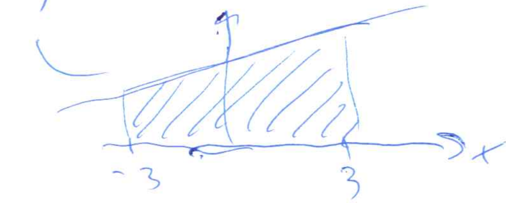
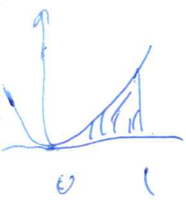
Oppgave 1

a) $f'(x) = ax + b$, Antar $f'(x) \geq 0$

$$\int_{-3}^{3} (ax+b)\,dx = \Big|_{-3}^{3} \left(\frac{a}{2}x^2 + bx + C\right) = 6b$$





$$\rightarrow \int_{0}^{1} x^2\,dx = \Big|_{0}^{1} \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$$

b) $y = \left(\frac{x-1}{(x+3)^2}\right)^{1/2} = \frac{(x-1)^{0,5}}{(x+3)}$; $y' = \frac{0,5(x-1)^{-0,5}(x+3) - (x-1)^{0,5}\cdot 1}{(x+3)^2}$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{(x+3)^2}\left(\frac{0,5(x+3)}{\sqrt{(x-1)}} - \sqrt{x-1}\right)$$

ii) $y = \sqrt{x^2+6}$; $y' = \frac{1}{2}(x^2+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x + x^2 - 1} \rightarrow \text{'}\frac{0}{0}\text{'} \rightarrow \text{Bruker L'hopital regel.}$$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{1}{e^x + 2x} = \frac{1}{e^0} = 1$$

b) $PV_0 = \div I + \sum_{t=1}^{10} \frac{D_t}{(1+r)^t} = \div I + D\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{10}}\right)$

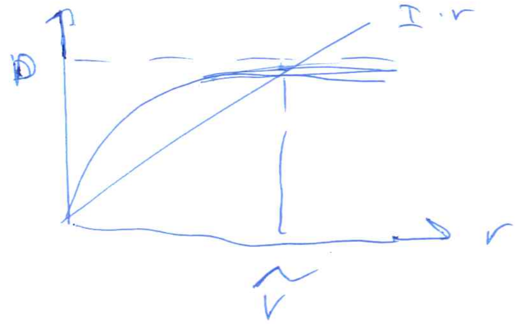
$$PV_0 = \div I + \frac{D}{1+r}\underbrace{\left(1 + \dots + \frac{1}{(1+r)^9}\right)}_{\text{Geometrisk rekke med 10 ledd}} = \div I + \frac{D}{(1+r)}\left(\frac{1 \div \frac{1}{(1+r)^{10}}}{1 - \frac{1}{1+r}}\right)$$

$$\boxed{PV_0 = \div I + (D/r)\left(1 \div \frac{1}{(1+r)^{10}}\right)}$$

②

Internrente $PV_0 = 0 \rightarrow I = \frac{D}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{10}}\right)$

$\rightarrow I r = D\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{10}}\right)$



$\rightarrow \hat{r}$ internrenten.

Blir her unik

Hvis uendelig levend $I = \frac{D}{r} \rightarrow \hat{r} = \frac{D}{I}$

Oppgave 2

a) Danner Lagrange

$L = x + \ln(1+y) - \lambda(qx + qy - 10)$

Fordi $f(x,y)$ er økende i både x og y $\rightarrow \lambda > 0$.

(1) $\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda q \leq 0$; $x \geq 0$

(2) $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{(1+y)} - \lambda q \leq 0$; $y \geq 0$

Ser på 3 muligheter.

i) Indre løsning

1) $\rightarrow 1 - \lambda q = 0$, 2) $\frac{1}{(1+y)} - \lambda q = 0$

$\lambda = \frac{1}{q}$ $\qquad$ $\lambda = \frac{1}{q}\frac{1}{(1+y)}$

$\rightarrow$ Inkonsistent for alle $y > 0$

ii) $\underline{x > 0,\ y = 0}$

1) $\underline{1 - \lambda q = 0}$, 2) $\frac{1}{(1+y)} - \lambda q < 0 \rightarrow \underline{1 - \lambda q < 0}$

$\rightarrow$ Inkonsistent

iii) $\underline{x = 0,\ y > 0}$

1) $1 - \lambda q < 0$, 2) $\frac{1}{1+y} - \lambda q = 0 \rightarrow \underline{\lambda = \frac{1}{q}\frac{1}{(1+y)}}$

$\downarrow$

$\underline{\lambda > \frac{1}{q}}$.

Inkonsistent for alle $y > 0$.

Dette derfor et eksempel på at Kuhn-Tucker betingelsen ikke fører direkte fram.

