

Sensorveiledning SØK1001 våren 2015

1.

Oppgave 1

$$a) i) f(x) = \ln(1-x) - x^2 + 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \cdot (-1) - 2x$$

$$= -\frac{1}{1-x} - 2x$$

$$ii) f(x) = \frac{x^3 - 5}{3x^2 + 2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(3x^2 + 2) - (x^3 - 5) \cdot 6x}{(3x^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{9x^4 + 6x^2 - 6x^4 + 30x}{(3x^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 6x^2 + 30x}{(3x^2 + 2)^2}$$

$$iii) f(x) = (x^2 - e^{-2x} + 1)^5$$

$$f'(x) = 5(x^2 - e^{-2x} + 1)^4 \cdot (2x - e^{-2x} \cdot (-2))$$

$$= 5(x^2 - e^{-2x} + 1)^4 (2x + 2e^{-2x})$$

$$= \underline{\underline{10(x^2 - e^{-2x} + 1)^4 (x + e^{-2x})}}$$

$$\text{iv) } f(x) = 3x^5 e^{2x^2}$$

$$f'(x) = 15x^4 \cdot e^{2x^2} + 3x^5 \cdot e^{2x^2} \cdot 4x$$

$$= 15x^4 e^{2x^2} + 12x^6 e^{2x^2}$$

$$= \underline{\underline{3x^4 e^{2x^2} (5 + 4x^2)}}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{4}{3} x^2 y - 2xy + 5y^3$$

$$f'_1 = \frac{8}{3} xy - 2y$$

$$f'_2 = \frac{4}{3} x^2 - 2x + 15y^2$$

$$f''_{11} = \frac{8}{3} y$$

$$f''_{22} = 30y$$

$$f''_{12} = f''_{21} = \frac{8}{3} x - 2$$

$$\text{c) i) } P(t) = 750.000 \cdot 0,955^t$$

$$\text{ii) } P(t) = 375.000 \Rightarrow 750.000 \cdot 0,955^t = 375.000$$

$$0,955^t = \frac{1}{2}$$

$$\ln 0,955^t = \ln \frac{1}{2}$$

$$t \cdot \ln 0,955 = \ln \frac{1}{2}$$

→

$$\Rightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0,955}$$

$$= \underline{\underline{15,05}}$$

Det tar ca 15 år.

iii) $P(t) = 750.000 \cdot 0,98^t$
 $P(t) = 750.000 \cdot 0,993^t$
 $P(t) = 750.000 \cdot 0,915^t$

Oppgave 2

a) i) $f(x) = x^2 - 5x + 3 \Rightarrow f(2) = -3$
 $f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(2) = -1$

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$y + 3 = -1(x - 2)$$

$$\underline{\underline{y = -x - 1}}$$

ii) $g(x) = \ln(2+x) + x^2 \Rightarrow g(-1) = 1$

$$g'(x) = \frac{1}{2+x} + 2x \Rightarrow g'(-1) = -1$$

$$y - y_1 = g'(x_1)(x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x + 1)$$

$$\underline{\underline{y = -x}}$$

b) Gitt likningen $2x - 2y + xy^2 + \frac{y}{x} = 0$

Finne y' ved implisitt derivasjon:

$$2 - 2y' + 1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y' + \frac{y' \cdot x - 1 \cdot y}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$2x^2 - 2x^2y' + x^2y^2 + 2x^3yy' + xy' - y = 0$$

$$(2x^3y - 2x^2 + x)y' = y - x^2y^2 - 2x^2$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{y - x^2y^2 - 2x^2}{2x^3y - 2x^2 + x}}}$$

c) $f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{x-3}$

Def. mengde: $2x-1 > 0$ og $x \neq 3$

$$\Downarrow \\ x > \frac{1}{2}$$

$$\therefore D_f: \left\langle \frac{1}{2}, 3 \right\rangle \text{ og } \langle 3, \infty \rangle$$

→

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2x-1} \cdot 2(x-3) - \ln(2x-1)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{\frac{2(x-3)}{2x-1} - \ln(2x-1)}{(x-3)^2}$$

Oppgave 3

$$f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x, \quad x \in [-4, 3]$$

a) $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$

$$f'(x) = 0 \text{ gir } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-3) \cdot 6}}{2 \cdot (-3)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{-6} = \frac{-3 \pm 9}{-6}$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = -1} \quad \vee \quad \underline{x_2 = 2}$$

