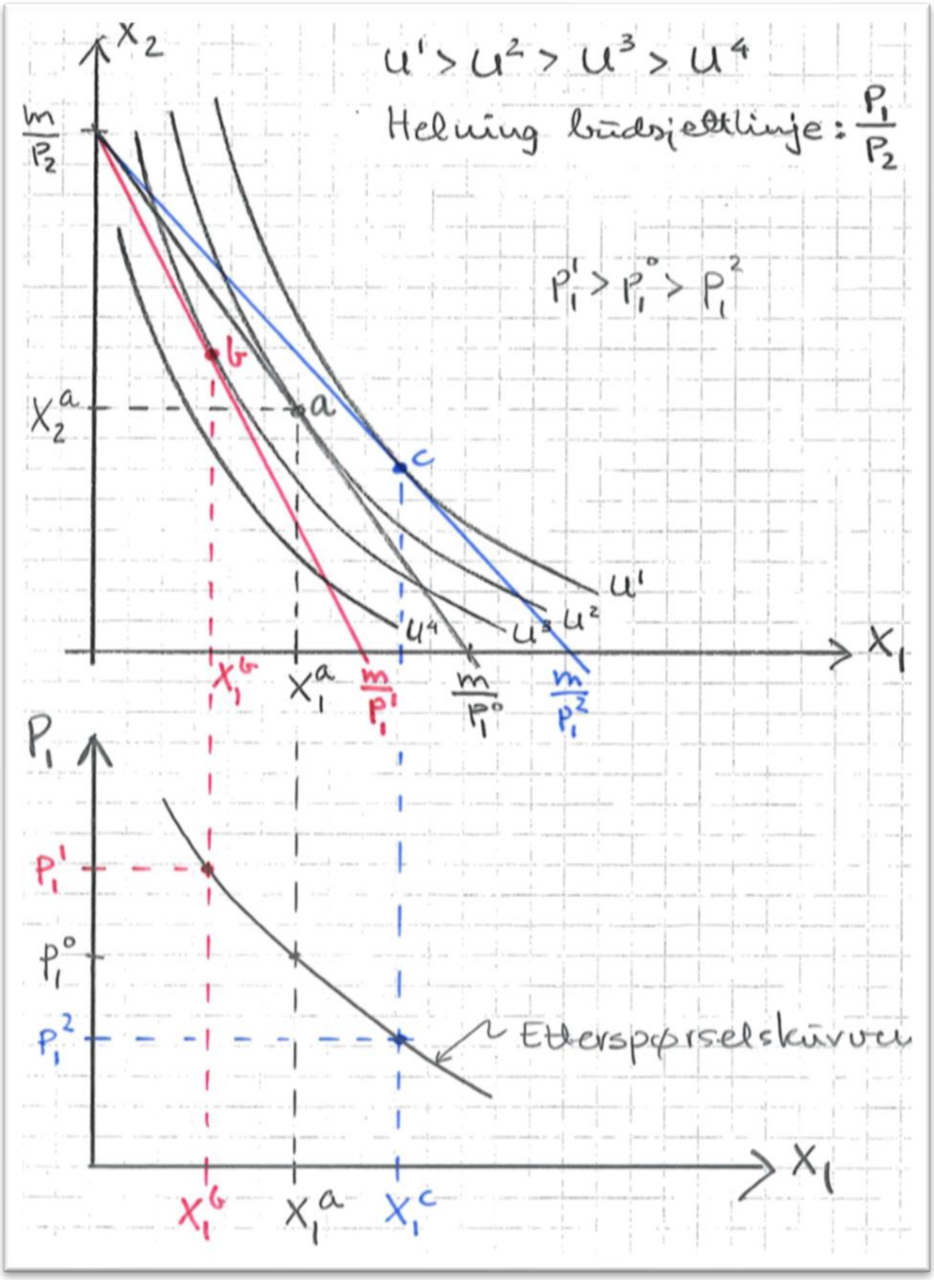
(1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{x}_1} = \mathrm{U}_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) - \lambda \mathrm{p}_1 = 0$
(2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{x}_2} = \mathrm{U}_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) - \lambda \mathrm{p}_2 = 0$
(3) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\mathrm{p}_1 \mathrm{x}_1 - \mathrm{p}_2 \mathrm{x}_2 + \mathrm{m} = 0$

