#1

a) $I = \int_0^{10} f(t)\,dt = \int_0^{10} (1+at)\,dt = \left[t + \frac{1}{2}at^2 + C\right]_0^{10}$

$= \left[\left(10 + \frac{1}{2}a \cdot 10^2 + c\right) - \left(0 + \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + c\right)\right] = 10 + 50a = 10 + 20 = \underline{\underline{30}}$

b) $PV = \int_0^{10} e^{-rt} f(t)\,dt = \int_0^{10} e^{-rt}(1+at)\,dt$

Med notasjonen for delvis integrasjon, sett

$f(t) = 1 + at$ og $g(t) = e^{-rt}$. Da er

$g(t) = -\frac{1}{r}e^{-rt}$.

Vi får at

$PV = \int_0^{10} (1+at)e^{-rt}\,dt = \left[-(1+at)\frac{1}{r}e^{-rt}\right]_0^{10}$

$- \int_0^{10} -a\frac{1}{r}e^{-rt}\,dt$

$= -\frac{1+10a}{r}e^{-10r} + \frac{1}{r} - \left[\frac{a}{r^2}e^{-rt} + c\right]_0^{10}$

$= \frac{1}{r} - \frac{1+10a}{r}e^{-10r} + \frac{a}{r^2} - \frac{a}{r^2}e^{-10r}$

$= \frac{1}{0{,}05} - \frac{5}{0{,}05}e^{-0{,}5} + \frac{0{,}4}{0{,}0025}\left(1 - e^{-0{,}5}\right) = \underline{\underline{22{,}3}}$

c) $\frac{dPV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\int_0^{10} e^{-rt} f(t)\,dt\right) = -\int_0^{10} t e^{-rt} f(t)\,dt$

Her er t, e^{-rt} og $f(t) > 0$. Da må $\frac{dPV}{dr} < 0$

↳ Nåverdien <u>synker</u> når r øker.

#2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

1d $PV = \sum_{t=1}^{10} \frac{1+at}{(1+r)^t}$

(2

a) A har en invers hvis $|A| \neq 0$.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot a - 1 \cdot 2 = a - 2.$

A har en invers for $\underline{a \in \mathbb{R}, a \neq 2}$.

b) Bruker elementære radoperasjoner:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a}{a-2} & -\frac{2}{a-2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \end{array}\right]$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{a-2} & -\frac{2}{a-2} \\ -\frac{1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a-2} - \frac{2}{a-2} & -\frac{2}{a-2} + \frac{2}{a-2} \\ \frac{a}{a-2} - \frac{a}{a-2} & -\frac{2}{a-2} + \frac{a}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

d) Det karakteristiske polynomet $P(\lambda)$ er:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1+a)\lambda + (1\cdot a - 1\cdot 2)$$

$$= \lambda^2 - (1+a)\lambda + (a-2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+a \pm \sqrt{(1+a)^2 - 4(1)(a-2)}}{2}$$

$$= \frac{1+a \pm \sqrt{1+2a+a^2 - 4a + 8}}{2}$$

$$= \frac{1+a \pm \sqrt{a^2 - 2a + 9}}{2}$$

e) Reell egenverdi krever at $a^2 - 2a + 9 > 0$.

$f(a) = a^2 - 2a + 9$ har sitt minimum for

$f'(a) = 0 \iff 2a - 2 = 0 \iff a = 1$. $f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 9 = 8 > 0$.

$f''(a) = 2 > 0$.

$\hookrightarrow$ $\lambda_{1,2}$ er reelle for alle verdier av a.

f) $$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1+a+\sqrt{a^2-2a+9}}{2} + \frac{1+a-\sqrt{a^2-2a+9}}{2}$$

$$= \frac{1+a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1+a = a_{11} + a_{22}.$$

9) $\left(\frac{1+a+\sqrt{a^2-2a+9}}{2}\right)\left(\frac{1+a-\sqrt{a^2-2a+9}}{2}\right)$

$$= \frac{(1+a)^2 - (a^2-2a+9)}{4} = \frac{1+2a+a^2-a^2+2a-9}{4}$$

$$= \frac{4a-8}{4} = \underline{\underline{a-2}} = |A|.$$

#3

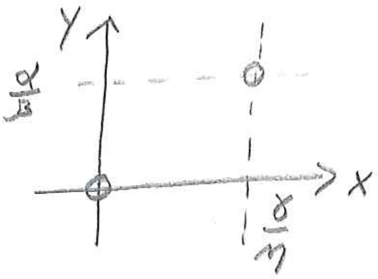
$$\dot{x} = \alpha x - \beta x y$$

$$\dot{y} = -\gamma y + \eta y x$$

a) Likevekter:

$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ og $y = \frac{\alpha}{\beta}$ når $x > 0$

$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ og $x = \frac{\gamma}{\eta}$ når $y > 0$



Likevekter:

Indre $x = \frac{\gamma}{\eta}$, $y = \frac{\alpha}{\beta}$

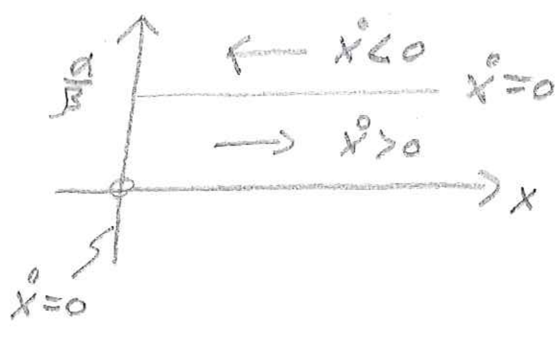
og $x = 0, y = 0$.

b) Isoklinene og fasediagram

i) x- isoklin

$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ og $y = \frac{\alpha}{\beta}$

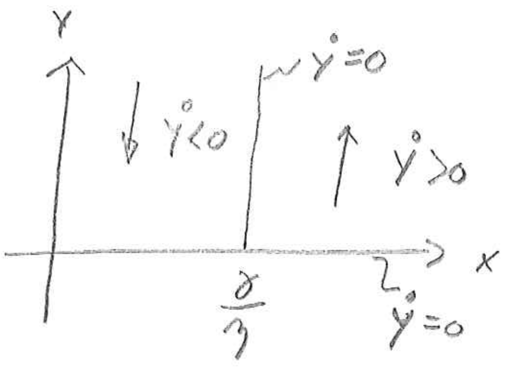
Ser at $\dot{x} < 0$ når $y > \frac{\alpha}{\beta}$



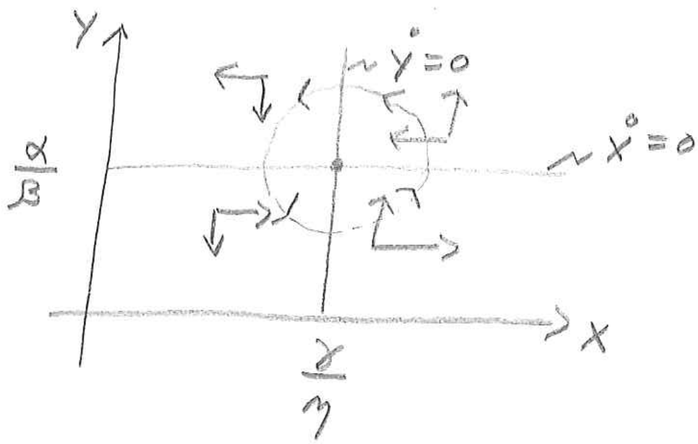
ii) y-isoklin

$$\dot{y} = 0 \iff y = 0 \text{ og } x = \frac{\gamma}{\eta}$$

Ser at $\dot{y} > 0$ for $x > \frac{\gamma}{\eta}$



iii) Setter sammen:



Vi har en indre likevekt

$$x^* = \frac{\gamma}{\eta}, \; y^* = \frac{\alpha}{\beta}.$$

c) Jacobi-matrisen er gitt ved

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha - \beta y) & -\beta x \\ \eta y & (\eta x - \gamma) \end{bmatrix}$$

Evaluert i den indre likevekten $x^* = \frac{\gamma}{\eta}$, $y^* = \frac{\alpha}{\beta}$

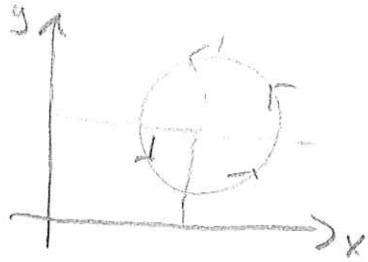
gir

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\eta} \\ \frac{\eta\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(J) = 0 + 0 = 0$$

$$det(J) = 0 \cdot 0 - \left(-\frac{\beta\gamma}{\eta}\right)\left(\frac{\eta\alpha}{\beta}\right) = \alpha\gamma > 0$$

Fordi $tr(J) = 0$ er ikke dette systemet stabilt i vanlig forstand, men gir såkalt "closed orbits".



Likevekt $x=0, y=0$: $J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} Det(J) < 0 \\ tr(J) = -\alpha\gamma \end{array}\right\} \text{ustabilt}$$

#4

$$\max_{x,y} \; xy + 5x + y$$

s.t

$$px + qy \leq m$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

a) Ser at $\frac{\partial U}{\partial x} = y + 5 > 0$ og $\frac{\partial U}{\partial y} = x + 1 > 0$.

Dette indikerer ikke-metning og budsjettbetingelsen holder da med likhet.

Indifferenskurve. $\bar{U} = xy + 5x + y$

Totaldifferensierer:

$$d\bar{U} = x\,dy + y\,dx + 5\,dx + dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+5}{x+1}$$

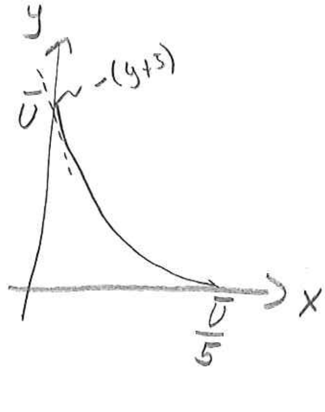
Vi ser at

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -(y+5) \quad \text{og} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0} = -\frac{5}{x+1}$$

↳ Dette betyr at hvis budsjettlinjen er "for bratt" eller "for slak" vil vi ikke få en indre løsning.

