NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamensoppgave i SØK 3004
Videregående matematisk analyse

Faglig kontakt under eksamen: Snorre Lindset

Tlf.: 73 59 13 95

Eksamensdato:	10.12.2014
Eksamenstid (fra-til):	5 timer (09.00-14.00)
Sensurdato:	12.1.2015

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C /Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin. Godkjent kalkulator Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270x, SR-270X College eller HP 30S.

Målform/språk:	Bokmål og engelsk
Antall sider (uten forside):	4
Antall sider vedlegg:	0

Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (H2014)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgavenummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (25%) En bedrift skal investere i en ny maskin. Investeringsutgiften må betales i dag og er 1000 kroner. De årlige nettoinntektene (kontantoverskuddene) fra maskinen vil hvert år være kroner 605 og vil tilfalle bedriften ved slutten av hvert år. Diskonteringsrenten er 10% per år. Maskinen kan brukes i to år.

a) Beregn investeringens netto nåverdi. Er investeringen lønnsom?

Bedriften må låne 1000 kroner i banken for å finansiere kjøpet av maskinen. Lånet er et *annuitetslån*, det vil si et lån hvor summen av renter og avdrag er like store ved hver terminbetaling. Renter og avdrag betales ved slutten av hvert år (det er altså én terminbetaling per år). Renten på lånet er 10% per år. Lånet skal nedbetales i løpet av to år.

b) Beregn hvor mye bedriften betaler i renter og avdrag hvert år (summen av renter og avdrag).

c) Beregn hvor mye som betales i renter og hvor mye som betales i avdrag ved slutten av hvert av de to årene.

d) Vis at kontantoverskuddene er tilstrekkelig store til å betale både rentene og avdragene på et lån på kroner 1.050.

e) Beregn internrenten på investeringen.

f) Basert på spørsmål a) og d), gi en kort fortolkning av hva en netto nåverdi er.

Oppgave 2 (25%)

a) Løs følgende likningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

b) Finn den inverse til matrisen $\mathbf{A}$ når

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

c) La matrisen $\mathbf{A}$ og identitetsmatrisen $\mathbf{I}$ være 2×2-matriser. Finn $\mathbf{A}$ når

$$\mathbf{A}^{-1} - 2\mathbf{I} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3 (20%)

a) Løs initialverdiproblemet

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^t, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 3.$$

b) La r_1, C_1 og C_2 være konstanter. Vis at

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{r_1 t}$$

er en løsning på differensiallikningen

$$\ddot{x} - 2r_1\dot{x} + r_1^2 x = 0.$$

Oppgave 4 (30%) En konsument konsumerer to goder, gode X og Y. Han skal konsumere i periode 1 og i periode 2. Konsumet i periode 1 er x_1 og y_1 til enhetspriser p_1 og q_1. Tilsvarende konsum og priser i periode 2 er x_2, y_2 og p_2, q_2. Inntekten i de to periodene er I_1 og I_2. Nytten av konsumet er gitt ved

$$u = \alpha_1 \ln x_1 + \beta_1 \ln y_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \beta_2 \ln y_2, \qquad \alpha_i, \beta_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

a) Formuler konsumentens optimeringsproblem.

b) Løs konsumentens optimeringsproblem og finn de tilhørende Lagrangemultiplikatorene.

Konsumenten får tilbud om å spare en liten del av inntekten han har i periode 1.

c) Hvilken rente må han tilbys hvis han skal være interessert i å spare et lite beløp?

Hint: Hva forteller Lagrangemultiplikatorene oss?

Exam in SØK 3004 Advanced Mathematics (F2014)

Make the assumptions you find necessary. %-points associated with each problem give an *indication* of how the problem will count on the final grading.

Problem 1 (25%) A firm is about to invest in a new machine. The investment must be paid for today and amounts to 1,000 kroner. The machine will, at the end of each year, generate a cashflow of 605. The discount rate is 10%. The machine can be used for two years.

a) Calculate the net present value of the investment. Is it profitable to invest in the machine?

The firm must borrow 1,000 from the bank to realize the investment. The loan is an *annuity loan*, i.e., the sum of interest and instalment payments is of equal size at each payment date. Interest and instalments are paid at the end of each year (there is one payment each year). The interest rate on the loan is 10% per year. The loan has to be fully repaid in two years.

b) How much does the firm pay in interest and instalments each year (the sum of interest and instalments)?

c) How much does the firm pay in interest each year and how much does it pay in instalments each year?

d) Show that the cashflows from the machine are sufficient to pay interest and instalments on a loan of size 1.050.

e) Calculate the internal rate of return on the investment in the machine.

f) Based on problems a) and d), give a short interpretation of whan a net present value is.

Problem 2 (25%)

a) Solve the following system of equations:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

b) Find the inverse of the matrix $\mathbf{A}$ when

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

c) Let the matrix $\mathbf{A}$ and the identity matrix $\mathbf{I}$ be 2×2-matrices. Find $\mathbf{A}$ when

$$\mathbf{A}^{-1} - 2\mathbf{I} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problem 3 (20%)

a) Solve the initial value problem

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^t, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 3.$$

b) Let r_1, C_1, and C_2 be constants. Show that

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{r_1 t}$$

is a solution to the differential equation

$$\ddot{x} - 2r_1\dot{x} + r_1^2 x = 0.$$

Problem 4 (30%) A consumer consumes two goods, good X and good Y. He will consume in two periods, in period 1 and in period 2. The consumption in period 1 is x_1 and y_1. The unit prices are p_1 and q_1. The consumption and prices in period 2 are x_2, y_2 and p_2, q_2. The income in period 1 is I_1 and the income in period 2 is I_2. The utility from consumption is

$$u = \alpha_1 \ln x_1 + \beta_1 \ln y_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \beta_2 \ln y_2, \qquad \alpha_i, \beta_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

a) Formulate the consumer's optimization problem.

b) Solve the consumer's optimization problem and find the Lagrange multipliers.

The consumer is offered to save a small amount of the income he has in the first period.

c) If he is to save a small amount, what interest must he be offered?
Hint: What do the Lagrange multipliers tell us?