

#1

$$\begin{aligned}
 \text{a) } V_0 &= \int_0^{\infty} e^{-ks} \delta ds = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-ks} \delta ds \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \delta \left[-\frac{1}{k} e^{-ks} + c \right] = \underline{\underline{\frac{\delta}{k}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } V_0 &= \int_0^{\infty} e^{-ks} \delta e^{gs} ds = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-ks} \delta e^{gs} ds \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-\varphi s} \delta ds,
 \end{aligned}$$

hvor $\varphi = k - g$.

Da ser vi fra a) at

$$V_0 = \frac{\delta}{\varphi} = \underline{\underline{\frac{\delta}{k-g}}} \quad (\text{Dette er kjent som Gordons formel.})$$

$$\text{c) } V_0 = \int_0^{\infty} e^{-ks} \delta s ds = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-ks} \delta s ds$$

Delvis integrasjon sier at

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Vi bruker her delvis integrasjon på

$$\int e^{-ks} s ds \quad \text{og setter } f = s \text{ og } g' = e^{-ks}.$$

$$\int e^{-ks} s ds = -\frac{1}{k} e^{-ks} s - \int -\frac{1}{k} e^{-ks} \cdot 1 ds$$

$$= -\frac{1}{k} e^{-ks} s - \frac{1}{k^2} e^{-ks} + C.$$

$$V_0 = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left[-\frac{1}{k} e^{-ks} s - \frac{1}{k^2} e^{-ks} + C \right]$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \int \left(-\frac{1}{k} e^{-ka} a - \frac{1}{k^2} e^{-ka} - \left(-\frac{1}{k} e^{-k \cdot 0} \cdot 0 - \frac{1}{k^2} e^{-k \cdot 0} \right) \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\delta}{k^2}}}$$

$$d) V_0 = \int_0^{\infty} e^{-ks} \delta e^{gs} s ds = \int_0^{\infty} e^{-\varphi s} \delta s ds.$$

Her kan vi erstatte diskonteringsrenten fra c) med φ og bruke resultatet:

$$V_0 = \frac{\delta}{\varphi^2} = \underline{\underline{\frac{\delta}{(k-g)^2}}}$$

#2

$$a) \quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$

$$3x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 6$$

$$\begin{array}{c} A \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 8 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{-2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{+1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\div 2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & -7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\div -7/2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & -7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-3/2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (*) \end{array}$$

Vi ser at x_2 kan velges fritt. Sett $x_2 = s$.

Løsningen blir da:

$$\underline{\underline{\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 - s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

b) Vi ser fra (*) at $r(A) = 2$ og $r(A_b) = 2$.

c) Vi ser at $r(A) = r(A_b) = 2 \Leftrightarrow$ systemet har løsning(er).

Systemet har $n=3$ ukjente. Vi ser at

$r(A) = r(A_b) = 2 < n = 3$. Da har systemet $3 - 2 = 1$ frihetsgrad. En av variablene kan velges fritt (her har jeg sett $x_2 = s$).

$$d) \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{+1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\div 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & -7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\div -7/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right] \text{ ** }$$

Av siste r ad ser vi at systemet ikke har l osning.

e) Fra ** ser vi at $r(A) = 2 < r(A_b) = 3$.

f) I d) fant vi at systemet ikke har l osning ($0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -6$ er ikke mulig). Fra

e) ser vi at $r(A) < r(A_b)$ og da har systemet ingen l osning. En l osning \bar{x} er en line ar kombinasjon av kolonnevektorene i A som er like $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Her vil vektoren b ikke

ligge i kolonnerommet til matrisen A. Og da har systemet ikke noen l osning.

#3

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$$

a) Den karakteristiske likningen er

$$r^2 - r - 6 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \underline{-2; 3}$$

Den generelle løsningen er

$$\underline{\underline{x = Ae^{-2t} + Be^{3t}}}$$

b) Høyresiden er 2. grads polynom $t^2 - 3$.

Vi setter derfor $u^* = At^2 + Bt + C$.

$\dot{u}^* = 2At + B$, $\ddot{u}^* = 2A$. Setter inn i

venstresiden og får

$$\begin{aligned} & 2A - (2At + B) - 6(At^2 + Bt + C) \\ &= -6At^2 + (-2A - 6B)t + (2A - B - 6C) \end{aligned}$$

Koeffisientene \bar{c} høyresiden er 1, 0, -3. Vi får følgende likningssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/18 \\ 0 & 0 & 1 & 47/108 \end{array} \right]$$

Vi får da løsningen

$$\underline{\underline{u^* = -\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{18}t + \frac{47}{108}}}$$

#4

For fabrik A: $y = x_1^a x_2^{1-a}$

$$C_A(y) = w_1 x_1 + w_2 x_2.$$

For kostnadsminimeringsproblemet er
Lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda (x_1^a x_2^{1-a} - y)$$

$$\mathcal{L}_{x_1} = w_1 - \lambda a x_1^{a-1} x_2^{1-a} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{w_1}{a} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{a-1}$$

$$\mathcal{L}_{x_2} = w_2 - \lambda (1-a) x_1^a x_2^{-a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$w_2 - \frac{w_1}{a} (1-a) \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{a-1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$w_2 - w_1 \frac{(1-a)}{a} \frac{x_1}{x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{w_1}{w_2} \frac{(1-a)}{a} x_1$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -x_1^a x_2^{1-a} + y = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x_1^a \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{(1-a)}{a} x_1\right)^{1-a} + y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \underbrace{\left(\frac{w_1}{w_2} \frac{(1-a)}{a}\right)^{a-1}}_{A_1} y \Leftrightarrow$$

$$x_1 = A_1 y$$

$$x_2 = \frac{w_1}{w_2} \frac{(1-a)}{a} \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{(1-a)}{a}\right)^{a-1} y = \underbrace{\left(\frac{w_1}{w_2} \frac{(1-a)}{a}\right)^a}_{A_2} y$$

Kostnadsfunksjonen for fabrikk A blir da

$$C_A(y) = w_1 A_1 y + w_2 A_2 y = (w_1 A_1 + w_2 A_2) y \equiv A y.$$

Tilsvarende for fabrikk B:

$$C_B(y) = B y.$$

Både A og B er (positive) konstanter. Bedriftens kostnadsfunksjon blir dermed

$$C(y) = \min(Ay, By) = \underline{\underline{\min(A, B)y}}$$

(Dette er oppg 4.4 fra Varian og har vært gitt på øving.)