Fra (1) finner vi at $\lambda = \frac{\mathrm{U}_1(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)}{\mathrm{p}_1}$, som innsatt i (2) gir $\mathrm{U}_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) - \frac{\mathrm{U}_1(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)}{\mathrm{p}_1}\mathrm{p}_2 = 0$.
Da følger det at

$$\frac{U_1(x_1, x_2)}{U_2(x_1, x_2)} \equiv MSB = \frac{p_1}{p_2}$$

$\mathrm{U}_\mathrm{i}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ er marginalnytten av gode i (i=1, 2).

I dette tilfellet er det ikke mulig å finne eksplisitte uttrykk for etterspørselsfunksjonene siden vi bare har en generell nyttefunksjon. Det er viktig at tilpasningen forklares godt grafisk, og at kandidaten viser at tilpasningen gir etterspørselsfunksjoner med de egenskapene som oppgitt i oppgaveteksten. En figur tilsvarende denne kan brukes til drøftingen.



Det er viktig at besvarelsen får fram at substitusjonseffektene (SE) er negative (fører til redusert etterspørsel), og at inntektseffektene (IE) må være mindre enn SE i tilfelle godet er et *mindreverdig* gode. Disse effektene må forklares. Hvis IE dominerer over SE, er det snakk om et svært *mindreverdig* gode som gir positiv sammenheng mellom egenpris og etterspurt kvantum, et s.k. Giffen-gode.

Hvis det er snakk om et *normalt* gode, trekker begge effektene i samme retning og sammenhengen mellom pris og etterspurt kvantum er negativ.
Normale og mindreverdige goder må defineres/forklares.

b) ***Er det mulig at høyere pris på X_1, som fører til redusert etterspørsel etter dette godet, ikke påvirker Petters etterspørsel etter X_2? Begrunn svaret.***

Ja, det er mulig. Det innebærer at x_2 er et normalt gode, og at preferansene er slik at den positive SE (når p_1 øker) akkurat blir motvirket av den negative IE. Dette må forklares/drøftes i en figur tilsvarende den under a).

c) ***I tilfelle b), er det mulig at en økning i inntekten til Petter ikke øker etterspørselen etter X_2? Begrunn svaret.***

Nei, det er ikke mulig. Grunnen er at under b) må x_2 være et normalt gode hvor IE utligner SE. Et normalt gode innebærer at økt inntekt gir økt etterspørsel. Svaret må forklares, helst i en figur.

Oppgave 2

En bedrift produserer en vare y med produktfunksjonen $y = AL^{\alpha}K^{\beta}$, der L er mengde arbeidskraft og K er mengde realkapital som brukes i produksjonen av y. Parameteren A er en positiv konstant, og α og β er også konstante parametere.

a) ***Hva uttrykker marginalproduktet og gjennomsnittsproduktet til en produksjonsfaktor?***

Marginalproduktet forteller hvor mye produksjonen øker når innsatsen av en produksjonsfaktor øker (med en enhet). For økonomisk interessante tilpasningsområder er marginalproduktet positivt, men avtakende, slik at en økning i faktorinnsatsen gir mindre og mindre positive bidrag til produksjonen jo høyere innsatsen av faktoren er.
Dette kan illustreres i en figur hvor innsatsen av arbeidskraft varierer til gitt kapitalmengde.

