SENSURVEILEDNING SØK 3004 VÅR 2021

Oppgave 1

a)

$$\int \frac{x^3 - 3x + 4}{x}\,dx = \int \left(x^2 - 3 + \frac{4}{x}\right)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 3x + 4\ln|x| + C$$

b)

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\text{, so} \int \frac{x^3}{x+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C$$

c) Kurven er under X-aksen fra 0 til 6. Kandidaten må derfor dele opp integralet i to intervaller og huske minus foran integralet fra 0 til 6.

$$-\int_0^6 \left[(x-3)^2 - 9\right]dx + \int_6^9 \left[(x-3)^2 - 9\right]dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}(x-3)^3 - 9x\right]_0^6$$

$$+ \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 - 9x\right]_6^9$$

$$-\frac{27}{3}+54-\frac{27}{3}$$

$$+\frac{216}{3}-81-\frac{27}{3}+54$$

$$=-9+54-9+72-81-9+54$$

$$=72$$

Oppgave 2

a) Fra reglene for matriseprodukter er $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Vi behøver derfor bare å regne ut et av produktene.

$(\mathbf{AB})\mathbf{C} =$

$$\begin{pmatrix} 23 & 8 & 25 \\ 92 & -28 & 76 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

b)

Trekk andre kolonne fra første kolonne. Da blir determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & 1 & x+y \\ y-1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (y-1)\begin{vmatrix} x-y & x^2-y^2 \\ 1 & x+y \end{vmatrix} = (y-1)\cdot 0 = 0$$

c)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} :$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 19, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -38, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 38$$

$$x = 19/19 = 1, \quad y = -38/19 = -2, \quad \text{and} \quad z = 38/19 = 2$$

Oppgave 3

a)

$\int a(t)\,dt = -\frac{1}{2}\ln(t^2 - 1)$

Fra (5.4.6) i 'Further mathematics' følger det at

$x = C\sqrt{t^2 - 1} + t^2 - 1$

b)

$a(t) = -2/t,\ b(t) = -2a^2/t^2,\ \int a(t)\,dt = -2\ln t$

Som gir at

$x = Ct^2 + 2a^2/3t$

Oppgave 4

Maksimer $2xy + 2$

gitt at

$x + 2y \leq 2$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Lagrange: $L(x, y) = 2xy + 2 - \lambda(x + 2y - 2)$

Kuhn–Tucker:

$\partial L/\partial x = 2y - \lambda \leq 0$ (= 0 if $x > 0$) (i)

$\partial L/\partial y = 2x - 2\lambda \leq 0$ (= 0 if $y > 0$) (ii)

$\lambda \geq 0$ (= 0 if $x + 2y < 2$) (iii)

Hvis i) eller ii) er gitt ved ulikhet, vil x eller y være lik null og maksimanden blir lik 2. Hvis både x og y er større enn null, noe som er mulig gitt bibetingelsene, vil maksimanden bli større enn 2. I optimum vil følgelig i) og ii) være oppfylt med likhet og lambda må være positiv. Altså har vi at fra (i) at $\lambda = x$ og fra (ii) at $\lambda = 2y$, som gir at $x = 2y$. Siden lambda er positiv er (iii) oppfylt med likhet, slik at $x + 2y = 2$. Vi har nå to ligninger med to ukjente ($x = 2y$, $x + 2y = 2$), som gir $x = 1$ og $y = ½$.

Oppgave 5

Profittfunksjonen er konveks i prisene på innsatsfaktorer, kapittel 3 i Varian. Gjennomsnittet av profittene for to prisvektorer er derfor større enn eller lik profitten for gjennomsnittet av de to prisvektorene. Resultatet kommer av at bedriften kan substituere seg bort fra relativt dyre innsatsfaktorer i retning av rimelige innsatsfaktorer, noe som betyr lavere kostnader enn i en situasjon uten slike substitusjonsmuligheter.