NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamensoppgave i SØK 3004
Videregående matematisk analyse

Faglig kontakt under eksamen: Anders Skonhoft

Tlf.: 73 59 19 39

Eksamensdato:	2. juni 2016
Eksamenstid (fra-til):	5 timer (09.00-14.00)
Sensurdato:	23. juni 2016

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C /Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Godkjent kalkulator Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270x, SR-270X College eller HP 30S.

Målform/språk:	Bokmål og nynorsk
Antall sider (inkl forside):	3
Antall sider vedlegg:	0

Oppgave 1 (30%)
Betrakt systemet av differensiallikninger
(1) $dX/dt = rX(1 - X/K) - \alpha XY$
og
(2) $dY/dt = sY(1 - Y/L) + \beta YX$
hvor r, K, s, L, α og β alle er positive koeffisienter. Dette systemet kan tolkes som en biologisk rovdyr – byttedyr modell hvor X er byttedyret og Y rovdyret.
a) Finn likningene for X -isoklinene og Y -isoklinene. Finn også den indre likevekten.
b) Vis ved piler hvordan systemet beveger seg utenfor likevekten. Synes likevekten å være stabil?
c) Finn Jacobimatrisen og vis hvordan du ville gått fram hvis du formelt skulle undersøke stabiliteten.
d) Betrakt differenslikningen $X_{t+1} = bX_t + c$ hvor b og c er konstanter. Løs ligningen og undersøk stabiliteten for ulike verdier på konstantene. Illustrer også ved bruk av figur.

Oppgave 2 (30%)
En bedrift har L arbeidstimer til rådighet for produksjon av to produkter, $X \geq 0$ og $Y \geq 0$. Disse selges til faste priser, henholdsvis p og q. Produksjonen av X enheter krever αX^2 arbeidstimer og produksjonen av Y enheter krever βY timer slik at $\alpha X^2 + \beta Y \leq L$ Anta at bedriftens inntekt ønskes maksimert.
a) Vis først løsningen på optimeringsproblemet med en figur.
b) Still opp Kuhn-Tucker betingelsene for problemet.
c) Finn deretter optimal produksjon.
d) Finn også prisen (skyggeprisen) på arbeidstidsbeskrankningen. Tolk denne.
e) Finn til slutt hvilke effekter små endringer i prisene p og q har på optimal produksjon og skyggepris.

Oppgave 3 (20 %)
a) Beregn følgende integral
i) $\int_0^1 \left(2x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5\right)dx$, ii) $\int \ln x\,dx$ og iii) $\int \frac{8x-2}{\left(2x^2 - x + 1\right)^3}dx$.
b) Finn den allmenne løsningen av differensiallikningen $-\dot{x} = 3x^2te^{-2t}$. Finn også løsningskurven som går gjennom punktet $(t, x) = (0, 4)$.
c) Gitt matrisene
$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ k & 3 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$, der k, b og c er konstanter.
i) Beregn matriseproduktet AB
ii) Finn de verdier av k hvor A har en invers. Finn den inverse.

Oppgave 4 (20%)
Vi har følgende ligningssystem hvor x og y er de endogene variable og v og u er de eksogene variable:
$x^2 + e^{v-u} - xy = 1$
$\ln y - u + 2v^2 = e$
Finn ved hjelp av differensiering hvilke effekter små endringer i de eksogene variable har på de endogene variable.

NYNORSK

Oppgåve 1 (30%)
Vi har følgjande system av differensiallikninger
(1) $dX\ /\ dt = rX(1 - X\ /\ K) - \alpha XY$
og
(2) $dY\ /\ dt = sY(1 - Y\ /\ L) + \beta YX$
hvor r, K, s, L, α og β alle er positive konstantar. Dette systemet kan tolkas som ein biologisk rovdyr – byttedyr modell hvor X er byttedyret og Y rovdyret.
a) Finn likningane for X -isoklinane og Y -isoklinane. Berekn også indre jamnvekt.
b) Syn med pilar korleis systemet røyrer seg utanfor jamnvekt. Synes jamnvekten å vere stabil?
c) Finn Jacobimatrisen og syn korleis du ville gått fram om du formelt skulle undersøke stabiliteten.
d) Betrakt differenslikningen $X_{t+1} = bX_t + c$ der b og c er konstantar. Løys likninga og undersøk stabiliteten for ulike verdiar på konstantane. Illustrer også ved bruk av figur.

Oppgåve 2 (30%)
Ein bedrift har L arbeidstimer til rådighet for produksjon av to produkter, $X \geq 0$ og $Y \geq 0$. Desse seljes til faste prisar p og q. Produksjonen av X enheter krevjer αX^2 arbeidstimer og produksjonen av Y enheter krevjer βY timer såleis at $\alpha X^2 + \beta Y \leq L$ Anta at inntekta til bedriften ønskjes størst mogleg.
a) Syn først løysinga på optimeringsproblemet med ein figur.
b) Still så opp Kuhn-Tucker betingelsene for problemet.
c) Finn deretter optimal produksjon.
d) Finn også skuggjeprisen på arbeidstidsbeskrankninga. Tolk denne.
e) Finn til slutt korleis små endringar i prisene p og q endrar optimal produksjon og skyggepris.

Oppgåve 3 (20 %)
a) Berekn følgjande integral
i) $\int_0^1 \left(2x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5\right)dx$, ii) $\int \ln x dx$ og iii) $\int \frac{8x-2}{\left(2x^2 - x + 1\right)^3} dx$.
b) Finn den allmenne løysinga av differensiallikninga $-\dot{x} = 3x^2 te^{-2t}$. Finn også løysingskurven som går gjennom punktet $(t, x) = (0, 4)$.
c) Gjeve matrisene
$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ k & 3 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$, der k, b og c er konstantar.
i) Berekn matriseproduktet AB.
ii) For kva verdiar av k har A ein invers? Finn den inverse.

Oppgåve 4 (20%)
I følgjande system av likningar er x og y er dei endogene variable og v og u er dei eksogene variable:
$x^2 + e^{v-u} - xy = 1$
$\ln y - u + 2v^2 = e$
Berekn ved hjelp av differensiering korleis små endringar i dei eksogene variable påverkar dei endogene variable.