Gjenomsnittsproduktet er samlet produksjon dividert med antall enheter av en produksjonsfaktor, f.eks. produserte enheter i gjennomsnitt pr. arbeider.

b) ***Finn marginalproduktet (MP_L) og gjennomsnittsproduktet (GP_L) til L (arbeidskraft) når produktfunksjonen er som oppgitt. Hvordan påvirkes MP_L og GP_L av at innsatsen av arbeidskraft øker? Hvordan påvirkes MP_L og GP_L av at innsatsen av realkapital (K) øker?***

Riktige svar:

$\boldsymbol{MP_L} = \frac{\partial y}{\partial L} = \alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta} > 0$ (gitt at $\alpha > 0$)

$\boldsymbol{GP_L} = \frac{y}{L} = A L^{\alpha-1} K^{\beta} > 0$

$\frac{\boldsymbol{\partial MP_L}}{\boldsymbol{\partial L}} = \alpha A(\alpha - 1) L^{\alpha-2} K^{\beta} < 0$ (gitt at $0 < \alpha < 1$)

$\frac{\boldsymbol{\partial GP_L}}{\boldsymbol{\partial L}} = A(\alpha - 1) L^{\alpha-2} K^{\beta} < 0$ (gitt at $0 < \alpha < 1$)

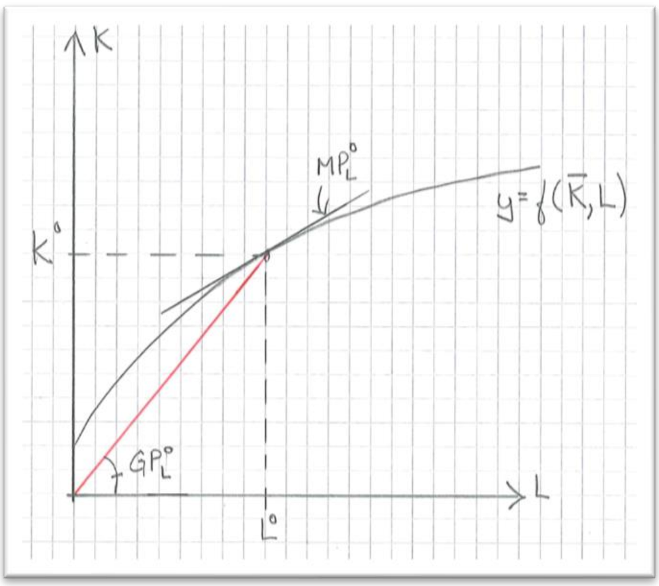
$\frac{\boldsymbol{\partial MP_L}}{\boldsymbol{\partial K}} = \alpha \beta A L^{\alpha-1} K^{\beta-1} > 0$ (gitt at $\alpha > 0$ og $\beta > 0$)

$\frac{\boldsymbol{\partial GP_L}}{\boldsymbol{\partial K}} = \beta A L^{\alpha-1} K^{\beta-1} > 0$ (gitt at $\beta > 0$)

Marginalproduktet er positivt hvis $\alpha > 0$. Videre er både marginal- og gjennomsnittsproduktene økende hvis $\alpha > 1$, noe som ikke stemmer med det vi vanligvis antar om egenskapene til produktfunksjoner, jfr. svaret på a). Ut fra dette følger som en rimelig antakelse at $0 < \alpha < 1$.

Marginal- og gjennomsnittsproduktivitetene er proporsjonale med parameteren α.
Hvis $0 < \alpha < 1$ er arbeidskraftens marginalproduktivitet alltid mindre enn gjennomsnittsproduktiviteten, og endringen i MP_L er også mindre enn endringen i GP_L når innsatsen av arbeidskraft øker. Dette viser at arbeidskraften har avtakende marginalproduktivitet. Dette er illustrert i figuren nedenfor, tilsvarende fra svaret på a).

