Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (V2019)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgavenummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (25%) Bestem integralene

a)

$$\int (ax^2 + bx + h)\mathrm{d}x$$

b)

$$\int_s^t (ax + b)\mathrm{d}x$$

Finn de deriverte:

c)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_s^t (ax + b)\mathrm{d}x$$

d)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big(\frac{a}{2}(t^2 - s^2) + b(t - s) \Big)$$

e) Bestem integralet (*Hint:* Bruk både delvis integrasjon og substitusjonsmetoden):

$$\int x^5 \sqrt{x^3 + 1}\mathrm{d}x$$

Oppgave 2 (30%) La y_t være avkastningen på en aksje på dag t. Du observerer avkastningen på aksjen på T ulike dager. Du samler alle T avkastningene i en $T \times 1$-vektor $\mathbf{y}$. På hvert tidspunkt t observerer du også verdien på k ulike variabler som du tror er med på å forklare avkastningen y_t. Du samler verdiene av alle disse forklaringsvariablene i en $T \times k$-matrise $\mathbf{X}$. Du innser at ikke alle forklaringsvariablene påvirker aksjeavkastningen likt og du ønsker derfor å gi de k ulike forklaringsvariablene unike vekter. Det betyr at forklaringsvariabel 1 får vekt b_1, forklaringsvariabel 2 får vekt b_2 og så videre. Du samler alle disse b-verdiene i en $k \times 1$-vektor $\mathbf{b}$.

Din modell predikerer en aksjeavkastning på $\mathbf{X}_t\mathbf{b}$. Her er $\mathbf{X}_t$ radvektoren $[x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{k,t}]$. Du innser at modellen ikke er i stand til å forklare hele aksjeavkastningen y_t. La ϵ_t være forskjellen mellom faktisk avkastning y_t og avkastningen din modell predikerer: $\epsilon_t = y_t - \mathbf{X}_t\mathbf{b}$. Du samler så alle T feilleddene ϵ_t i $T \times 1$-vektoren $\boldsymbol{\epsilon}$ slik at du får sammenhengen

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

a) Hvilken dimensjon/orden har $\boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon}$?

b) Vis at

$$\boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}.$$

For å bestemme elementene i vektoren $\mathbf{b}$ bestemmer du deg for å minimere $\boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon}$ med tanke på elementene i vektoren $\mathbf{b}$.

c) Vis at førsteordensbetingelsene for et minimum gir at

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

Oppgave 3 (20%)

a) Finn den generelle løsningen til

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0.$$

b) Er løsningen du fant i a) globalt asymptotisk stabil (G.A.S)?

c) Finn partikulærløsningen (particular solution) til

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 3t + 2.$$

Oppgave 4 (25%)

a) Bruk en fjerdeordens Taylor-ekspansjon til å finne en tilnærmet verdi for e.

Ved kontinuerlig forrentning er nåverdien (verdien i dag, tidspunkt 0) av å motta én krone på tidspunkt t gitt ved

$$f(t) = e^{-rt},$$

hvor r er renten.

b) Bruk en førsteordens Taylor-ekspansjon til å finne en approksimasjon for $f(t)$.

c) Gi en (kort) økonomisk forklaring til tilnærmingen du fant i spørsmål b).

Vi skiller mellom to typer avkastning, *enkel* avkastning og *logaritmisk* avkastning. For en investeringutgift på P_0 på tidspunkt 0 som realiseres på tidspunkt $T > 0$ for P_T, er den enkle avkastningen gitt ved $\frac{P_T - P_0}{P_0}$, mens den logaritmiske avkastningen er $\ln(\frac{P_T}{P_0})$.

d) Vis at den enkle avkastningen kan finnes som en førsteordens Taylor-ekspansjon av den logaritmiske avkastningen.