1

Løsningsforslag SØK 3004 (Konte V15)

a) $\int 3t^2 dx = \underline{\underline{3t^2x + C}}$

b) $\int x^2 \sqrt{x^3+9}\, dx$

Sett $u = x^3 + 9$, $du = 3x^2 dx$

$$\int x^2\sqrt{x^3+9}\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+9)^{1/2} 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{1/2} du = \frac{1}{3}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}u^{3/2} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{9}(x^3+9)^{3/2} + C}}$$

c) $\int x e^{-x} dx$

Bruker sammenhengen $\int f g' dx = fg - \int f' g\, dx$.

Sett $x = f$ og $e^{-x} = g'$:

$$\int x e^{-x} dx = -xe^{-x} - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx$$

$$= \underline{\underline{-xe^{-x} - e^{-x} + C}}$$

d) La $f(x) = e^{x^2}$. Vi kan finne første en Taylorekspansjon av $f(x)$ rundt punktet $a = 0$: ($f'(x) = 2xe^{x^2}$ og $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$)

$$f(x) \approx e^{0^2} + 2\cdot 0 e^{0^2}\cdot(x-0) + \frac{1}{2}(2e^{0^2} + 4\cdot 0^2 e^{0^2})(x-0)^2$$

$$= 1 + x^2$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \int_0^1 (1+x^2)dx = \left[x + \frac{1}{3}x^3 + c\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

(Det eksakte svaret er ca 1,45.)

2

a) $$PV = \int_0^T e^{-rt}\left(A - Be^{\beta t}\right)dt = \int_0^T \left(Ae^{-rt} - Be^{(\beta-r)t}\right)dt$$

$$= \left[-\frac{A}{r}e^{rt} - \frac{B}{\beta - r}e^{(\beta-r)t}\right]_0^T$$

$$= -\frac{A}{r}e^{-rT} + \frac{A}{r} - \frac{B}{\beta-r}e^{(\beta-r)T} + \frac{B}{\beta-r}$$

$$= \underline{\underline{\frac{A}{r}\left(1 - e^{-rT}\right) + \frac{B}{\beta-r}\left(1 - e^{(\beta-r)T}\right)}}$$

b) Det er lønnsomt å utvinne så lenge profitten π er positiv. Stopp når $\pi_t = 0$:

$$A - Be^{\beta t} = 0 \iff t = \frac{\ln\left(\frac{A}{B}\right)}{\beta}$$

↳ Optimalt å stoppe utvinningen for

$$\underline{\underline{T^* = \frac{\ln\left(\frac{A}{B}\right)}{\beta}}}$$

(Dette svaret kan også finnes ved å maksimere PV mhp T. Finn den deriverte av PV mhp T og sett lik null.)

3

La X_1 være beløpet investert i aksjer, X_2 beløpet investert i obligasjoner og X_3 beløpet investert i eiendom.

Vi kan sammenfatte problemet slik:

$$\begin{bmatrix} 2X_1 + 1X_2 + 1{,}5X_3 = 150 \\ 1X_1 + 1X_2 + 1X_3 = 100 \\ 0{,}5X_1 + 1X_2 + 1X_3 = 80 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{God} \\ \text{Middels} \\ \text{Dårlig} \end{matrix}$$

Vi må altså løse 3 ligninger i 3 ukjente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \frac{3}{2} & 150 \\ 1 & 1 & 1 & 100 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 80 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -50 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 30 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 50 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

Vi må gjøre følgende investeringer:

Aksjer: **40**, obligasjoner: **40** og Eiendom **20**.