Ser på $f(x,y) = x + \ln(1+y)$

for gitt $f(x,y) \rightarrow df(x,y) = dx + \frac{1}{(1+y)} dy = 0$

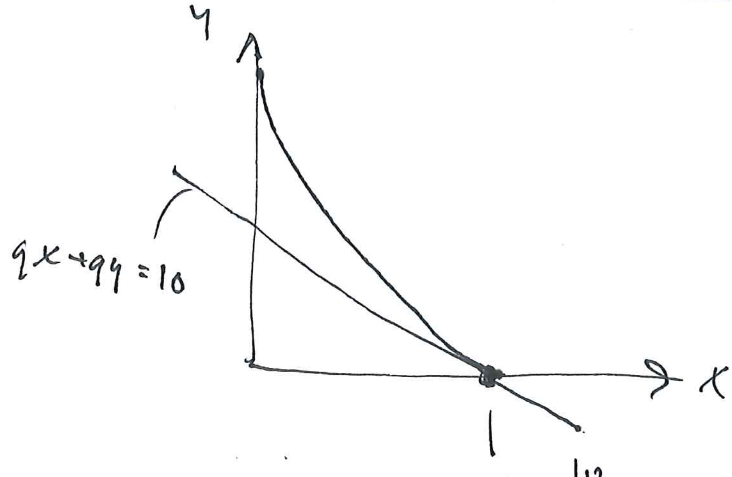
$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \div(1+y) \rightarrow$ helling $\leq \div 1$

Skranken $qx + qy \leq 10 \rightarrow$ helling $\div 1$

$\rightarrow$ Hjørneløsning $y^* = 0$ og $x^* = \frac{10}{q}$.

Denne løsningen holder for alle $q \geq 1$

Grafisk løsning optimeringsproblem



$x^* = \frac{10}{9}$

$y^* = 0$

Oppgave 3

a) $Y = B A^{\alpha} \cdot N^{\beta}$

B = parameter teknologisk nivå

$\frac{\partial Y}{\partial A} = B \cdot \alpha A^{\alpha-1} \cdot N^{\beta} \rightarrow \frac{\partial Y}{\partial A} \cdot \frac{A}{Y} = \frac{B \alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot N^{\beta} \cdot A}{B A^{\alpha} N^{\beta}} = \alpha$

$\rightarrow \alpha$ grenseelastisiteten land: 1% økning i landarealet gir α % økning i produksjon

Tilsvarende β grenseelastisitet av arbeidskraft:

$\beta = \frac{\partial Y}{\partial N} \cdot \frac{N}{Y}$

Skalaelastisitet: %-vis økning i produksjonen ~~når~~ når både land og arbeidskraft øker med 1%:

$\alpha + \beta$ = skalaelastisitet.

Her, $\alpha + \beta < 1$ → avtagende skalautbytte

$\alpha + \beta > 1$ økende ——"——

$\alpha + \beta = 1$ Konstant skalautbytte.

Altså: For en Cobb-Douglas produktfunksjon forteller parametrene α og β alt om grenseelastiteter og skalaelastitet.

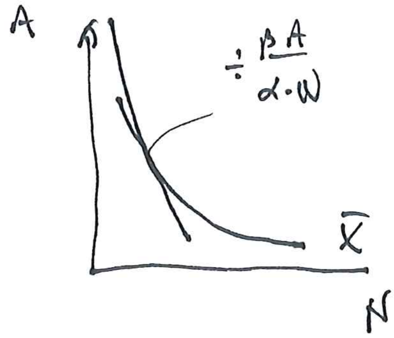
Tekniske substitusjonselastisitet

$$X = B A^{\alpha} \cdot N^{\beta} \; ; \; dX = B \cdot \alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot N^{\beta} \cdot dA + B A^{\alpha} \cdot \beta \cdot N^{\beta-1} \cdot dN = 0$$

langs en isokvant.

$$\rightarrow B \cdot \alpha A^{\alpha-1} \cdot N^{\beta} \cdot dA = \div B \cdot A^{\alpha} \cdot \beta \cdot N^{\beta-1} dN$$

$$-\frac{dA}{dN} = \frac{\beta A}{\alpha \cdot N}$$



← Isokvant

b) På kort sikt kan en sette $A = \bar{A}$. Antar $\alpha + \beta < 1$

$$X = B \cdot \bar{A}^{\alpha} \cdot N^{\beta} \; ; \; \pi = p B \bar{A}^{\alpha} \cdot N^{\beta} - w \cdot N - r \cdot \bar{A}$$

p = gitt produktpris

w = gitt lønn arbeidskraft

r = pris land

$$\frac{\partial \pi}{\partial N} = pB\bar{A}^{\alpha} \cdot \beta \cdot N^{\beta-1} - w = 0 \;\rightarrow\; \tilde{N} = \left(\frac{pB\bar{A}^{\alpha}\cdot\beta}{w}\right)^{\frac{1}{(1-\beta)}}$$

Kortsiktig etterspurt arbeidskraft

Tilbudsfunksjonen kort sikt:

$$\tilde{X} = B\cdot\bar{A}^{\alpha}\cdot\left(\frac{pB\bar{A}^{\alpha}\cdot\beta}{w}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} = B^{\frac{1}{1-\beta}}\cdot\bar{A}^{\frac{\alpha}{(1-\beta)}}\cdot\left(\beta\frac{p}{w}\right)^{\frac{\beta}{(1-\beta)}}$$

Innsatt så får $\tilde{N}$, $\tilde{X}$ i π gir så profittfunksjonen.

$$\tilde{\pi} = p\cdot B^{\frac{1}{(1-\beta)}}\cdot\bar{A}^{\frac{\alpha}{(1-\beta)}}\cdot\left(\beta\frac{p}{w}\right)^{\frac{\beta}{(1-\beta)}} - w\left(\frac{pB\bar{A}^{\alpha}\cdot\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} - r\bar{A}$$

Hvis så kortsiktig π, $\tilde{\pi}$, optimeres m.h.p A finner vi de tilsvarende funksjonen på lang sikt.

