

Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamensoppgave i SØK1001 – Matematikk for økonomer

Faglig kontakt under eksamen: Anne Borge Johannesen

Tlf.: 73 59 05 29

Eksamensdato: 12.12.2014

Eksamenstid (fra-til): 4 timer (09.00-13.00)

Sensurdato: 12.1.2015

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C /Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Godkjent kalkulator Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270x, SR-270X College eller HP 30S.

Annen informasjon:

Målform/språk: Bokmål, nynorsk og engelsk

Antall sider (uten forside): 6

Antall sider vedlegg: 0

SØK1001 Matematikk for økonomer

Bokmål

Eksamen består av 5 oppgaver som alle skal besvares. Vekting ved sensur er gitt i parentes.

Oppgave 1 (20%)

a) Finn den førstederiverte til følgende funksjoner

i) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$

ii) $f(x) = \frac{x^3 + 5}{5x^2 - x}$

iii) $f(x) = (2x^2 - e^{3x} + 1)^7$

iv) $f(x) = 2e^{-x} + \ln x^3$

b) Befolkningen i et land er 5 millioner i 2014, og det er estimert at den fremover vil vokse med 1.2% årlig.

i) Sett opp en funksjon, $P(t)$, som beskriver utviklingen i befolkningen over tid. La $t = 0$ tilsvare 2014.

ii) Hvor lang tid tar det før befolkningen er dobbelt så høy som i 2014? Vis nødvendig utregning.

iii) Hvordan må funksjonen for befolkningsutvikling omformuleres dersom befolkningen:

- vokser med 2.25% per år?
- vokser med 0.7% per år?
- avtar med 1% per år?

Oppgave 2 (22%)

Gitt $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$

a) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$.

b) Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er topp- eller bunnpunkter.

c) Finn eventuelle vendepunkter.

d) Finn likningen for tangenten til grafen i punktet $(2, -2)$.

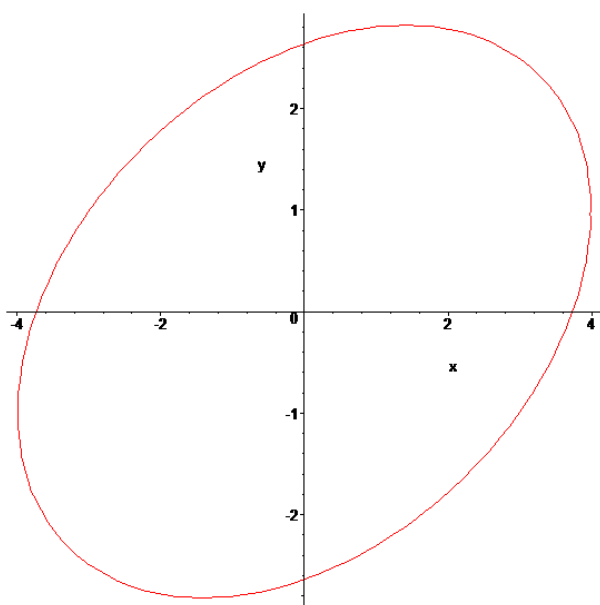
e) Skisser grafen til $f(x)$.

Oppgave 3 (23%)

Likningen $x^2 - xy + 2y^2 = 14$ fremstiller en kurve i xy -planet som er vist i figuren under.

(Legg merke til at det er forskjellige skalaer på aksene)

- Beregn kurvens skjæringspunkter med koordinataksene.
- Bruk implisitt derivasjon til å vise at y' kan skrives som $y' = -\frac{2x-y}{4y-x}$.
- Finn y'' i et vilkårlig punkt (x, y) på kurven.
- I hvilke punkter er tangenten til kurven horisontal? Undersøk fortegnet og verdien til y'' i disse punktene.
- I hvilke punkter er tangenten til kurven vertikal?



Oppgave 4 (15%)

Gitt funksjonen

$$f(x, y) = 6x^2 - 6xy + \frac{1}{3}y^3 - 10y$$

Finn eventuelle stasjonære punkt og klassifiser disse.

Oppgave 5 (20%)

Gitt funksjonen $f(x, y) = x + y$ og bibetingelsen $y + x^2 - 3x = 2$.

