NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamensoppgave i SØK 3004
Videregående matematisk analyse

Faglig kontakt under eksamen: Anders Skonhoft

Tlf.: 73 59 19 39

Eksamensdato: 5. desember 2016

Eksamenstid (fra-til): 5 timer (09.00-14.00)

Sensurdato: 5. januar 2017

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C /Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Godkjent kalkulator Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270x, SR-270X College eller HP 30S.

Målform/språk: Bokmål og nynorsk

Antall sider (inkl forside): 4

Antall sider vedlegg: 0

Oppgave 1 (25%)

a) Finn arealet under funksjonen $f(x) = ax + b$ over $[-3,3]$. Finn deretter arealet under parabelen $f(x) = x^2$ over $[0,1]$.

Finn de deriverte av funksjonene i) $y = \left(\frac{(x-1)}{(x+3)^2}\right)^{1/2}$ og ii) $y = \sqrt{x^2 + 6}$.

Finn så grenseverdien $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x + x^2 - 1}$.

b) Nåverdien til et investeringsprosjekt er gitt av $PV_0 = -I + \sum_{t=1}^{10} \frac{D_t}{(1+r)^t}$. Gi først en kort karakteristikk av dette prosjektet. Anta så at $D_t = D$ er fast over tiden og beregn nåverdien. Vis til slutt hvordan du kan finne prosjektets internrente.

Oppgave 2 (25%)

Betrakt følgende optimeringsproblem:

$\underset{x,y}{maks}\ f(x, y) = x + \ln(1 + y)$ gitt $qx + qy \leq 10$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

a) Løs problemet for ulike verdier av parameteren q og hvor du antar at $q \geq 1$.

b) La $W(q)$ betegne maksimumsverdien av $f(x, y)$ som en funksjon av q. Finn $W(q)$ for alle definerte verdier av q.

c) Problemet ovenfor kan tolkes som et nyttemaksimeringsproblem hvor $f(x, y)$ uttrykker nyttefunksjonen. Finn grensenytten av de to godene, og den marginale substitusjonsraten. Skisserer også en indifferenskurve og vis en grafisk løsning på maksimeringsproblemet.

Oppgave 3 (25%)

Korn produseres med arbeidskraft N og land A gitt ved produktfunksjonen $Y = BA^{\alpha}N^{\beta}$.

a) Hva sier parameterne B, α og β ? Hva er skalaelastisiteten, og hva forteller den? Finn også det tekniske substitusjonsforholdet og skisserer en isokvant.

b) På kort sikt er mengden land gitt. Finn korttids etterspørselsfunksjon etter arbeidskraft, korttids tilbudsfunksjon og korttids profittfunksjon.

c) Anta så at mengden land også kan variere. Vis hvordan de tilsvarende funksjoner som i b) blir på lang sikt.

d) Hva sier Hotellings lemma?

Oppgave 4 (25%)

a) Anta at en dyrepopulasjon har en vekst gitt av differensiallikningen $dP_t / dt = 0.2P_t - 10$. Hva er betingelsen for at populasjonen øker over tid? Løs differensiallikningen. Populasjonen ved $t = 0$ er gitt ved P_0. Vis hvordan P_t utvikler seg over tid for ulike verdier av P_0. Finn et uttrykk for hvor lang tid det tar før populasjonen fordobles.

b) Betrakt differensiallikningene $dx/dt = 2x - y$ og $dy/dt = 5 - x - y$. Finn først likevekten ved bruk av Cramers metode. Undersøk så stabiliteten av systemet ved bruk av faseromsdiagram. Undersøk til slutt stabiliteten ved beregning av determinant og trase. Sjekk også egenverdiene.

NYNORSK

Oppgåve 1 (25%)

a) Berekn arealet under funksjonen $f(x) = ax + b$ over $[-3,3]$. Finn så arealet under parabelen $f(x) = x^2$ over $[0,1]$.

Berekn dei deriverte av funksjonane i) $y = \left(\dfrac{(x-1)}{(x+3)^2} \right)^{1/2}$ og ii) $y = \sqrt{x^2 + 6}$.

Finn så grenseverdia $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x + x^2 - 1}$.

b) Nåverdien til eit investeringsprosjekt er gjeven av $PV_0 = -I + \sum_{t=1}^{10} \dfrac{D_t}{(1+r)^t}$. Gje først ein kort karakteristikk av dette prosjektet. Førutset nå at $D_t = D$ er fast over tida og berekn nåverdien. Syn til slutt korleis du kan finne internrenta til prosjektet.

Oppgåve 2 (25%)

Sjå på optimeringsproblemet:

$\underset{x,y}{maks}\ f(x,y) = x + \ln(1+y)$ gitt $qx + qy \leq 10$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

a) Løys problemet for ulike verdiar av q når du har $q \geq 1$.

b) La $W(q)$ betekne maksimumsverdien av $f(x,y)$ som ein funksjon av q. Finn $W(q)$ for alle gjeldne verdiar av q.

c) Problemet ovanfor kan tolkes som eit nyttemaksimeringsproblem kor $f(x,y)$ er nyttefunksjonen. Finn grensenytta av dei to godane, og den marginale substitusjonsraten. Tekn også ein indifferenskurve og syn ein grafisk løysning på maksimeringsproblemet.

Oppgåve 3 (25%)

Korn produseras med arbeidskraft N og land A gjeven ved produktfunksjonen $Y = BA^{\alpha} N^{\beta}$.

a) Kva seier parametarne B, α og β ? Kva er skalaelastisiteten og kva fortel den? Berekn det tekniske substitusjonsforholdet og skisserer ein isokvant.

b) På kort sikt er mengden land gjeven. Finn korttids etterspurnadsfunksjon etter arbeidskraft, korttids tilbodsfunksjon og korttids profittfunksjon.

c) Førutset så at mengda land også kan variera. Syn korleis dei tilsvarande funksjonar som i b) blir på lang sikt.

d) Kva seier Hotellings lemma?

Oppgåve 4 (25%)

a) Veksten i ein dyrepopulasjon er gjeven av differensiallikninga $dP_t / dt = 0.2P_t - 10$. Kva er betingelsen for at populasjonen aukar over tid? Løys differensiallikninga. Populasjonen ved $t = 0$ er P_0. Syn korleis P_t veks over tida for ulike verdiar av P_0 . Finn eit uttrykk for kor lang tid det tar før populasjonen fordoblas.

b) Sjå på differensiallikningane $dx / dt = 2x - y$ og $dy / dt = 5 - x - y$. Finn først jamnvekten ved å bruka Cramers metode. Undersøk stabiliteten av systemet ved faseromsdiagram. Undersøk til slutt stabiliteten ved berekning av determinant og trase. Sjekk også eigenverdiane.