$\rightarrow$

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial A} = 0 \;\rightarrow\; A^{*}$$ etterspurt etter land på lang sikt.

Denne innsatt i $\tilde{N}$, $N^{*} = \left(\frac{p\cdot BA^{*\alpha}\cdot\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$

så denne lang-tids etterspurselen etter arbeidskraft

Tilsvarende for X^{*}, og $\pi^{*} \rightarrow X^{*}(p,w,r)$

$\pi^{*}(p,w,r)$

a) Hotellings lemma

$$\frac{\partial\pi^{*}}{\partial p} = X^{*}(p,w,r) \;\rightarrow\; \Delta\pi^{*} \approx X^{*}(p,w,r)\cdot\Delta p.$$

$$\frac{\partial\pi^{*}}{\partial w} = \div N^{*}(p,w,r) \;\rightarrow\; \Delta\pi^{*} \approx \div N^{*}(p,w,r)\cdot\Delta w$$

Oppgave 4

a) $\frac{dP_t}{dt} = 0{,}2P_t - 10$; $\frac{dP_t}{dt} > 0 \Leftrightarrow 0{,}2P_t - 10 > 0$

$P_t > 50$

Betyr at hvis $P_0 > 50$, populasjonen øker over tiden.

Løser diff likningen $\rightarrow P_t = 50 + Ce^{0{,}2t}$

Integrasjonskonstant C bestemmes ved $t=0 \rightarrow P_0 = 50 + C$

$$\rightarrow \boxed{P_t = 50 + (P_0 - 50)e^{0{,}2t}}$$

Fordobling $\quad 2P_0 = 50 + (P_0 - 50)e^{0{,}2t}$

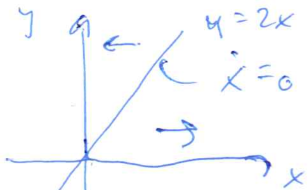
$$e^{0{,}2t} = \frac{(2P_0 - 50)}{(P_0 - 50)} \rightarrow t = \frac{1}{0{,}2} \ln \frac{(2P_0 - 50)}{(P_0 - 50)}$$

b) $\dot{x} = 2x - y$, $\dot{y} = 5 - x - y$

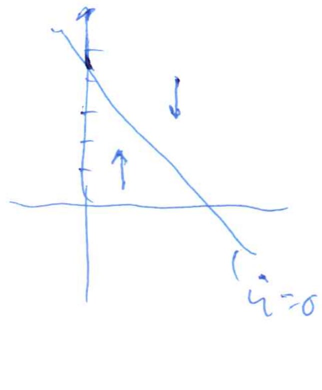
Likevekt $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{3}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10}{3}$$

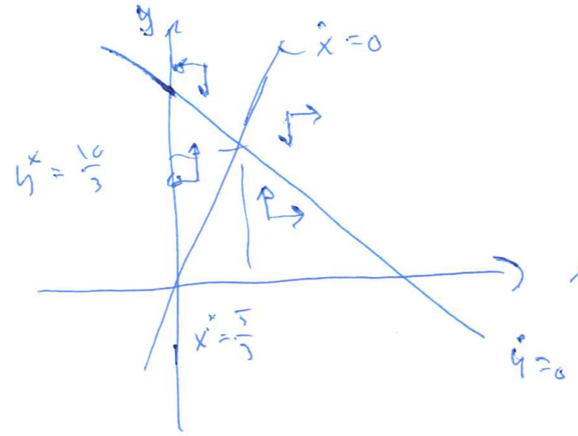
1) x-isoklin



2) y-isoklin $\dot{y} = 0 \rightarrow y = 5 - x$



3) Setter sammen i en figur



Tyder på sadelpunkt likevekt; peker mot likevekt to av segmentene, vekk fra likevekt andre to segmenter.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 5\end{pmatrix}$$

Jacobimatrise $\quad J = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

$|J| = \div 3, \quad Tr(J) = 1$

↑ Sadelpunkt.

Egenverdiene $\quad (J - \lambda I) = \begin{pmatrix}(2-\lambda) & -1\\ -1 & -(1+\lambda)\end{pmatrix}$

Determinanten $\quad \begin{vmatrix}(2-\lambda) & -1\\ -1 & -(1+\lambda)\end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -(2-\lambda)(1+\lambda) - 1 = 0$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{13}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{13})$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 = Tr(J)$ ok.

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})\frac{1}{2}(1-\sqrt{13}) = \frac{1}{4}(1-13) = \div\frac{12}{4} = \div 3$
$= |J|$ ok