Løsningsforslag SØK3004 H17

#1

a) $\int (3x^2 + 2e^{2x})\,dx = \underline{\underline{x^3 + e^{2x} + C}}$

b) $\int x^2 e^x\,dx$

Bruk delvis integrasjon. Sett

$f(x) = x^2$ og $g'(x) = e^x$ og bruk at

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \underbrace{\int 2xe^x\,dx}_{\circledast}$$

Bruk delvis integrasjon på $\circledast$:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C_1.$$

Innsatt får vi:

$$\int x^2 e^x\,dx = \underline{\underline{x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C}}$$

c) Vi har at

Symmetrisk rundt $x=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

$f(x) = e^{-x^2}$ er kontinuerlig og begrenset på intervallet $x \in [0,1]$ og $\int_0^1 f(x)\,dx$ er følgelig endelig.

For $x \in [0, \infty)$, har vi at $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[-e^{-x}+C\right]_1^a = \frac{1}{e}.$$

$\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ konvergerer, og da må også $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konvergere.

$\hookrightarrow$ $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konvergerer.

#2

$$X(t) = X_T e^{-a(T-t)} - \int_t^T e^{-a(v-t)}\,b\,dv$$

a)
$$\frac{dX(t)}{dt} = aX_T e^{-a(T-t)} - -\underbrace{e^{-a(t-t)}}_{=1} b - \int_t^T (-a) e^{-a(v-t)}\,b\,dv$$

$$= a\underbrace{\left(X_T e^{-a(T-t)} + \int_t^T e^{-a(T-t)}\,b\,dv\right)}_{=X(t)} + b$$

$$= \underline{\underline{aX(t) + b}}$$

b) Ved å plassere pengene i banken vil han få renter på tid t på $r(t)v(t)$.

Ved å investere i aksjen får han dividender $\pi(t)$ og endring i aksjekursen $\dot{v}(t)$.

Siden det her ikke er noen risiko, bør begge alternativene gi lik avkastning:

$$r(t)v(t) = \pi(t) + \dot{v}(t).$$

c) Vi har at

$$r(t)v(t) = \pi(t) + \dot{v}(t) \iff$$

$$\dot{v}(t) = r(t)v(t) - \pi(t)$$

$$= rv(t) - \pi$$

Fra ligning (2) har vi at

$$v(t) = v_T e^{-r(T-t)} - \int_t^T e^{-r(v-t)}(-\pi)\,dv$$

$$\underline{= v_T e^{-r(T-t)} + \int_t^T e^{-r(v-t)}\pi\,dv}$$

d) $$\lim_{T\to\infty} v(t) = \lim_{T\to\infty} v_T e^{-r(T-t)} + \lim_{T\to\infty}\int_t^T e^{-r(v-t)}\pi\,dv$$

$$= v_T \lim_{T\to\infty} e^{-r(T-t)} + \pi \lim_{T\to\infty}\int_t^T e^{-r(v-t)}\,dv$$

$$= 0 + \pi \cdot \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{r}e^{-r(v-t)} + c\right]$$

$$\underline{\underline{= \frac{\pi}{r}}}$$

(Dette er "Gordon's formula")

#3

a) Vi har at $P(X-a)=0 \iff$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-4 \\ x_2-3 \\ x_3-8 \\ x_4-1 \end{bmatrix} = 2x_1-8+x_2-3+3x_3-24$$

$$+4x_4-4=0 \iff$$

$$\underline{\underline{2x_1+x_2+3x_3+4x_4=39}} \quad (*)$$

b) Budsjettplanet finnes ved å sette $x_3=0$ i $(*)$.