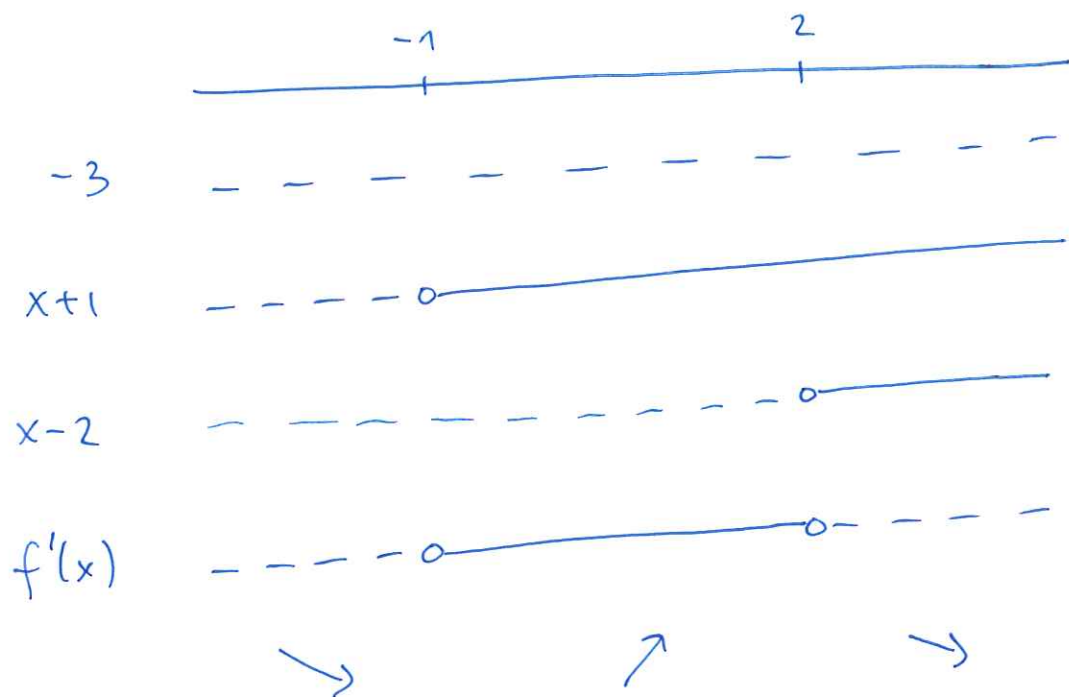
Stasjonære punkt: $(x, y) = (-1, -7/2)$

$(x, y) = (2, 10)$

Begge punktene ligger i definisjonsområdet.

$f'(x)$ kan da skrives: $f'(x) = -3(x+1)(x-2)$

Fortegndiagram:



$(x,y) = (-1, -7/2)$ er lokalt minimumspunkt.

$(x,y) = (2, 10)$ er lokalt maksimumspunkt.

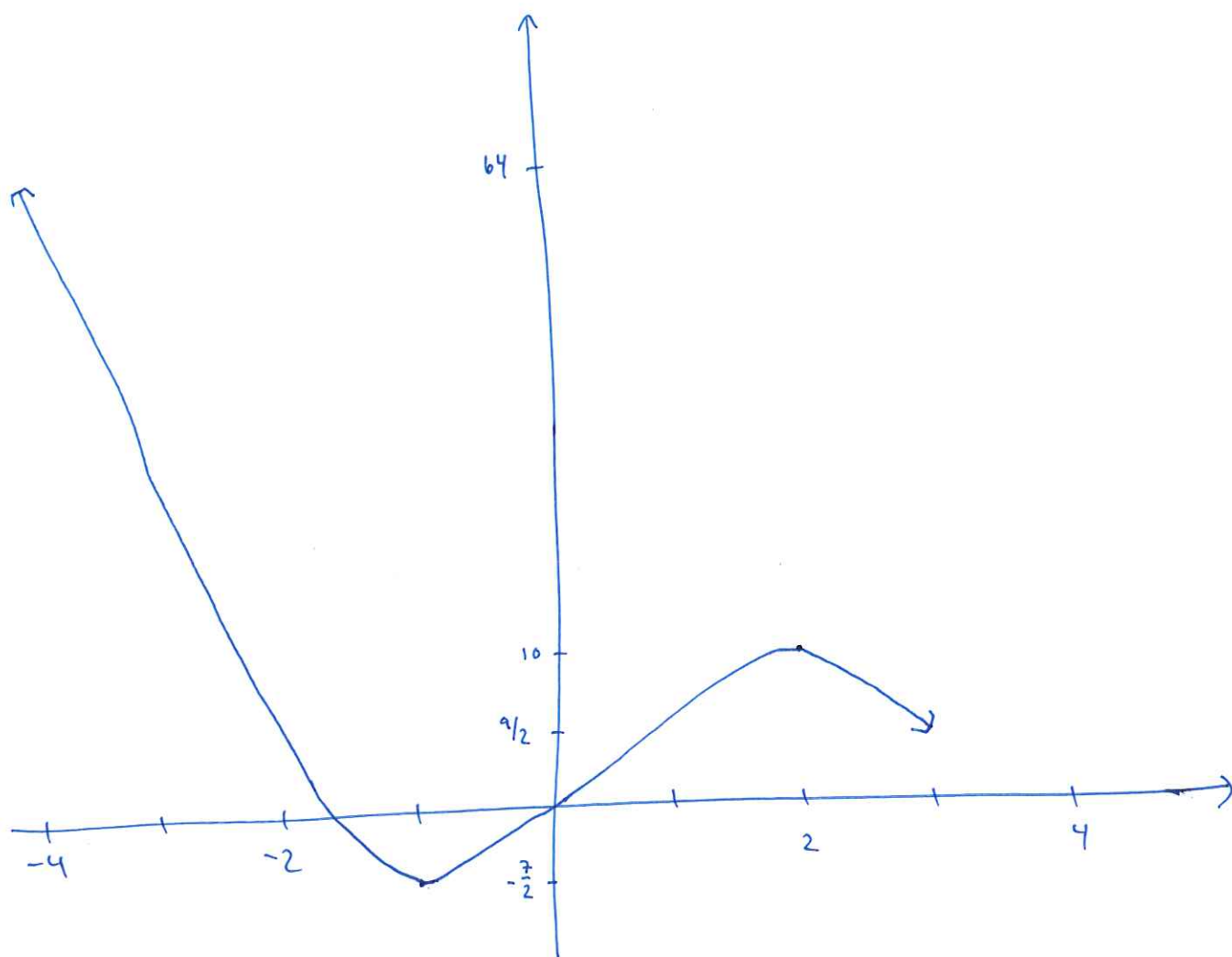
b) $f(-4) = 64 \rightarrow$ globalt max punkt

