

Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (H2018)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgave-nummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (20%) Bestem integralene

a)

$$\int_0^2 (x - 1) dx$$

b)

$$\int \frac{x + 4}{(x + 3)^2} dx$$

c)

$$\int \frac{x}{e^x} dx$$

d) Utfør følgende derivasjon:

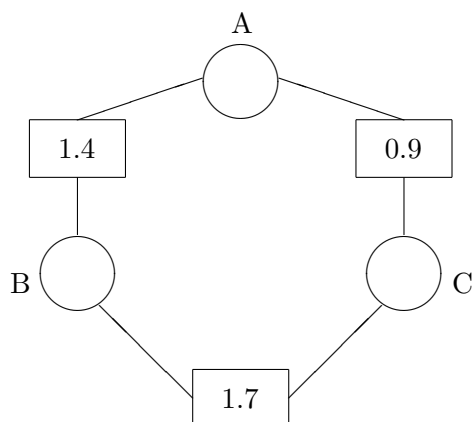
$$\frac{d}{dt} \int_0^t x e^{-t} dx$$

Oppgave 2 (20%)

a) I læreboken “Math in Focus 4B” som brukes av 4. klassinger, står følgende oppgave (se figuren på neste side):

The number in each rectangle is the sum of the numbers in the two circles next to it. Find the numbers in the circles.

Bruk lineær algebra til å løse oppgaven.



b) En matrise X har dimensjon/orden $n \times m$. Hvilken dimensjon/orden har matrisen XX' , hvor $'$ betyr at matrisen er transponert.

c) Vis at matrisen XX' er symmetrisk.

Oppgave 3 (25%) Vi er gitt følgende system av differensiallikninger:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= x - \alpha y,\end{aligned}$$

hvor $\alpha \in \mathbb{R}$. Punktet $P = (0,0)$ er det kritiske punktet for systemet (likevektspunktet).

a) For hvilke verdier av α er punktet P et sadelpunkt?

I resten av oppgaven skal du anta at $\alpha = 0$.

b) Finn nullisoklinene til systemet. Illustrer disse i et diagram.

c) Bruk diagrammet fra spørsmål b) og lag et faseromsdiagram.

La $f(x, y) = \dot{x}$ og $g(x, y) = \dot{y}$. La videre matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f'_1(x, y) & f'_2(x, y) \\ g'_1(x, y) & g'_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Her blir $\mathbf{A}(P) = \mathbf{A}$.

- d) Finn egenvektoren assosiert med den negative egenverdien til matrisen **A**.

I læreboken står det at det finnes en kurve C som går igjennom punktet P .

- e) Hva kan du si om tangenten til kurven C i punktet P ?

Oppgave 4 (20%) Gitt funksjonen $f(x, y) = -x^2 - y^2$. Løs optimeringsproblemet

$$\max_{x,y} f(x, y)$$

under bibetingelsen

$$x - 3y \leq -10.$$

Oppgave 5 (15%) En bedrift bruker to innsatsfaktorer i sin produksjon, kapital og arbeidskraft. K og L angir hvor mye av de to faktorene som brukes i produksjonen. Kostnaden ved å bruke kapital i produksjonen er rK , hvor r er rentenivået. Kostnaden ved å bruke arbeidskraft er wL , hvor w er lønnsnivået til arbeiderne i bedriften. Produsert kvantum er gitt ved $Q = f(K, L)$.

Ledelsen i bedriften er bekymret for at rentenivået skal stige. Forklar ledelsen hvordan en økning i renten r vil påvirke produksjonskostnadene (forklar hvilke forutsetninger du bygger din analyse på).