Både marginal- og gjennomsnittsproduktivitetene øker dersom innsatsen av kapital øker, slik vi vil forvente.



c) ***Forklar generelt hva den tekniske substitusjonsbrøken (TSB) uttrykker, og finn deretter TSB med denne produktfunksjonen.***

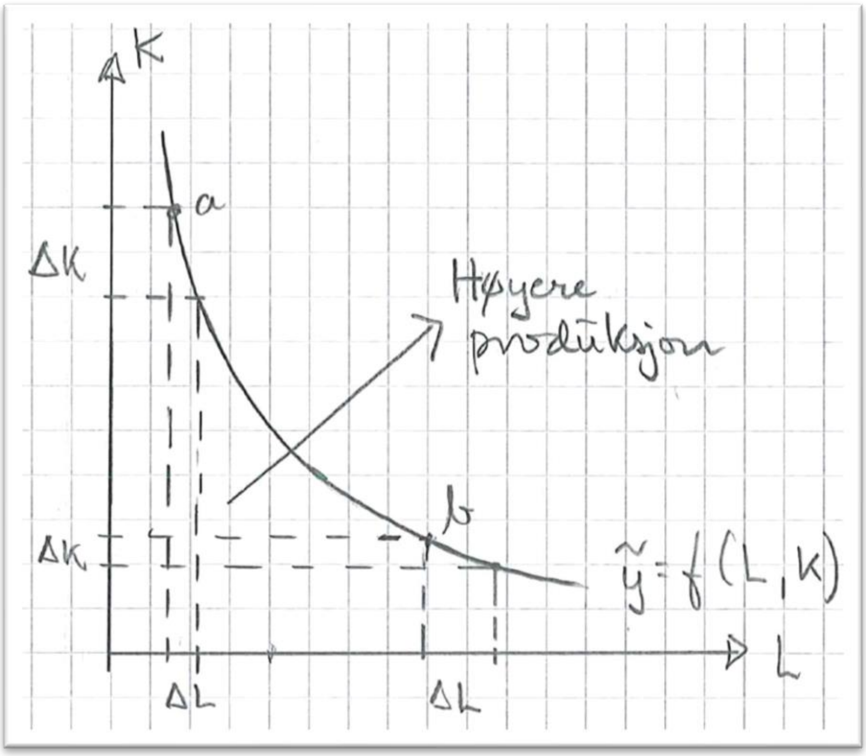
TSB er en egenskap ved produktfunksjonen som viser hvordan L og K må substitueres for å opprettholde et bestemt produksjonsnivå.
For å være økonomisk interessant må TSB være avtakende. Det betyr at hvis det er mye av en produksjonsfaktor, f.eks. L, og lite av en annen, f.eks. K, og bedriften ønsker å redusere mengden av L (som det er mye av), kan dette skje ved en relativt liten økning i K uten at produksjonen reduseres. TSB er tallverdien til helningen på isokvanten, som er negativ.

I dette tilfellet blir $TSB = -\frac{dK}{dL} = \frac{\alpha K}{\beta L} > 0$.

Helningen på isokvanten er ut fra dette $-\frac{\alpha K}{\beta L} < 0$. For at TSB skal ha de egenskapene som er beskrevet ovenfor, må isokvanten krumme mot origo i (K,L)-planet. Ved implisitt derivasjon finner en at isokvanten for denne produktfunksjonen tilfredsstiller dette kravet fordi isokvanten er konveks:

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{\alpha K}{\beta L^2}(1 + \frac{\alpha}{\beta}) > 0$$

Dette bør illustreres og forklares i en figur, slik f.eks.:



d) ***Hva vil du si om skalaegenskapene i produksjonen til denne bedriften?***

Skalaegnskapene forteller hvor mye produksjonen endres relativt til samme relative endringer i alle produksjonsfaktorer. Konstant, avtakende og økende skalautbytte må forklares:
Hvis f.eks. alle produksjonsfaktorene økes med 10% og produksjonen øker relativt like mye, dvs. med 10%, er det *konstant* skalautbytte i produksjonen.
Hvis en relativt like stor økning i alle produksjonsfaktorer øker produksjonen med *mindre* enn økningen i produksjonsfaktorene, er det *avtakende* skalautbytte. Hvis en slik økning i produksjonsfaktorene gir en relativt større økning i produksjonen, har vi *økende* skalautbytte.