Kan også se på

$$\bar{U} = xy + 5x + y \Leftrightarrow y = \frac{\bar{U} - 5x}{x+1}$$



b) $\max_{x,y} \; xy + 5x + y$

s.t $px + qy \leq m$

$\mathcal{L} = xy + 5x + y - \lambda(px + qy - m)$

λ er skyggeprisen for budsjettrestriksjonen. Siden vi har ikke-metning, vil budsjettrestriksjonen holde med likhet. Da er $\lambda > 0$.

FOB:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda p = y + 5 - \lambda p \leq 0 \;;\; x \geq 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda q = x + 1 - \lambda q \leq 0 \;;\; y \geq 0 \qquad (2)$$

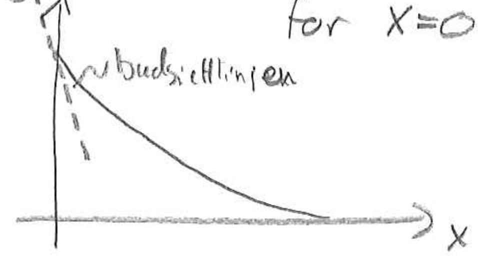
Vi har 3 muligheter:

i) $x = 0$, $y > 0$

Det går fra (2) at $\lambda = \frac{1}{q}$. Innsatt i (1) får vi

$$y + 5 < \frac{p}{q} \iff -\frac{p}{q} < \underbrace{-(y+5)}_{\text{Se fig. sp a)}} \qquad (*)$$

↳ Helningen på budsjettlinjen er brattere (mer negativ) enn helningen på indifferenskurven for $x = 0$. x er et "dyrt" gode.



Budsjettbetingelsen er $m = qy$. $\Leftrightarrow y = \frac{m}{q}$ Innsatt i betingelsen (*)

får vi: $\frac{m}{q} + 5 < \frac{p}{q} \Leftrightarrow \underbrace{m < \left(\frac{p}{q} - 5\right) q}$

$\frac{m}{q} \sim y$

Dette kan være mulig.

ii) $x > 0$, $y = 0$

Det går fra (1) at $\lambda = \frac{5}{p}$. Innsatt i (2) får vi

$x + 1 - \frac{5}{p} \cdot q < 0 \Leftrightarrow \frac{q}{p} > \frac{1}{5}(x+1) \Leftrightarrow -\frac{p}{q} > -\frac{5}{x+1}$ (**)

Her er x et "billig" gode

Budsjettbetingelsen er $m = px \Leftrightarrow x = \frac{m}{p}$. Innsatt i (**):

$\frac{q}{p} > \frac{1}{5}\left(\frac{m}{p} + 1\right)$. Dette er mulig

iii) Indre løsning, $x > 0$, $y > 0$.

$y + 5 = \lambda p$

$x + 1 = \lambda q$

Fra i) og ii) ser vi at dette holder når

$y + 5 < \frac{p}{q} < \frac{5}{x+1}$.

Dette er mulig.

c) Indre løsning

Fra (1) og (2) har vi at

$$\lambda = \frac{y+5}{p} = \frac{x+1}{q} \Leftrightarrow y = \frac{p}{q}(x+1) - 5$$

Innsatt i budsjettbetingelsen får vi

$$px + q\left(\frac{p}{q}(x+1) - 5\right) = m \Leftrightarrow px + p(x+1) - 5q = m \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x^* = \frac{1}{2p}(m + 5q - p) \\ y^* = \frac{1}{2q}(m - 5q + p) \end{array}\right\} \text{Etterspørselsfunksjonen}$$

Setter vi inn for x^* og y^* i U finner vi den indirekte nyttefunksjonen, v:

$$v = \frac{1}{4pq}(m+5q-p)(m-5q+p) + \frac{5}{2p}(m+5q-p)$$

$$+ \frac{1}{2q}(m-5q+p)$$

$$= \frac{1}{4pq}(m^2 - 25q^2 + 10pq - p^2) + \frac{5}{2p}(m+5q-p) + \frac{1}{2q}(m-5q+p)$$

$\frac{\partial v}{\partial p}, \frac{\partial v}{\partial q} < 0$: Begge godene konsumeres, øker prisen, må konsumet reduseres $\Rightarrow$ lavere nytte.

$\frac{\partial v}{\partial m} > 0$: Ikke-metning. Øker inntekten kan konsumet økes $\Rightarrow$ høyere nytte.

d) Vi har at

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{2m}{4pq} + \frac{5}{2p} + \frac{1}{2q}$$

$$= \frac{m+5q+p}{2pq}$$

Vi har fra c) at $\lambda = \frac{y+5}{p} = \frac{\overbrace{\frac{1}{2q}(m+5q+p)}^{y}+5}{p}$

$$= \frac{m+5q+p}{2pq} \quad (=\lambda).$$

↳ λ er pengenes grensenytte – hvor mye øker nytten når inntekten m øker.