- Tegn nivåkurvene $f(x, y) = 5$, $f(x, y) = 6$, $f(x, y) = 7$ og bibetingelsen $y + x^2 - 3x = 2$ i samme diagram.
- Løs problemet
Max/min $f(x, y) = x + y$ gitt $y + x^2 - 3x = 2$
ved bruk av Lagranges metode.
- Bruk figuren i a) til å diskutere om du har funnet et maksimums- eller minimumspunkt i b).

Nynorsk

Eksamen inneheld 5 oppgåver som alle skal svarast på. Vekt ved sensur er gitt i parentes.

Oppgåve 1 (20%)

a) Finn den fyrstederiverte til følgjande funksjoner

i) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$

ii) $f(x) = \frac{x^3 + 5}{5x^2 - x}$

iii) $f(x) = (2x^2 - e^{3x} + 1)^7$

iv) $f(x) = 2e^{-x} + \ln x^3$

b) Befolkninga i eit land er 5 millionar i 2014, og det er estimert at den framover vil vokse med 1.2% årlig.

i) Sett opp ein funksjon, $P(t)$, som beskriv utviklinga i befolkninga over tid. La $t = 0$ stå for 2014.

ii) Kor lang tid tek det før befolkninga er dobbelt så høg som i 2014? Vis nødvendig utrekning.

iii) Korleis må funksjonen for befolkningsutvikling formulerast dersom befolkninga:

- veks med 2.25% per år?
- veks med 0.7% per år?
- minkar med 1% per år?

Oppgåve 2 (22%)

Gitt $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$

a) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$.

b) Finn dei stasjonære punkta og avgjer om dei er topp- eller botnpunkt.

c) Finn eventuelle vendepunkt.

d) Finn likninga for tangenten til grafen i punktet (2, -2).

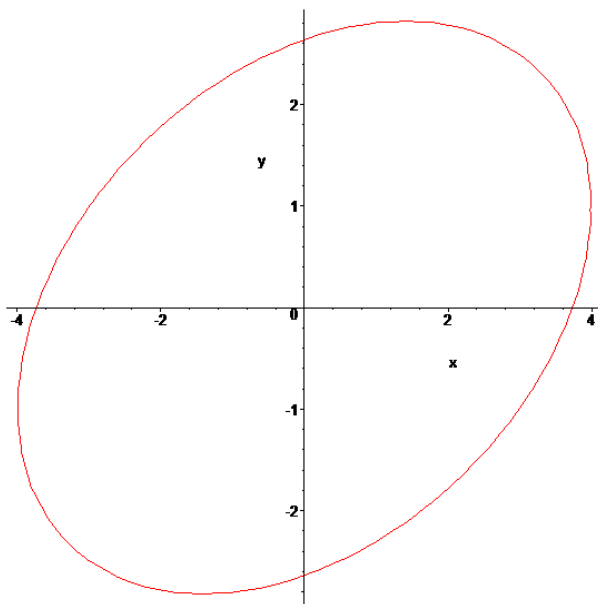
e) Skisser grafen til $f(x)$.

Oppgåve 3 (23%)

Likninga $x^2 - xy + 2y^2 = 14$ framstiller ei kurve i xy -planet som er vist i figuren under.

(Legg merke til at det er forskjellige skalaer på aksane)

- Berekn kurva sine skjæringspunkt med koordinataksane.
- Bruk implisitt derivasjon til å vise at y' kan skrivast som $y' = -\frac{2x-y}{4y-x}$.
- Finn y'' i eit vilkårleg punkt (x, y) på kurva.
- I kva for punkt er tangenten til kurva horisontal? Undersøk fortegnet og verdien til y'' i desse punkta.
- I kva for punkt er tangenten til kurva vertikal?



Oppgåve 4 (15%)

Gitt funksjonen

$$f(x, y) = 6x^2 - 6xy + \frac{1}{3}y^3 - 10y$$

Finn eventuelle stasjonære punkt og klassifiser desse.

Oppgåve 5 (20%)

Gitt funksjonen $f(x, y) = x + y$ og vilkåret $y + x^2 - 3x = 2$.