Alternativt, finn en vektor a som ligger i budsjettplanet, f.eks $a=(0,39,0)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-0 \\ x_2-39 \\ x_3-0 \end{bmatrix} = 2x_1+x_2-39+4x_4=0$$

$$\iff \underline{\underline{2x_1+x_2+4x_3=39}}$$

#4

a) $f(x) = e^{-x}$

Ekspanderer rundt punktet $a=0$:

$$f(x) \approx e^{-0} + (-e^{-0})(x-0) + \frac{1}{2}e^{-0}(x-0)^2$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2$$

$$f(0{,}2) \approx 1 - 0{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}2^2 = \underline{\underline{0{,}82}} \qquad (e^{-0{,}2} \approx 0{,}81873)$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Ekspander rundt punktet $a = 64$:

$$f(x) \approx (64)^{1/3} + \frac{1}{3}(64)^{-\frac{2}{3}}(x-64)$$

$$= 4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^2}(x-64)$$

$$= 4 + \frac{1}{48}(x-64)$$

$$f(65) \approx 4 + \frac{1}{48}(65-64) = \underline{\underline{4{,}0208}} \qquad ((65)^{1/3} \approx 4{,}0207)$$

c) $f(x) = \ln x$

Ekspander rundt punktet $a=1$:

$$f(x) \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$f(1{,}1) \approx 1{,}1 - 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}1^2 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}1^3 = 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}000333\ldots$$

$$= \underline{\underline{0{,}095333\ldots}}$$

$$(\ln 1{,}1 = 0{,}09531)$$

#5

a) Vi finner faktoretterspørselen K og L ved å løse problemet

$$\min_{K,L} \; rK + wL$$

$$\text{s.t.} \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = Q$$

$$\mathcal{L} = rK + wL - \lambda(\sqrt{K} + \sqrt{L} - Q)$$

FOC:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_K &= r - \tfrac{1}{2}\lambda K^{-1/2} = 0 \iff \sqrt{K} = \frac{\lambda}{2r} \\ \mathcal{L}_L &= w - \tfrac{1}{2}\lambda L^{-1/2} = 0 \iff \sqrt{L} = \frac{\lambda}{2w} \end{aligned}\right\} \circledast$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -\sqrt{K} - \sqrt{L} + Q = 0$$

Sett inn for $\sqrt{K}$ og $\sqrt{L}$:

$$-\frac{\lambda}{2r} - \frac{\lambda}{2w} = -Q \iff \lambda(w+r) = 2wrQ \iff$$

$$\lambda = \frac{2wrQ}{w+r}$$

Innsatt for λ i $\circledast$ gir

$$\sqrt{K} = \frac{wQ}{w+r} \Rightarrow \underline{\underline{K = \frac{(wQ)^2}{(w+r)^2}}}$$

og

$$\sqrt{L} = \frac{rQ}{w+r} \Rightarrow \underline{\underline{L = \frac{(rQ)^2}{(w+r)^2}}}$$

b) (Se avsnitt 9.5.1 s 310 i læreboken)

To innsatsfaktorer er perfekte substitutter hvis

$$RTS = k, \quad k \text{ en konstant } \forall K, L$$

som er slik at $Q(K,L) = \bar{Q}$. Alternativt: $\sigma = \infty$.

Betrakt isokvanten hvor $Q = \bar{Q}$.

$$\bar{Q} = \sqrt{K} + \sqrt{L} \iff \sqrt{K} = \bar{Q} - \sqrt{L} \Rightarrow$$

$$K = (\bar{Q} - \sqrt{L})^2$$

$$RTS = -\frac{dK}{dL} = -2(\bar{Q} - \sqrt{L})\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{L}}\right)$$

$$= \frac{\bar{Q}}{\sqrt{L}} - 1.$$

Vi ser at RTS ikke er konstant

↳ Innsatsfaktorene er ikke perfekte substitutter.

c) Vi finner bedriften sitt tilbud ved å løse problemet

$$\max_Q \left(PQ - r\frac{w^2Q^2}{(w+r)^2} - w\frac{r^2Q^2}{(w+r)^2} \right) = \max_Q \pi$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = P - 2r\frac{w^2Q}{(w+r)^2} - 2w\frac{r^2Q}{(w+r)^2} = 0 \iff$$

$$\frac{P(w+r)^2}{2} - rw^2Q - wr^2Q = 0 \iff$$

$$Q(rw^2 + wr^2) = \frac{P(w+r)^2}{2} \iff$$

$$Qrw(w+r) = \frac{P(w+r)^2}{2} \iff$$

$$\underline{Q = P(w+r)/(2rw)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{P}{2r} + \frac{P}{2w}\right) = -\frac{P}{2w^2} < 0$$

↳ Bedriften sitt tilbud <u>synker</u> når w øker.