Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (H2019)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgavenummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (20%) Avskrivningsreglene er en viktig del av finanspolitikken. I denne oppgaven skal du beregne nåverdien av avskrivningene for to ulike avskrivningsregler. La $D(s)$ være avskrivningene på tidspunkt s. Med en diskonteringsrente $r > 0$ blir nåverdien av avskrivningene

$$z = \int_0^\infty e^{-rs} D(s) ds.$$

a) I denne oppgaven skal du finne z som en funksjon av τ for følgende to tilfeller:

i) $D(s) = \frac{1}{\tau}$ for $0 \leq s \leq \tau$, $D(s) = 0$ for $s > \tau$.

ii) $D(s) = \frac{2(\tau - s)}{\tau^2}$ for $0 \leq s \leq \tau$, $D(s) = 0$ for $s > \tau$.

b) Hva kan du si om verdien av avskrivningene når $\tau \to \infty$?

Oppgave 2 (30%) I denne oppgaven skal vi betrakte to tidspunkt, tidspunkt 0 (i dag) og det framtidige tidspunktet 1. På tidspunkt 1 vil en aksje enten ha en høy verdi lik s^H eller en lav verdi lik s^L, begge strengt positive. De tilsvarende verdiene for en obligasjon er $b^H = b^L = 1$. Vi kan sammenfatte de framtidige verdiene i følgende to vektorer:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} s^H \\ s^L \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Illustrer de mulige framtidige verdiene av aksjen og obligasjonen som vektorer i planet (du kan for eksempel anta at $s^H = 4$ og $s^L = 1$).

La $s^L < K < s^H$. En kjøpsopsjon gir eieren en rett til å kjøpe aksjen på tidspunkt 1 for K. De mulige verdiene av opsjonen på tidspunkt 1 kan sammenfattes i vektoren

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} s^H - K \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Bruk figuren fra spørsmål a) til å illustrere de mulige framtidige verdiene av opsjonen som en vektor i planet (du kan for eksempel sette $K = 3$).

c) Ved å sette sammen en portefølje som består av x enheter av aksjen og y enheter av obligasjonen, kan vi få en portefølje som på tidspunkt 1 har de samme mulige verdiene som opsjonen. Finn x og y.

d) Bruk porteføljevektene x og y til å vise at porteføljen har samme verdi som opsjonen på tidspunkt 1.

La dagens pris på aksjen være s (prisen på tidspunkt 0). La videre $0 < d < u < \infty$. Da kan vi uttrykke de framtidige aksjeprisene slik: $s^H = us$ og $s^L = ds$.

e) Finn x og y yttrykt ved u, d, s og K. Finn de numeriske verdiene for x og y når $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $s = 2$ og $K = 3$.

f) Bruk verdiene du fant for x og y i spørsmål e) og vis grafisk i figuren fra spørsmål a) og b) hvordan du kan kombinere vektorene $\mathbf{S}_1$ og $\mathbf{B}_1$ for å få vektoren $\mathbf{C}_1$.

g) Hvis vi lar r være diskonteringsrenten, vil dagens pris på obligasjonen være $\frac{1}{1+r}$. La $r = 0{,}1$ og bruk verdiene fra spørsmål e) for u, d, s og K. Hva koster det i dag (tidspunkt 0) å konstruere porteføljen som består av investeringer i aksjen og obligasjonen og som har samme verdi som opsjonen på tidspunkt 1? Hva er en økonomisk fornuftig pris på opsjonen i dag?

Oppgave 3 (20%)

a) Finn integralkurven som går gjennom punktet $(1, 1)$ når

$$\dot{x} = -t^2 x^2.$$

b) Gitt differensiallikningen

$$\dot{x} + 2x - 4 = 0.$$

Finn likevektstilstanden og avgjør om den er stabil.

c) Finn den generelle løsningen til differensiallikningen

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0.$$

Oppgave 4 (30%) En profittmaksimerende bedrift er pristaker i markedet for sine innsatsfaktorer. Bedriften bruker tre innsatsfaktorer: Kapital (K), arbeidskraft (L) og råvarer (R). Enhetsprisen på de tre innsatsfaktorene er henholdsvis k, l og r. Alle enhetsprisene er positive. La Q være mengden av en vare bedriften produserer. Produktfunksjonen kan beskrives på følgende måte ($a > 0$):

$$Q = (KLR)^{\frac{1}{a}}.$$

a) Bestem bedriften sin faktoretterspørsel (uttrykk etterspørselen som funksjoner av k, l, r, Q og a).

b) På kort sikt er mengden av tilgjengelig kapital gitt, $K = \overline{K}$. Bestem bedriften sin faktoretterspørsel på kort sikt.