

Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamensoppgave i SØK1001 – Matematikk for økonomer

Faglig kontakt under eksamen: Jan Morten Dyrstad

Tlf.: 918 97 142

Eksamensdato: 28. november 2019

Eksamenstid (fra-til): 4 timer (09.00-13.00)

Hjelpemiddelkode: C

Formelsamling:

Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske.

Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.

Kalkulator:

Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Casio fx-85ES PLUS, Citizen SR-270x, SR-270X College eller HP 30S.

Målform/språk: Bokmål, nynorsk og engelsk

Antall sider bokmål (uten forside): 2

Antall sider nynorsk (uten forside): 2

Antall sider engelsk (uten forside): 2

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig **2-sidig**

sort/hvit **farger**

skal ha flervalgskjema

Kontrollert av:

Dato

Sign

Bokmål

Eksamen består av 5 oppgaver som alle skal besvares. Vekting ved sensur er gitt i parentes.

Oppgave 1 (27%)

a) Finn den førstederiverte til følgende funksjoner

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 2$

ii) $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^{3x}$

iii) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^4 - \ln x + 1\right)^6$

iv) $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{1 - x^3}$

b) Anta at du kjøper en maskin for 700 000 kr i 2019. Maskinens verdi avtar (depresierer) med 2.5% per år.

- i) Sett opp en funksjon, $P(t)$, som beskriver utviklingen i maskinens verdi over tid. La $t = 0$ tilsvare 2019.
- ii) Hvor lang tid tar det før maskinens verdi er halvert? Vis nødvendig utregning.

c) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden med hensyn på x og y av følgende funksjon:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}xy^2 - 2xy + 5x^4$$

d) La $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - y + 3}}$. Angi definisjonsmengden til funksjonen og illustrer definisjonsmengden grafisk.

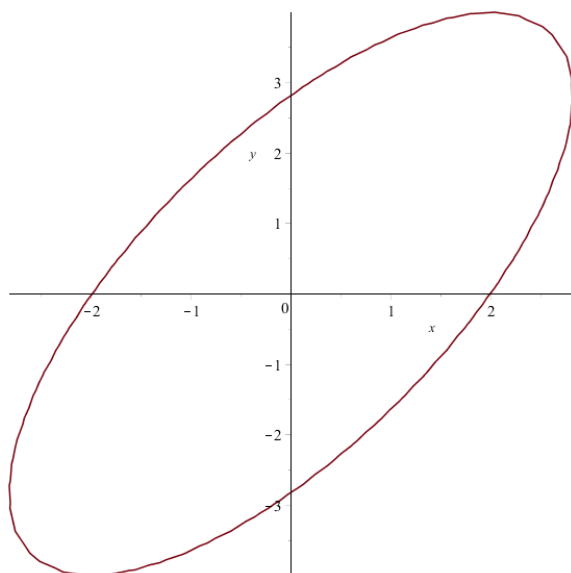
Oppgave 2 (20%)

- a) En person ønsker å spare et fast årlig beløp på sparekonto i totalt seks år. I begynnelsen av hvert år settes det inn 7 000 kr på en konto med årlig forrentning og 4% årlig rente. Vis at beløpet som står på kontoen rett etter det sjette innskuddet er lik summen av sluttverdiene for de seks innskuddene og at dette kan skrives som en geometrisk rekke. Finn saldoen på kontoen rett etter siste innskudd.
- b) Vi låner i dag 750 000 kr til en årlig rente på 2.5%. Det skal betales et terminbeløp hvert år i totalt 15 år. Første terminbeløp om ett år. Hva blir terminbeløpene om lånet er et annuitetslån? Hva blir første og siste terminbeløp om lånet er et serielån?

Oppgave 3 (18%)

Likningen $2x^2 - 2xy + y^2 = 8$ fremstiller en kurve som er vist i figuren under.