Hvis vi øker innsatsen av L og K med k (f.eks. k = 0,1), blir produsert kvantum lik

$$A[L(1+k)]^{\alpha}[K(1+k)]^{\beta} = (1+k)^{\alpha+\beta}AL^{\alpha}K^{\beta} = (1+k)^{\alpha+\beta}y$$

Det innebærer at hvis $\alpha + \beta = 1$, vil produksjonen øke proporsjonalt like mye som økningen i produksjonsfaktorene, dvs. vi har konstant skalautbytte.
Vi har økende skalautbytte hvis $\alpha + \beta > 1$, fordi produksjonen øker mer enn økningen i produksjonsfaktorene, k. Og hvis $\alpha + \beta < 1$ har vi avtakende skalautbytte.

Skalaegenskapene i produksjonen til denne bedriften avhenger altså av størrelsen på α og β.

Anta i fortsettelsen at A = 10 og at α = β = ½.

e) ***Anta at bedriften minimerer kostnadene til et fastsatt produksjonsnivå lik 100. La enhetsprisene på henholdsvis L og K være w og q. Disse faktorprisene er konstanter som bedriften tar for gitt og ikke kan påvirke. Finn bedriftens etterspørsel etter L og K under disse forutsetningene.***

Formelt er problemet å løse følgende problem:
Min. $C = wL + qK$ m.h.p. L og K slik at $100 = 10L^{½}K^{½}$

Løsningen kan finnes ved å sette opp Lagrange-funksjonen, derivere denne m.h.p. beslutningsvariablene L og K, og Lagrangemultiplikatoren, og løse førsteordensbetingelsene for disse tre variablene.

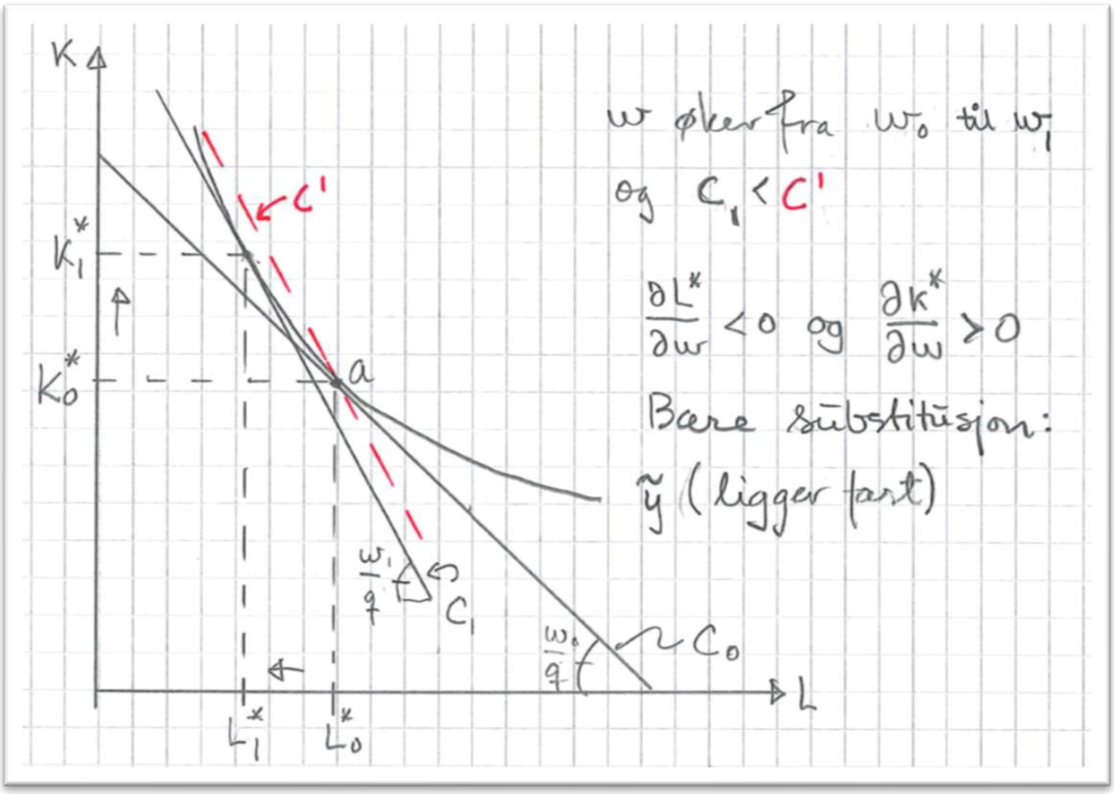
Men en trenger ikke sette opp Lagrange for å få dette resultatet: Det er minst like bra besvarelse å bruke svaret på c) og *forklare* at tangeringsbetingelsen i dette tilfellet blir $\frac{K}{L} = \frac{w}{q}$.
Forklaringen på tangeringsbetingelsen er viktig, fortrinnsvis ved hjelp av figurer, enten man velger den ene eller andre måten.
For å finne etterspørselen etter K og L må sammenhengen mellom K og L i produksjonen (produktfunksjonen) og produksjonskravet lik 100 benyttes, dvs. vi har to ligninger i de to ukjente K og L. Det gir løsningene:

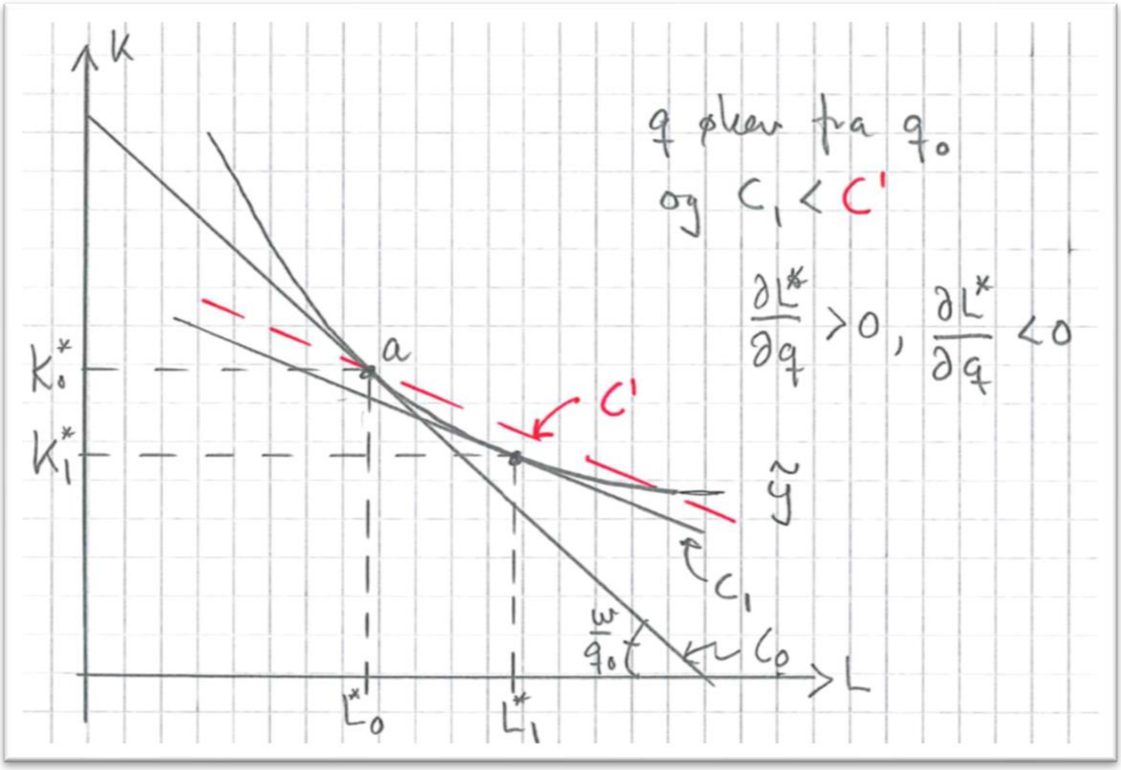
$$L^* = 10(\frac{w}{q})^{-½} \text{ og } K^* = 10(\frac{w}{q})^{½}.$$

