



EKSAMENSOPPGAVE I SØK3004
VIDEREGÅENDE MATEMATISK ANALYSE

Faglig kontakt under eksamen: Roberto Iacono
Tlf.: 9 16 14

Eksamensdato: Mandag 5. desember 2011

Eksamenssted: Dragvoll

Eksamenstid: 5 timer

Studiepoeng: 15

Tillatte hjelpemidler: Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.

Sensur: 5. januar 2012

Eksamensoppgaven består av 3 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares. Vekting i parentes.

Oppgave 1 (40%)

Betrakt nyttemaksimerings problemet $\max U = xy + 3x + 2y$, u.b.b. $px + qy \leq m$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

- Vis hvordan indifferenskurvene til nyttefunksjonen ser ut.
- Still opp Kuhn-Tucker betingelsene for problemet. Og finn etterspørselen etter de to godene under ulike antagelser om priser og inntekt.
- Finn så den indirekte nyttefunksjonen. Hvordan er sammenhengen mellom indirekte nytte, priser og inntekt?
- Finn også verdien av lagrangemultiplikatoren (skyggeprisen). Gi en tolkning av lagrangemultiplikatoren ved indre løsning på problemet ($x > 0$, $y > 0$).
- Anta i stedet at kostnadene skal minimeres gitt nytte. Still opp Kuhn-Tucker betingelsene for dette problemet. Anta så en indre løsning og vis hvordan du kan finne de kompenserte etterspørselsfunksjonene (du trenger nødvendigvis ikke regne dem ut). Vis også hvordan du kan finne utgiftsfunksjonen (levetekstnadsfunksjonen). Hva sier Shepard's lemma om dette problemet?

Oppgave 2 (20%)

a) Finn integralet $A = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt$, hvor konstanten $\lambda > 0$. Vis arealtolkningen av A . Hva skjer med

$\lim_{b \rightarrow \infty} A$?

En profittstrøm vokser eksponentielt over tiden med raten $\alpha > 0$, $\pi_t = \pi_0 e^{\alpha t}$. Hvor lang tid tar det før strømmen har blitt fordoblet? Diskonteringsrenten er gitt ved $r > 0$, og profittstrømmen løper fram til år $t = T$. Finn nåverdien og sluttverdien av profitten. Løs så det samme problemet i diskret tid.

b) Betrakt modellen i) $Y = C + I + A - B$, ii) $C = C(Y)$ og iii) $B = B(Y)$. Vis hvordan Y , C og B påvirkes av en endring i I både ved implisitt derivasjon og total differensiering. Betrakt deretter de to likningene $xu + uv - yx + y = 0$ og $u^2 - x^2 + v = 3$. Ta det totale differensial, og finn så hvordan de endogene variablene x og y påvirkes av endringer i de eksogene variable u og v .

c) Gitt matrisene $A = \begin{pmatrix} r & p \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Finn først matriseproduktet $A \cdot A$. Finn også determinanten til A .

Har matrisen A en invers, og i så fall hva er verdien?

Oppgave 3 (40%)

a) Vi har systemet av differensiallikninger $dX_t / dt = rX_t(1 - X_t) - \alpha X_t Y_t$ og $dY_t / dt = sY_t(1 - Y_t) + \beta Y_t X_t$, hvor $r > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ og $s > 0$. Finn likningen(e) for X -isoklinen og finn likningen(e) for Y -isoklinen. Finn deretter den indre likevekten ved bruk av Cramers regel. Lag faseplan diagram og vis ved piler hvordan systemet beveger seg utenfor likevekten. Synes likevekten å være stabil? Hvordan ville du gått fram hvis du analytisk skulle undersøke stabiliteten (hint: Jacobimatrisen).

b) Betrakt nå den såkalte svinesykelmodellen hvor markedsetterspørselen etter gris er gitt som $D_t = a + bp_t$, og markedstilbudet som $S_t = \alpha + \beta p_{t-1}$. Anta markedslikevekt, og finn hvordan markedsprisen utvikler seg over tiden. Under hvilke betingelser vil markedsprisen stabilisere seg?

c) Betrakt til slutt populasjonsmodellen $X_{t+1} = F(X_t)$, hvor $F(X_t) = (X_t - a)(b - X_t)$. Populasjonen er hele tiden ikke-negativ $X_t \geq 0$, og begge parametrene er positive, $b > a > 0$. Studer først egenskapene til funksjonen $F(X_t)$ og lag figur. Studer deretter ved figurbetraktning hvordan populasjonen utvikler seg over tid. Vil populasjonen stabilisere seg? (Hint: sett av X_{t+1} langs den vertikale akse og X_t langs den horisontale akse).