- Teikn nivåkurvene $f(x, y) = 5$, $f(x, y) = 6$, $f(x, y) = 7$ og vilkåret $y + x^2 - 3x = 2$ i same diagram.
- Løys problemet
 Max/min $f(x, y) = x + y$ gitt $y + x^2 - 3x = 2$
 ved bruk av Lagrange sin metode.
- Bruk figuren i a) til å diskutere om du har funnet eit maksimums- eller minimumspunkt i b).

English

The exam consists of 5 questions, all of which should be answered. The weights used in grading are given in parenthesis.

Question 1 (20%)

a) Find the first derivative of the following functions

i) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$

ii) $f(x) = \frac{x^3 + 5}{5x^2 - x}$

iii) $f(x) = (2x^2 - e^{3x} + 1)^7$

iv) $f(x) = 2e^{-x} + \ln x^3$

b) The population in a country is 5 million in 2014, and it is estimated to increase by 1.2% annually in the future.

- i) Present a function, $P(t)$, that describes the development in the population over time. Let $t = 0$ stand for 2014.
- ii) How long time does it take before the population is twice as high as in 2014? Show the necessary calculations.
- iii) How should the function for population development be rewritten if the population:
 - increases by 2.25% per year?
 - increases by 0.7% per year?
 - decreases by 1% per year?

Question 2 (22%)

Given $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$

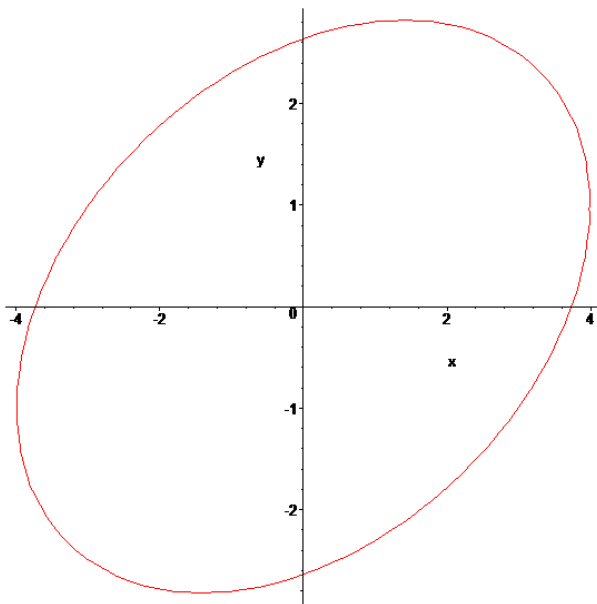
- a) Find $f'(x)$ and $f''(x)$.
- b) Find the stationary points and decide whether they are maximum or minimum points.
- c) Find any inflection points.
- d) Find the equation for the tangent to the graph in the point $(2, -2)$.
- e) Draw the graph of $f(x)$.

Question 3 (23%)

The equation $x^2 - xy + 2y^2 = 14$ illustrates a curve in the xy -plane as shown in the figure below.

(Note that the axes have different scales)

- Calculate the curve's intersection points with the coordinate axes.
- Use implicit differentiation to show that y' can be written as $y' = -\frac{2x-y}{4y-x}$.
- Find y'' in an arbitrary point (x, y) on the curve.
- In which points are the tangent to the curve horizontal? Check the sign and value of y'' in these points.
- In which points are the tangent to the curve vertical?



Question 4 (15%)

Given the function

$$f(x, y) = 6x^2 - 6xy + \frac{1}{3}y^3 - 10y$$

Find any stationary points and classify them.

Question 5 (20%)

Given the function $f(x, y) = x + y$ and the constraint $y + x^2 - 3x = 2$.

- Draw the level curves $f(x, y) = 5$, $f(x, y) = 6$, $f(x, y) = 7$ and the constraint $y + x^2 - 3x = 2$ in the same diagram.
- Solve the problem
Max/min $f(x, y) = x + y$ subject to $y + x^2 - 3x = 2$
by using the Lagrange method.

c) Use the figure in a) to discuss whether you have found a maximum or a minimum point in b).