Det er viktig at tangeringsbetingelsen, som sier at TSB skal være lik relative faktorpriser, og at tilpasningen tolkes/forklares, og bør illustreres i en figur.

f) ***Vis hvordan en økning i w og q påvirker etterspørselen etter L og K, og forklar resultatene.***

Faktorprisendringer påvirker etterspørselen etter K og L slik:
$\frac{\partial L^*}{\partial w} = -5w^{-1,5}q^{0,5} < 0$, $\frac{\partial L^*}{\partial q} = 5w^{-0,5}q^{-0,5} > 0$,
$\frac{\partial K^*}{\partial w} = 5w^{-0,5}q^{-0,5} > 0$, $\frac{\partial K^*}{\partial q} = -5w^{0,5}q^{-1,5} < 0$
Disse resultatene viser at økt egenpris reduserer etterspørselen etter produksjonsfaktoren, men krysspriseffektene er positive. Dette må illustreres og forklares grafisk, f.eks. slik:





g) *Hvordan varierer bedriftens kostnader med produksjonsnivået i dette tilfellet?*

Riktig svar her innebærer å finne kostnadene som funksjon av produksjonsnivået. Svaret finnes ved enten å benytte Lagrange metode eller ved å benytte tangeringsbetingelsen og produktfunksjonen.

Tangeringsbetingelsen er fortsatt $\frac{K}{L} = \frac{w}{q}$, som i svaret på e) gir denne sammenhengen mellom K og L: $K = \frac{w}{q}L$.

Produsert kvantum varierer i henhold til produktfunksjonen $y = AL^{½}K^{½}$, som gir denne sammenhengen mellom K og L: $K = (\frac{1}{10})^2 y^2 L^{-1}$.

Med disse to ligningene blir løsningene for L og K:

$$L^* = \frac{1}{10}(\frac{w}{q})^{-½}y \text{ og } K^* = \frac{1}{10}(\frac{w}{q})^{½}y.$$

En alternativ framstilling ville vært å finne disse svarene under e) og deretter sette inn for y=100, som da vil gi de samme svarene som under e).

Den minimale kostnadsfunksjonen finnes ved å sette inn for L^* og K^*:

$$C = wL^* + qK^* = w \times \frac{1}{10}(\frac{w}{q})^{-½}y + q \times \frac{1}{10}(\frac{w}{q})^{½}y = \frac{2}{10}(wq)^{½}y$$

Kostnadsfunksjonen viser at kostnadene er lineært avhengige av y, slik vi forventer ved konstant skalautbytte i produksjonen; proporsjonale endringer i faktorinnsatsen gir proporsjonal endring produsert mengde, og følgelig i proporsjonale endringer i kostnadene.

Dette innebærer at marginalkostnadene er konstante, og lik gjennomsnittskostnadene.

Kostnadsfunksjonen kan ev. illustreres i en figur.

Dette gjelder lang sikt, når begge (alle) produksjonsfaktorer kan endres. Dersom én av faktorene ligger fast (kort sikt), vil den kortsiktige kostnadsfunksjonen være konveks.