- a) Beregn kurvens skjæringspunkter med koordinataksene.
b) Finn y' .
c) I hvilke punkter er tangenten til kurven horisontal?
d) I hvilke punkter er tangenten til kurven vertikal?



Oppgave 4 (20%)

Gitt $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

- a) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$.
b) Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er topp- eller bunnpunkter.
c) Finn eventuelle vendepunkter.
d) Skisser grafen til $f(x)$.

Oppgave 5 (15%)

Løs følgende optimeringsproblem ved bruk av Lagranges metode

$$\text{Max } f(x, y) = 12x^{1/4}y^{1/3}$$

$$\text{gitt at } 3x + y = 14$$

Nynorsk

Eksamen inneheld 5 oppgåver som alle skal svarast på. Vekt ved sensur er gitt i parentes.

Oppgåve 1 (27%)

a) Finn den fyrstederiverte til fylgjande funksjoner

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 2$

ii) $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^{3x}$

iii) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^4 - \ln x + 1\right)^6$

iv) $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{1 - x^3}$

b) Anta at du kjøper ei maskin for 700 000 kr i 2019. Maskina sin verdi minskar (depresierer) med 2.5% per år.

- i) Sett opp ein funksjon, $P(t)$, som beskriv utviklinga i maskina sin verdi over tid. Lat $t = 0$ svare til 2019.
- ii) Kor lang tid tek det før maskina sin verdi er halvert? Vis nødvendig utrekning.

c) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden med omsyn til x og y av fylgjande funksjon:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}xy^2 - 2xy + 5x^4$$

d) Lat $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y+3}}$. Angje definisjonsmengda til funksjonen og illustrer definisjonsmengda grafisk.

Oppgåve 2 (20%)

- a) Ein person ynskjer å spare eit fast årleg beløp på sparekonto i totalt seks år. I byrjinga av kvart år set han inn 7 000 kr på ein konto med årleg forrenting og 4% årleg rente. Vis at beløpet

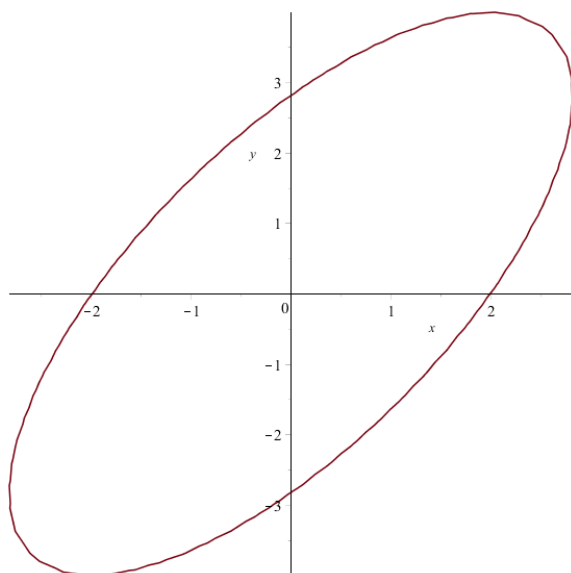
som står på kontoen rett etter det sjette innskotet er lik summen av sluttverdiane for dei seks innskota og at dette kan skrivast som ei geometrisk rekke. Finn saldoen på kontoen rett etter siste innskot.

- b) Vi låner i dag 750 000 kr til ei årleg rente på 2.5%. Det skal betalast eit terminbeløp kvart år i totalt 15 år. Første terminbeløp om eitt år. Kva blir terminbeløpa om lånet er eit annuitetslån? Kva blir første og siste terminbeløp om lånet er eit serielån?

Oppgåve 3 (18%)

Likninga $2x^2 - 2xy + y^2 = 8$ framstiller ei kurve som er vist i figuren under.

- Berekn kurva sine skjeringspunkt med koordinataksane.
- Finn y' .
- I kva for punkt er tangenten til kurva horisontal?
- I kva for punkt er tangenten til kurva vertikal?