$f(-1) = -7/2 \rightarrow$ globalt min punkt

$f(2) = 10$

$f(3) = 9/2$

c)



Oppgave 4

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2$$

Stasjonære punkt:

$$f'_1(x, y) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6xy = 0 \quad (i)$$

$$f'_2(x, y) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6y = 0 \quad (ii)$$

$$(ii) \text{ gir } 6y = -3x^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ inn i (i)}$$

→

$$(i) 3x^2 + 6x \cdot \left(-\frac{1}{2} x^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3x^3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x=0} \quad \vee \quad \underline{x=1}$$

To stasjonære punkt:

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{og} \quad (x,y) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

Klassifisering:

$$f''_{11}(x,y) = 6x + 6y = A$$

$$f''_{12}(x,y) = 6x = B$$

$$f''_{22}(x,y) = 6 = C$$

(x,y)	A	B	C	$AC - B^2$	Type punkt
$(0,0)$	0	0	6	0	?
$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$	3	6	6	-18	Sadelpunkt

For punktet $(x,y) = (0,0)$ gir testen ingen konklusjon siden $AC - B^2 = 0$.

Oppgave 5

9.

$$f(x,y) = x - y$$

$$f(x,y) = -1 \Rightarrow x - y = -1 \Rightarrow y = x + 1$$

$$f(x,y) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - y = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = x + \frac{1}{4}$$

$$f(x,y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x$$

→ Rette linjer med stigningstall lik 1 og
stigning med 2-aksen for hhv $y=1$, $y=\frac{1}{4}$ og $y=0$.

Bibetingelsen er gitt ved $y + x^2 - 2x = 0$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 2x \quad (2. \text{ gradsfunksjon})$$