Oppgåve 1 (40%)

Studert nyttemaksimeringsproblemet $\max U = xy + 3x + 2y$, u.b.b. $px + qy \leq m$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

- Vis korleis indifferenskurvane til nyttefunksjonen sjår ut.
- Sett opp Kuhn-Tucker betingelsene for problemet. Finn etterspurnaden etter dei to godane under ulike priser og inntekt.
- Finn så den indirekte nyttefunksjonen. Korleis er samanhengen mellom indirekte nytte, prisar og inntekt?
- Finn også verdia av lagrangemultiplikatoren (skoggeprisen). Gje ein tying av lagrangemultiplikatoren ved indre løysing på problemet ($x > 0$, $y > 0$).
- Anta i stedet at kostnadene skal minimeras gjeven nytte. Sett opp Kuhn-Tucker betingelsene for dette problemet. Forutsett så ein indre løysing og vis korleis du kan finne dei kompenserte etterspurnadsfunksjonane (du treng ikkje rekne dem ut). Vis også korleis du kan finne utgiftsfunksjonen (levestandardfunksjonen). Kva seier Shepard's lemma om dette problemet?

Oppgåve 2 (20%)

a) Finn integralet $A = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt$, kor konstanten $\lambda > 0$. Vis arealtolkninga av A . Kva skjer med

$\lim_{b \rightarrow \infty} A$?

Ein profittstrøm veks eksponentielt over tida med raten $\alpha > 0$, $\pi_t = \pi_0 e^{\alpha t}$. Kor lang tid tek det før strømmen har dobla seg? Diskonteringsrenta er gjeven ved $r > 0$, og profittstrømmen løyper fram til år $t = T$. Finn nåverdien og sluttverdien av profitten. Løys så det same problemet i diskret tid.

b) Sjå på modellen i) $Y = C + I + A - B$, ii) $C = C(Y)$ og iii) $B = B(Y)$. Vis korleis Y , C og B påverkas av ei endring i I både ved implisitt og total differensiering. Betrakt deretter dei to likningane $xu + uv - yx + y = 0$ og $u^2 - x^2 + v = 3$. Tek det totale differensial, og finn så korleis dei endogene variablane x og y påverkas av endringar i dei eksogene variablane u og v .

c) Vi har matrisen $A = \begin{pmatrix} r & p \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Berekn matriseproduktet $A \cdot A$. Berekn også determinanten til A .

Har matrisen A ein invers, og kva er i såfall verdien?

Oppgave 3 (40%)

- a) Vi har systemet av differensiallikningar $dX_t / dt = rX_t(1 - X_t) - \alpha X_t Y_t$ og $dY_t / dt = sY_t(1 - Y_t) + \beta Y_t X_t$, kor $r > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ og $s > 0$. Finn likninga(ne) for X -isoklinen og finn likninga(ne) for Y -isoklinen. Finn så den indre jamnlikheiten ved bruk av Cramers regel. Lag faseplan diagram og vis ved piler korleis systemet endras utanfor jamnlikheiten. Er den stabil? Syn korleis du ville ha gått fram hvis du analytisk skulle studere stabiliteten (hint: Jacobimatrisen).
- b) Sjå nå på den såkalla svinesykelmodellen kor markedsetterspurdnaden etter gris er gjeven som $D_t = a + bp_t$ og markedstilbodet som $S_t = \alpha + \beta p_{t-1}$. Anta markedsjammvekt, og finn korleis markedsprisen endrar seg over tiden. Vil prisen stabilisera seg?
- c) Studer til slutt populasjonsmodellen $X_{t+1} = F(X_t)$, kor $F(X_t) = (X_t - a)(b - X_t)$. Populasjonen er heile tida ikkje-negativ $X_t \geq 0$, og begge parametrene er positive, $b > a > 0$. Studer først eigenskapene til funksjonen $F(X_t)$ og lag ein figur. Studer deretter ved figurbetraktning korleis populasjonen utviklar seg over tid. Vil populasjonen stabiliseras? (Hint: sett av X_{t+1} langs den vertikale akse og X_t langs den horisontale akse).