

Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (H2017)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgave-nummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (20%) Løs integralene

a)

$$\int (3x^2 + 2e^{2x}) dx$$

b)

$$\int x^2 e^x dx$$

c) Vis at integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

konvergerer for $f(x) = e^{-x^2}$.

Oppgave 2 (20%) La a og b være konstanter. Differensiallikningen

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \tag{1}$$

har løsning

$$x(t) = x_T e^{-a(T-t)} - \int_t^T e^{-a(v-t)} b dv, \tag{2}$$

hvor $x_T = x(T)$ er en konstant.

a) Vis at uttrykket i (2) er en løsning til differensiallikningen i uttrykk (1). (*Hint*: Du trenger ikke å løse differensiallikningen i (1)).

En investor har to investeringsmuligheter for sin formue. På tidspunkt t har formuen verdi $v(t)$. I det første alternativet kan investoren plassere hele sin formue på en bankkonto. Rentesatsen på bankinnskudd er $r(t) > 0$. I det andre alternativet kan investoren investere hele sin formue i en aksje. Aksjen betaler en kontinuerlig dividende (utbetalinger fra aksjeselskapet til investoren). På tid t er utbetalingen $\pi(t)$. Det er ingen usikkerhet med tanke på utviklingen i aksjekursen.

b) Forklar kort hvorfor følgende betingelse bør gjelde i et velfungerende kapitalmarked:

$$r(t)v(t) = \pi(t) + \dot{v}(t).$$

c) Anta at betingelsen fra spørsmål b) holder og at investoren velger å investere i aksjen. Anta videre at $r(t) = r \quad \forall t$ og $\pi(t) = \pi \quad \forall t$. Finn et uttrykk for investoren sin formue $v(t)$ når han ønsker å selge aksjen på tidspunkt $T > t$.

d) La $T \rightarrow \infty$. Finn et uttrykk for investoren sin formue $v(t)$ (dette uttrykket vil også være lik aksjekursen på tidspunkt t).

Oppgave 3 (15%) En konsument konsumerer fire ulike varer. Konsumvektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Prisen på varene kan sammenfattes i prisvektoren $\mathbf{p} = (2, 1, 3, 4)$. Varevektoren $\mathbf{a} = (4, 3, 8, 1)$ ligger i budsjett-hyperplanet.

a) Finn likningen til budsjett-hyperplanet.

Varen x_3 blir trukket fra markedet, slik at konsumenten nå kun konsumerer tre varer.

b) Finn den nye likningen for budsjettplanet.

Oppgave 4 (15%)

a) Bruk en andreordens Taylor-ekspansjon til å finne en tilnærmet verdi for $e^{-0,2}$.

b) Bruk en førsteordens Taylor-ekspansjon til å finne en tilnærmet verdi for $\sqrt[3]{65}$.

c) Bruk en tredjeordens Taylor-ekspansjon til å finne en tilnærmet verdi for $\ln(1,1)$.

Oppgave 5 (30%) En bedrift produserer én type vare som den selger i markedet til en pris p . Bedriften bruker to innsatsfaktorer for å produsere varen, kapital (K) og arbeidskraft (L). Prisen per enhet på de to innsatsfaktorene er henholdsvis r og w . Kvantum produsert er gitt ved

$$Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}.$$

a) Bestem bedriften sin faktoretterspørsmål.

- b) Er innsatsfaktorene perfekte substitutter?
- c) Hvordan påvirkes bedriften sitt tilbud av en prisøkning på arbeidskraft?