Nullpunkt: $y=0$ gir $-x^2 + 2x = 0$

$$\Rightarrow -x(x-2) = 0$$

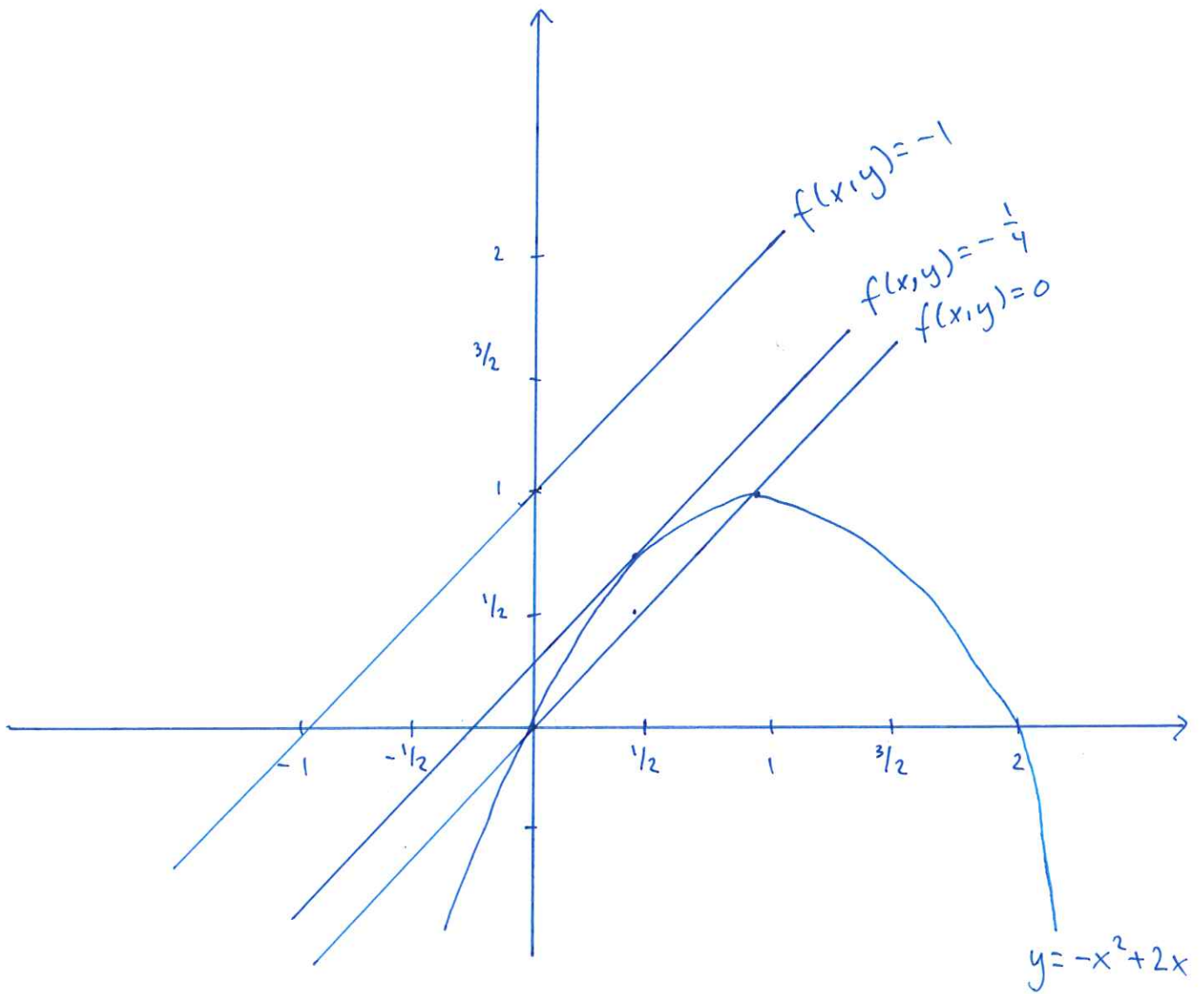
$$\Rightarrow \underline{x=0} \quad \vee \quad \underline{x=2}$$

Toppunkt: $y' = -2x + 2$

$$y' = 0 \text{ gir } -2x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \underline{x=1}$$

Toppunkt i $(x,y) = (1,1)$



b) Max/min $f(x, y) = x - y$

gitt $y + x^2 - 2x = 0$

Lagrangefunksjonen:

$$\mathcal{L}(x, y) = x - y - \lambda (y + x^2 - 2x)$$

Førsteordensbetingelser:

$$L'_1(x, y) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda(2x - 2) = 0 \quad (i)$$

$$L'_2(x, y) = 0 \Rightarrow -1 - \lambda = 0 \quad (ii)$$

$$y + x^2 - 2x = 0 \quad (iii)$$

(ii) gir $\lambda = -1$, settes inn i (i):

$$1 + 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \quad \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}} \quad \text{inn i (iii)}$$

$$y + \frac{1}{4} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \underline{y = \frac{3}{4}}$$

Optimalt punkt: $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ som gir

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Vi ser fra figuren i a) at punktet ligger både på nivåkurven for $f(x, y) = -\frac{1}{4}$ og på kurven for bibetingelsen.

c) Det optimale punktet $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ finnes som tangeringspunktet mellom bibetingelsen og nivåkurven $f(x, y) = -\frac{1}{4}$. Dette er et minimumspunkt, siden alle andre mulige kombinasjoner av x og y (som oppfyller bibetingelsen) ligger på nivåkurver med høyere funksjonsverdi.

Vi ser at nivåkurven $f(x, y) = 0$ skjærer bibetingelsen, mens nivåkurven $f(x, y) = -1$ ikke er oppnåelig.

$(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ligger på lavest mulig nivåkurve og er derfor et minimumspunkt.