Total investering blir $40 + 40 + 20 = \underline{\underline{100}}$

4

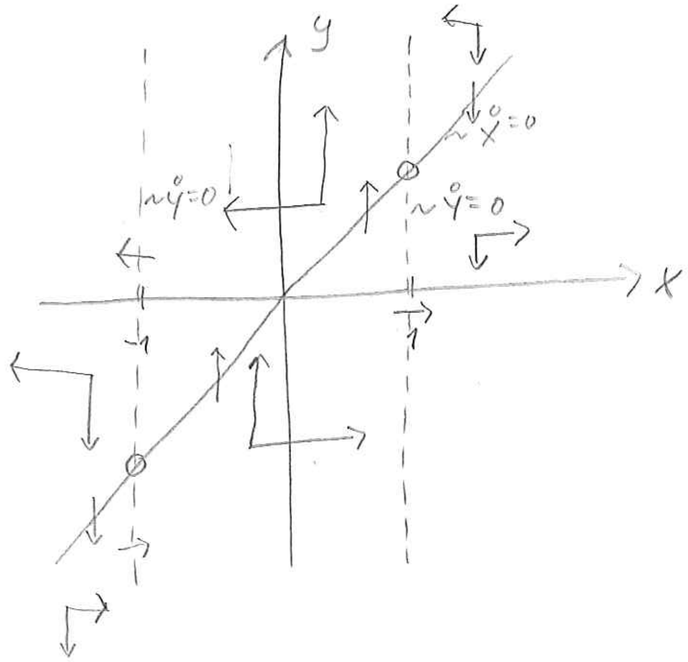
$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = 1 - x^2$$

a) $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Vi får dermed to stasjonære punkter: $(-1,-1)$ og $(1,1)$

b)



c) Vi har at matrisen A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2x & 0 \end{bmatrix}.$$

Evaluert i de to likevektspunktene får vi

$$A(-1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } A(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A(-1,-1)| = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2 > 0 \text{ og } |A(1,1)| = 1 \cdot 0 - (-2)(-1) = -2 < 0.$$

Punktet $(1,1)$ er et sadelpunkt

5

a) $$\min_{K,L} \; rK + wL$$

s.t

$$\sqrt{K} + \sqrt{L} = Q$$

$$\mathcal{L} = rK + wL - \lambda(\sqrt{K} + \sqrt{L} - Q)$$

$$\mathcal{L}_K = r - \tfrac{1}{2}\lambda K^{-1/2} = 0 \iff \sqrt{K} = \frac{\lambda}{2r}$$

$$\mathcal{L}_L = w - \tfrac{1}{2}\lambda L^{-1/2} = 0 \iff \sqrt{L} = \frac{\lambda}{2w}$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -\sqrt{K} - \sqrt{L} + Q = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{2r} - \frac{\lambda}{2w} = -Q \iff$$

$$\lambda(w+r) = 2wrQ \iff$$

$$\lambda = \frac{2wrQ}{w+r}$$

Dette gir

$$\sqrt{K} = \frac{wQ}{w+r} \Rightarrow K^* = \frac{(wQ)^2}{(w+r)^2}$$

$$\sqrt{L} = \frac{rQ}{w+r} \Rightarrow L^* = \frac{(rQ)^2}{(w+r)^2}$$

b) $\pi^* = \max_Q \pi = \max_Q \; PQ - r\frac{w^2Q^2}{(w+r)^2} - w\frac{r^2Q^2}{(w+r)^2}$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = P - 2r\frac{w^2Q}{(w+r)^2} - 2w\frac{r^2Q}{(w+r)^2} = 0 \iff$$

$$\frac{P(w+r)^2}{2} - rw^2Q - wr^2Q = 0 \iff$$

$$Q(rw^2 + wr^2) = \frac{p(w+r)^2}{2} \iff$$

$$Q(w+r)rw = \frac{p(w+r)^2}{2} \iff$$

$$\underline{\underline{Q^* = P(w+r)/(2wr)}}.$$

c) $$\frac{dQ^*}{dw} = \frac{d}{dw}\left(\frac{P}{2r} + \frac{P}{2w}\right) = -\frac{P}{2w^2} < 0$$

↳ Tilbudet synker når w øker.