

Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (V2020)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgave-nummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren. Merk: Eksamenstiden er på 5 timer. Ekstratiden på 15 minutter er **kun** er ment for å digitalisere håndtegninger og/eller laste opp filer.

Oppgave 1 (25%) Verdien i dag av en aksje er lik nåverdien av de diskonterte framtidige dividendene (utbytteutbetalingene). I denne oppgaven skal du beregne dagens aksjeverdi for ulike antakelser om profilen på de framtidige dividendene. I praksis betales dividendene normalt 1 - 4 ganger per år. Som en forenkling skal vi anta at investorene mottar en kontinuerlig strøm av dividender. La $D(s)$ være dividendeutbetalingen på tidspunkt s . Med en diskonteringsrente $k > 0$ blir aksjeverdien

$$V_0 = \int_0^{\infty} e^{-ks} D(s) ds.$$

La $0 < \delta < \infty$. Beregn dagens aksjeverdi V_0 når:

- a) $D(s) = \delta \quad \forall s \geq 0$.
- b) $D(s) = \delta e^{gs} \quad \forall s \geq 0, g < k$.
- c) $D(s) = \delta s \quad \forall s \geq 0$.
- d) $D(s) = \delta e^{gs} s \quad \forall s \geq 0, g < k$.

Oppgave 2 (25%)

- a) Finn eventuelle løsninger til likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 6 \end{aligned}$$

- b) Bestem rangen til koeffisientmatrisen \mathbf{A} og rangen til den utvidede koeffisientmatrisen \mathbf{A}_b for likningssystemet i spørsmål a).
- c) Kommenter svaret ditt på spørsmål a) i lys av svarene dine på spørsmål b).

d) Finn eventuelle løsninger til likningssystemet

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\3x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0\end{aligned}$$

e) Bestem rangen til koeffisientmatrisen \mathbf{A} og rangen til den utvidede koeffisientmatrisen \mathbf{A}_b for likningssystemet i spørsmål d).

f) Kommenter svaret ditt på spørsmål d) i lys av svarene dine på spørsmål e).

Oppgave 3 (25%)

a) Finn den generelle løsningen til differensiallikningen

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0.$$

b) Finn partikulærløsningen (particular solution) til differensiallikningen

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = t^2 - 3.$$

Oppgave 4 (25%) En profittmaksimerende bedrift har to fabrikker som produserer den samme typen vare. Fabrikk A har produktfunksjon $y = x_1^a x_2^{1-a}$, hvor x_1 og x_2 er mengdene av henholdsvis innsatsfaktor 1 og 2 og $0 < a < 1$. Fabrikk B har produktfunksjon $y = x_1^b x_2^{1-b}$, $0 < b < 1$. Hva er kostnadsfunksjonen for denne teknologien?