Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK3004

VIDEREGÅENDE MATEMATISK ANALYSE

Faglig kontakt under eksamen: Anders Skonhoft
Tlf.: 9 19 39

Eksamensdato: Mandag 21. mai 2012

Eksamenssted: Dragvoll

Eksamenstid: 5 timer

Studiepoeng: 15

Tillatte hjelpemidler: Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.

Sensur: 12. juni 2012

Eksamensoppgaven består av 4 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares.

Vekting gitt i parentes.

Oppgave 1 (30%)

En bedrift har L arbeidstimer til rådighet for produksjon av to produkter, $X \geq 0$ og $Y \geq 0$. Disse selges til faste priser, henholdsvis p og q. Produksjonen av X enheter krever αX^2 arbeidstimer og produksjonen av Y enheter krever βY timer slik at $\alpha X^2 + \beta Y \leq L$ Anta at bedriftens inntekt ønskes maksimert.

a) Still først opp Kuhn-Tucker betingelsene for problemet.

b) Finn deretter optimal produksjon.

c) Finn også prisen (skyggeprisen) på arbeidstidsbeskrankningen. Tolk denne.

d) Finn hvilke effekter små endringer i prisene p og q har på optimal produksjon og skyggepris.

Oppgave 2 (30%)

Betrakt systemet av differensiallikninger

(1) $dX / dt = rX(1 - X / K) + \alpha XY$

og

(2) $dY / dt = sY(1 - Y / L) + \beta YX$

hvor r, K, s, L, α og β er positive koeffisienter. Dette systemet kan tolkes som en biologisk modell som gir et symbiotisk forhold (har gjensidig nytte av hverandre) mellom to dyrearter.

a) Finn likningen for X-isoklinen og likningen for Y-isoklinen. Finn også likevekten.

b) Vis ved piler hvordan systemet beveger seg utenfor likevekten. Synes likevekten å være stabil? Hvordan ville du gått fram hvis du med formelt skulle undersøke stabiliteten? (hint; Jacobimatrisen)

c) Betrakt nå Cobweb- ('Edderkoppspinn') modellen hvor etterspørselen først er gitt som

(1) $D_t = a - bp_t$

og tilbudet som

(2) $S_t = \alpha + \beta p_{t-1}$.

Anta at markedet hele tiden blir klarert, dvs. $D_t = S_t$. Finn den likevektsprisen som klarerer markedet og diskuter stabiliteten.

Oppgave 3 (20%)

a) Beregn følgende integral

i) $\int_0^1 \left(2x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5\right)dx$, ii) $\int \frac{4x^3 - 5x^2 + 8x - 1}{x-2}dx$, iii) $\int \frac{8x-2}{\left(2x^2 - x + 1\right)^3}dx$.

b) Finn den allmenne løsningen av differensiallikningen $-\dot{x} = 3x^2te^{-2t}$. Finn også løsningskurven som går gjennom punktet $(t,x) = (0,4)$.

c) For hvilke verdier av *a* har følgende matrise en invers?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 4 \\ 15/8 & 5-2a & 3 \end{pmatrix}$$

Finn den inverse for *a* = 1.

Oppgave 4 (20%)

Følgende likningssystem definerer *u* og *v* som funksjoner av *x* og *y*:

$$x^2 + e^{v-u} - xy = 1$$

$$\ln y - u + 2v^2 = e$$

a) Totaldifferensier systemet.

b) Finn generelle uttrykk for de partielle deriverte $\frac{\partial v}{\partial x}$ og $\frac{\partial v}{\partial y}$.

c) Finn verdiene til de partielle deriverte $\frac{\partial u}{\partial x}$ og $\frac{\partial u}{\partial y}$ i punktet *P*: $(x,y,u,v) = (1,e,1,1)$.