Oppgåve 4 (20%)

Gitt $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

- Finn $f'(x)$ og $f''(x)$.
- Finn dei stasjonære punkta og avgjer om dei er topp- eller botnpunkt.
- Finn eventuelle vendepunkt.
- Skisser grafen til $f(x)$.

Oppgåve 5 (15%)

Løys fylgjande optimeringsproblem ved bruk av Lagranges metode

$$\text{Max } f(x, y) = 12x^{1/4}y^{1/3}$$

gitt at $3x + y = 14$

English

The exam consists of 5 questions and all of them should be answered. Weights for the grading is given in parenthesis.

Question 1 (27%)

a) Find the first derivative of the following functions

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 2$

ii) $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^{3x}$

iii) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^4 - \ln x + 1\right)^6$

iv) $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{1 - x^3}$

b) Assume that you buy a machine for NOK 700 000 in 2019. The value of the machine decreases (depreciates) by 2.5% per year.

- i) Construct a function, $P(t)$, that describes the development of the machine's value over time. Let $t = 0$ correspond to 2019.
- ii) How much time does it take for the value of the machine to half? Show the necessary calculations.

c) Find the partial derivatives of 1. and 2. order with respect to x and y of the following function:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}xy^2 - 2xy + 5x^4$$

d) Let $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - y + 3}}$. Find the function's domain and illustrate the domain graphically.

Question 2 (20%)

- a) A person wants to save a fixed annual amount on a savings account for a total of six years. At the beginning of each year, NOK 7 000 is deposited into an account with interest of 4%

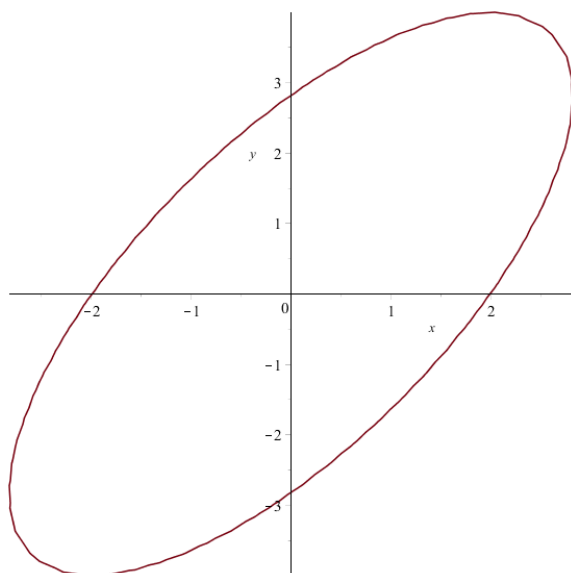
compounding annually. Show that the amount in the account immediately after the sixth deposit equals the sum of the final values of the six deposits and that this can be written as a geometric series. Find the account balance immediately after the last deposit.

- b) We borrow NOK 750 000 at an annual interest rate of 2.5%. A payment is to be made each year for a total of 15 years. First payment in one year from now. What are the annual payment amounts if the loan is an annuity loan? What are the payment amounts for the first and the last year if the loan is a serial loan?

Question 3 (18%)

The equation $2x^2 - 2xy + y^2 = 8$ describes a curve that is illustrated in the figure below.

- Calculate the intersection points of the curve with the coordinate axes.
- Find y' .
- In which points are the tangent to the curve horizontal?
- In which points are the tangent to the curve vertical?



Question 4 (20%)

Given $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

- Find $f'(x)$ and $f''(x)$.
- Find the stationary points and decide whether they are maximum or minimum points.
- Find any inflection points.
- Sketch the graph of $f(x)$.

Question 5 (15%)

Solve the following optimization problem by using Lagrange's method

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x, y) &= 12x^{1/4}y^{1/3} \\ \text{subject to } 3x + y &= 14 \end{aligned}$$